УДК 539.311

К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ

Гузь А. Н.

Изложено построение двумерной линеаризированной теории устойчивости тонкостенных упругих круговых цилиндрических оболочек при действии равномерного внешнего давления в виде «следящей» нагрузки. Используются соотношения теории оболочек, построенной с применением гипотезы Кирхгофа — Лява, когда докритические деформации являются малыми и докритическое состояние определяется по геометрически линейной теории. В указанной постановке для определения «следящей» нагрузки применяются уточненные выражения [1, 2]. В результате для рассматриваемого случая получена основная система дифференциальных уравнений с симметричной матрицей операторов. Для шарнирно-опертой оболочки при безмоментном докритическом состоянии получено характеристическое уравнение. В результате асимптотического анализа корней этого уравнения получены условия, при выполнении которых решения для случаев действия внешнего давления в виде следящей и мертвой нагрузок совпадают.

Отметим, что решение линеаризированной задачи об устойчивости шарнирно-опертой цилиндрической оболочки при действии равномерного внешнего давления в виде мертвой нагрузки получено еще Мизесом в работе [3]. Решение [3] приведено в ряде монографий, в частности в [4], и наряду с различными обобщениями широко применяется при анализе теоретических и экспериментальных результатов. Однако большинство экспериментальных результатов получено в условиях, когда внешнее равномерное давление реализуется за счет гидростатической нагрузки, т. е. в виде следящей нагрузки.

1. Постановка задачи. Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку постоянной толщины h, радиуса R и длины L, которая загружена равномерным внешним давлением интенсивности $\mathbf{q}$. Материал оболочки будем считать упругим и изотропным. Построим основную систему дифференциальных уравнений в случае, когда внешнее давление действует в виде следящей нагрузки. Применим систему координат (x, y, z), указанную в гл. II работы [4], и выберем соответствующие положительные направления векторных величин. Линеаризированные уравнения теории оболочек представим в виде

$$\mathbf{LU}+\mathbf{BU}+\mathbf{Q}(\mathbf{q}-\rho h\ddot{\mathbf{U}})=0 \tag{1.1}$$

$$Q_{ij}=\frac{1-\nu^2}{Eh}(\delta_i^1\delta_j^1+\delta_i^2\delta_j^2-\delta_i^3\delta_j^3)$$

$$L_{11}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2};\quad L_{12}\equiv L_{21}=\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}$$

$$L_{13}\equiv L_{31}=-\frac{\nu}{R}\frac{\partial}{\partial x};\quad L_{22}=\left(1+\frac{h^2}{12R^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$$

$$L_{23}\equiv L_{32}=\left[-\frac{1}{R}+\frac{h^2}{12R}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right]\frac{\partial}{\partial y}$$

$$L_{33}=\frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2+\frac{1}{R^2}$$

Здесь $\mathbf{U}$ — вектор перемещений срединной поверхности с компонентами u, v и w, $\mathbf{q}$ — вектор поверхностной нагрузки с компонентами q_x, q_y и q_z, $\mathbf{L}$ — симметричная матрица дифференциальных операторов линейной теории оболочек, $\mathbf{B}$ — матрица дифференциальных операторов с параметрическими членами, полученная в результате линеаризации нелинейных уравнений, ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга, δ_i^j — символ Кронекера, ρ — плотность материала оболочки.

В простейшем случае безмоментного докритического состояния элементы матрицы **B** имеют следующий вид [4]:

(1.2) $$B_{ij} = \delta_i^3 \delta_j^3 qR \frac{1-\nu^2}{Eh} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Для построения основной системы уравнений в рассматриваемой постановке необходимо определить через перемещения составляющие поверхностной нагрузки, соответствующие случаю действия следящей нагрузки. Для их определения в работах [5—8] получены линеаризированные выражения согласно теории малых деформаций. В работах [1, 2] при помощи теории конечных деформаций [9] получены выражения, которые дали возможность в рамках трехмерной линеаризированной теории устойчивости при малых докритических деформациях получить ряд качественных и количественных результатов [1, 2, 10, 11], совпадающих с соответствующими результатами трехмерной линеаризированной теории устойчивости при конечных докритических деформациях. Как известно, последняя теория не имеет погрешностей кинематического характера, что свидетельствует о целесообразности применения уточненных выражений [1, 2]. В дальнейшем для общности будем также использовать и выражения [5—8], называя их обычно принятыми, а выражения [1, 2] — уточненными. Контравариантные составляющие q^j поверхностной нагрузки для рассматриваемой постановки в лагранжевых координатах имеют, согласно уточненным выражениям [1, 2], вид

(1.3) $$q^j = -q\,(N^j \nabla_\alpha u^\alpha - N^\alpha g^{\beta j} \nabla_\beta u^\alpha)$$

Согласно обычно принятым [5—8] выражениям, имеем

(1.4) $$q^j = -qN^\beta \nabla_\beta u^j$$

Здесь N^j — контравариантные составляющие орта нормали к поверхности тела, где задана следящая нагрузка, в естественном (недеформированном) состоянии, $g^{i\beta}$ — контравариантные составляющие метрического тензора в естественном состоянии; ковариантное дифференцирование выполнено при помощи базисных векторов в естественном состоянии.

