

УДК 539.3 : 62—50

ОБ УПРАВЛЕНИИ ПРОЦЕССОМ ОБРАБОТКИ МАТЕРИАЛОВ С ЦЕЛЮ СНИЖЕНИЯ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Няшин Ю. И.

Рассматривается задача о минимизации уровня остаточных напряжений для тела, находящегося в начальный момент времени в естественном состоянии при неоднородном поле температуры. Получена целевая функция, оценивающая уровень остаточных напряжений через текущие параметры процесса. Приводится пример решения задачи управления уровнем термических остаточных напряжений в двутавровой балке, полученной способом горячей прокатки.

Пусть в начальный момент времени ($\tau = 0$) материал исследуемой области \bar{D} находится в естественном (недеформированном и ненапряженном) состоянии. (Заметим, что учет начальных деформаций не представляет трудностей.) При остывании до температуры среды $T_1 = \text{const}(\mathbf{x})$ материал подвержен силовым и температурным воздействиям, часть из которых можно рассматривать как управления. Образование остаточных напряжений зависит от нестационарного перехода из T_0 и T_1 и силовых воздействий. Требуется найти управления, минимизирующие уровень остаточных напряжений при охлаждении области до температуры среды T_1 . Разделение воздействий на фазовые переменные и управления зависит от условий конкретной задачи. Во многих практических задачах (в частности, в примере, приводимом ниже) в качестве управления можно использовать принудительное локальное охлаждение или нагрев некоторых участков поверхности тела, тогда управляющей функцией будет коэффициент теплоотдачи как функция координат и времени.

Остаточные напряжения ρ_{ij} удовлетворяют системе уравнений (при обычных обозначениях)

$$(1) \quad \begin{aligned} \rho_{ij,j} &= 0, \quad \mathbf{x} \in D \\ \rho_{ij} &= C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p - \varepsilon^T \delta_{kl}), \quad \text{Ink} \varepsilon = \text{rot} (\text{rot} \varepsilon)^* = 0, \\ &\mathbf{x} \in \bar{D} \\ \rho_{ij} n_j &= 0, \quad \mathbf{x} \in S \\ \left(\varepsilon^T &= \int_{T_0}^{T_1} \alpha_T(T) dT \right) \end{aligned}$$

где $\alpha_T(T)$ — коэффициент линейного теплового расширения.

Здесь предположено, что компоненты ε_{ij} тензора малой остаточной деформации ε представимы в виде суммы упругих ξ_{ij} , пластических ε_{ij}^p и температурных $\varepsilon^T \delta_{ij}$ составляющих, звездочка означает транспонирование, C_{ijkl} — тензор упругих постоянных.

Как видно из системы (1), воздействовать на остаточные напряжения можно только с помощью пластических деформаций ε_{ij}^p , определяемых из решения задачи термоупругопластичности, соответствующей охлаждению области от температуры T_0 до температуры T_1 .

Для решения задачи управления уровнем остаточных напряжений нужно построить соответствующую целевую функцию, причем для возможности решения реальных технических задач она должна удовлетворять двум условиям:

1°. Целевая функция должна зависеть от текущих, а не конечных параметров процесса охлаждения, так как необходимое для оптимизации во втором случае многократное численное решение связанной нелинейной задачи термоупругопластичности в областях сложной формы представляется практически невозможным.

2°. В реальных процессах горячей обработки металлов воздействовать на пластические деформации, а потому и на остаточные напряжения можно лишь в начальной стадии процесса охлаждения, пока предел текучести достаточно низок. Поэтому целевая функция должна учитывать, какие пластические деформации нужно создать в начале процесса охлаждения для минимизации остаточных напряжений в его конце.

Ниже целевая функция, имеющая указанные свойства, строится с помощью теории гильбертовых пространств [1, 2]. Было показано [3], что необходимым и достаточным условием отсутствия в области остаточных напряжений является совместность упругих деформаций в момент охлаждения области до температуры среды T_1 и снятия силовых нагрузок. Поэтому можно ожидать, что остаточные напряжения будут зависеть от степени указанной несовместности.

Если каким-либо способом разложить упругие остаточные деформации ξ_{ij} на совместные $\xi_{ij}^{(1)}$ и несовместные $\xi_{ij}^{(2)}$ составляющие, то можно установить, что уровень остаточных напряжений определяется только несовместными деформациями $\xi_{ij}^{(2)}$. В самом деле, из первого и четвертого уравнений (1) следует, что

$$(2) \quad \int_D \rho_{ij} \xi_{ij} dV = \int_D \rho_{ij} \xi_{ij}^{(2)} dV$$

Из закона Гука вытекает, что

$$(3) \quad \int_D \rho_{ij} \xi_{ij} dV \geq \frac{1-2\mu}{E} \int_D \rho_{ij} \xi_{ij}^{(2)} dV$$

Комбинируя (2) и (3), имеем

$$(4) \quad \int_D \rho_{ij} \rho_{ij} dV \leq \frac{E}{1-2\mu} \int_D \rho_{ij} \xi_{ij}^{(2)} dV$$

Для получения дальнейших оценок введем гильбертово пространство H симметричных двухвалентных тензоров $W(x)$. Здесь имеются различные возможности, в частности, можно ввести энергетическое пространство. Учитывая, однако, конкретный вид оценки (4) и простоту построения ортонормированного базиса, ниже будем использовать гильбертовы

пространства согласно формулам (5) и (6). Предположим, что функции $W(x)$ суммируемы с квадратом, т. е.

$$(5) \quad \int_D W_{ij} W_{ij} dV < \infty$$

Тогда можно ввести скалярное произведение и норму элемента W

$$(6) \quad (A, B) = \int_D A_{ij} B_{ij} dV, \quad \|W\| = (W, W)^{1/2}$$

Далее выделим в H подпространство H_1 симметричных двухвалентных тензоров, компоненты которых удовлетворяют условиям совместности, т. е. имеют вид

$$\varepsilon_{ij} = 1/2 (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad x \in \bar{D}, \quad \{\varepsilon_{ij}\} \in H_1$$

где u_i — компоненты вектора. Заметим, что подпространство H_1 , вообще говоря, не замкнуто. Это связано с тем, что последовательность производных от непрерывных функций может сходиться к функции, которая не будет производной от какой-либо функции (производная понимается в обычном, не обобщенном смысле).

Степень несовместности тензора можно оценить расстоянием в пространстве H от данного тензора до подпространства H_1 , которое определяется как

$$\rho(W, H_1) = \inf \{ \rho(W, Y) : Y \in H_1 \}$$

$$(\rho(W, Y) = \|W - Y\|)$$

Применим далее неравенство Коши — Буняковского

$$\int_D \rho_{ij} \xi_{ij}^{(2)} dV \leq \|P\| \|E^{(2)}\|$$

$$\|P\| = \left(\int_D \rho_{ij} \rho_{ij} dV \right)^{1/2}, \quad \|E^{(2)}\| = \left(\int_D \xi_{ij}^{(2)} \xi_{ij}^{(2)} dV \right)^{1/2}$$

Из неравенства (4) имеем тогда

$$(7) \quad \|P\| \leq \