Воспользуемся гипотезой Кирхгофа — Лява. В силу тонкостенности оболочек будем считать, что давление в виде следящей нагрузки приложено к срединной поверхности при $z = 0$. В этом случае получим выражения, соответствующие уточненному [1, 2] и обычно принятому [5—8] подходу, в виде

(1.5) $$q_x = -q\frac{\partial w}{\partial x}, \quad q_y = -q\frac{\partial w}{\partial y}, \quad q_z = q\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R}\right)$$

(1.6) $$q_x = -q\frac{\partial w}{\partial x}, \quad q_y = -q\frac{\partial w}{\partial y}, \quad q_z = 0$$

Согласно (1.5), (1.6) и (1.1), основную систему уравнений запишем в форме

(1.7) $$\mathbf{LU} + \mathbf{BU} + \mathbf{\Pi U} - \rho h \mathbf{QU}^{\cdot\cdot} = 0$$

Слагаемое $\mathbf{\Pi U}$ соответствует возмущению поверхностной нагрузки, где $\mathbf{\Pi}$ — матрица дифференциальных операторов, отличные от нуля элементы которой имеют следующий вид:

(1.8) $$\Pi_{ij} = \Lambda \Pi_{ij}^*, \ \Lambda = q\,(1-\nu^2)/(Eh), \ \Pi_{13}^* = -\delta_1 \partial/\partial x$$
$$\Pi_{22}^* = -\delta_1/R, \ \Pi_{23}^* = -\delta_1 \partial/\partial y, \ \Pi_{31}^* = -\delta_2 \partial/\partial x$$
$$\Pi_{32}^* = -\delta_2\, \partial/\partial y, \ \Pi_{33}^* = \delta_2/R$$

Различные значения δ_i $(i = 1, 2)$ соответствуют различным частным случаям рассматриваемой задачи. При $\delta_1 \equiv \delta_2 = 0$ действие внешнего давления проявляется в виде мертвой нагрузки. Случай $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 0$ соответствует действию внешнего давления в виде следящей нагрузки, составляющие которой определяются по обычно принятым выражениям [5—8]. При $\delta_1 \equiv \delta_2 = 1$ действие внешнего давления сводится к следящей нагрузке, составляющие которой определяются по уточненным выражениям [1, 2], Из выражений (1.8) следует, что лишь в случае уточненной теории [1, 2] можно получить симметричную матрицу дифференциальных операторов при действии внешнего давления в виде следящей нагрузки. Кроме того, заметим, что результаты по построению матрицы Π^* остаются в силе и для неупругих моделей материала оболочки.

Перейдем к исследованию случая шарнирно-опертой оболочки при безмоментном докритическом состоянии.

2. Шарнирно-опертая оболочка. В случае шарнирного опирания по торцам граничные условия при $x = 0$ и $x = L$ имеют следующий вид:

$$w=0, \quad v=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{2.1}$$

Будем считать, что по торцам оболочка опирается на шпангоуты, которые обеспечивают существование безмоментного докритического состояния [4]. В этом случае элементы матрицы **B** имеют вид (1.2).

Первое условие шарнирного опирания (2.1) на торцах оболочки обеспечивает выполнение первого достаточного условия применимости (формула (9) работы [12]) метода Эйлера исследования рассматриваемой задачи. В связи с этим отбросим в (1.7) инерционные члены и получим задачу на собственные значения с граничными условиями (2.1) и уравнением

$$\mathbf{AU} = 0 \tag{2.2}$$

$$A_{11} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad A_{12}\equiv A_{21}=\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y},$$

$$A_{13} = -\left(\frac{\nu}{R}+\delta_1\Lambda\right)\frac{\partial}{\partial x}$$

$$A_{22} = \left(1+\frac{h^2}{12R^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)-\frac{\delta_1}{R}\Lambda,$$

$$A_{23} = -\left(\frac{1}{R}+\delta_1\Lambda-\frac{h^2}{12R}\Delta\right)\frac{\partial}{\partial y}$$

$$A_{31} = -\left(\frac{\nu}{R}+\delta_2\Lambda\right)\frac{\partial}{\partial x}, \quad A_{32} = -\left(\frac{1}{R}+\delta_2\Lambda-\frac{h^2}{12R}\Delta\right)\frac{\partial}{\partial y}$$

$$A_{33} = \frac{h^2}{12}\Delta^2+\frac{1}{R^2}+R\Lambda\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\delta_2\frac{\Lambda}{R}, \quad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Отметим, что при действии следящей нагрузки матрица **A** будет симметричной только при использовании уточненных выражений [1, 2]; при применении обычно принятых выражений [5—8], как следует из (2.2), матрица **A** несимметрична. В то же время, как следует из [12], рассматриваемая задача для шарнирно-опертой оболочки будет самосопряженной. Ниже исследуем рассматриваемую задачу для всех трех указанных частных случаев в общей форме.

Перемещения, удовлетворяющие граничным условиям (2.1) при $x = 0$ и $x = L$, представим в следующем виде:

$$u=f_1\cos\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{ny}{R}, \quad v=f_2\sin\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{ny}{R} \tag{2.3}$$

$$w=f_3\sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{ny}{R}, \quad f_i=\mathrm{const}$$

Из (2.2), (2.3) получим характеристическое уравнение в форме

$$\det\|\alpha_{ij}\| = 0; \quad i,\ j = 1,2,3 \tag{2.4}$$

$$\alpha_{11}=\frac{1-\nu}{2}+\varepsilon, \quad \alpha_{12}\equiv\alpha_{21}=\frac{1+\nu}{2}\sqrt{\varepsilon}, \quad \alpha_{13}=(\nu+\delta_1 p)\sqrt{\varepsilon}$$

$$\alpha_{31}=(\nu+\delta_2 p)\sqrt{\varepsilon}$$

$$\alpha_{22}=(1+\gamma)\left(1+\frac{1-\nu}{2}\varepsilon\right)+\delta_1 pn^{-2}, \quad \alpha_{23}=1+\delta_1 p+\gamma n^2(1+\varepsilon)$$

$$\alpha_{32}=1+\delta_2 p+\gamma n^2(1+\varepsilon), \quad \alpha_{33}=n^4\gamma\,(1+\varepsilon)^2+1-n^2p+\delta_2 p$$

$$\varepsilon=\left(\frac{m\pi R}{nL}\right)^2, \quad \gamma=\frac{h^2}{12R^2}, \quad p=R\Lambda$$

Если при вычислении элементов матрицы L ограничиться технической теорией оболочек, то в элементах α_{23} и α_{32} определителя (2.4) следует отбросить члены с множителем γ.

3. Анализ характеристического уравнения. Проведем анализ характеристического уравнения (2.4), соответствующего технической теории оболочек. Построим решение уравнения (2.4) для частных случаев в виде рядов по малым параметрам. Рассмотрим случай, когда выполняются условия

$$\gamma \ll 1, \ \varepsilon \ll 1 \tag{3.1}$$

Первое условие (3.1), как следует из обозначений (2.4), всегда выполняется для тонкостенных оболочек. Второе условие (3.1) требует, чтобы число волн вдоль направляющей было больше числа волн вдоль образующей. Поскольку при экспериментальных исследованиях вдоль образующей всегда образуется одна полуволна и несколько волн вдоль направляющей, то второе условие (3.1) следует, также считать оправданным. Тогда решение уравнения (2.4) будем искать в следующей форме:

$$p = \sum_{i,\, j=0}^{\infty} x_{ij}\varepsilon^i\gamma^j \tag{3.2}$$

Считая $O(\varepsilon^3) \ll \gamma \lesssim O(\varepsilon^2)$, ограничимся приближением

$$p \approx x_{00} + x_{10}\varepsilon + x_{20}\varepsilon^2 + x_{01}\gamma \tag{3.3}$$

Из (2.4) и (3.3) получим для x_{00} два корня

$$(x_{00})_1 = 0, \quad (x_{00})_2 = -\delta_1 \frac{n^2 + \delta_1(1 - n^{-2})}{1 + \delta_2(1 - n^{-2})} \tag{3.4}$$

Второй корень (3.4) для следящей нагрузки не имеет физического смысла, поскольку в этом случае $(x_{00})_2 < 0$. Согласно (2.4), (3.3) и (3.4), получим

$$(x_{10})_1 = 0, \quad (x_{20})_1 = \frac{1 - \nu^2}{n^2 + \delta_1(1 - n^{-2})}, \quad (x_{01})_1 = \frac{n^4}{n^2 + \delta_1(1 - n^{-2})} \tag{3.5}$$

Из (3.3) — (3.5) получим следующее выражение:

$$p \approx \left(n^2\gamma + \varepsilon^2 \frac{1 - \nu^2}{n^2}\right) \frac{n^4}{n^4 + \delta_1(n^2 - 1)} \tag{3.6}$$

Положив в (3.6) $\delta_1 \equiv \delta_2 = 0$, получаем значение корня в случае, когда внешнее давление действует в виде мертвой нагрузки

$$p \approx n^2\gamma + \varepsilon^2 \frac{1 - \nu^2}{n^2} \tag{3.7}$$

Выражение (3.7) совпадает с известным результатом ([4], с. 496) при условии (3.1). Следовательно, совпадает и значение критической нагрузки.

В случае действия внешнего давления в виде следящей нагрузки, положив в (3.6) $\delta_1 = 1$ и $\delta_2 = 0$ или $\delta_1 \equiv \delta_2 = 1$, получим значение корня с точностью (3.3) в следующем виде:

$$p \approx \left(n^2\gamma + \varepsilon^2 \frac{1 - \nu^2}{n^2}\right) \frac{n^4}{n^4 + n^2 - 1} \tag{3.8}$$

Заметим, что в рассматриваемом приближении (3.1) и (3.3) в случае действия внешнего давления в виде следящей нагрузки значение корня, полученное с привлечением уточненного подхода [1, 2] ($\delta_1 \equiv \delta_2 = 1$), совпадает со значением корня, полученного в рамках обычно принятого подхода [5—8] ($\delta_1 = 1, \delta_2 = 0$) и имеют вид (3.8). Однако в отличие от обычного подхода при уточненном подходе получена симметричная матрица дифференциальных операторов самосопряженной задачи. В общем случае для выяснения количественного отличия в решениях задач при действии внешнего давления в виде следящей и мертвой нагрузок необходимо исследовать уравнение (2.4) численными методами.

В заключение выясним, при каких условиях решения задач при действии внешнего давления в виде следящей и мертвой нагрузок совпадают. Из выражений (2.4), (3.1), (3.7) и (3.8) следует, что указанные решения идентичны, если выполняются условия

$$(m\Pi R/nL)^2 \ll 1,\ n^2 \gg 1 \tag{3.9}$$

Таким образом, если параметры оболочки такие, что при действии мертвой нагрузки для классического решения [3] (см. также [4]) выполняются условия (3.9), то это решение справедливо также и при действии внешнего давления в виде следящей нагрузки. В этом случае более корректным является также и сравнение с результатами экспериментальных исследований при реализации внешнего давления в виде гидростатической нагрузки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии.— Прикл. механика, 1976, т. 12, № 6, с. 3.
2. *Гузь А. Н.* Определение «следящих» нагрузок при малых деформациях.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1976, № 10, с. 908.
3. *Mises R.* Der kritische Aussendruck für allseits belastete zylindrische Rohre.— In: Festschr. zum 70 Geburtstag von prof. A. Stodola, Zürich, 1929, p. 418.
4. *Вольмир А. С.* Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1967. 880 с.
5. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. Л.— М.: Гостехиздат, 1948. 212 с.
6. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 340 с.
7. *Гузь А. Н.* Устойчивость трехмерных деформируемых тел. Киев: Наукова думка, 1971. 276 с.
8. *Гузь А. Н.* Основы теории устойчивости горных выработок. Киев: Наукова думка, 1977. 204 с.
9. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: Наукова думка, 1973, 270 с.
10. *Гузь А. Н.* Об устойчивости упругих сжимаемых тел при всестороннем сжатии.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 5, с. 936.
11. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии. Киев: Наукова думка, 1979. 144 с.
12. *Гузь А. Н.* Достаточные условия применения метода Эйлера для случая «следящей» нагрузки, заданной на части поверхности тела.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, № 10, с. 901.

Киев

Поступила в редакцию 20.II.1979

ФОРМУЛА ДЛЯ МНИМЫХ ЧАСТЕЙ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИИ ОБОЛОЧКИ В СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Симонов И. В.

Получена точная формула связи мнимых частей собственных значений задачи о колебании замкнутой оболочки в безграничной сжимаемой жидкости с интегралами типа интегралов энергии от собственных функций задачи. Замена этих функций на собственные функции задачи для несжимаемой жидкости приводит к оценке.

В задаче о вынужденных колебаниях оболочки в жидкости резонансные максимумы ограничены и обратно пропорциональны мнимым частям собственных значений. Их оценка представляет интерес также для сопоставления эффекта излучения с другими диссипативными эффектами.

1. Систему уравнений задачи о вынужденных колебаниях тонкой упругой замкнутой оболочки в безграничной идеальной сжимаемой жидкости под действием внутрен-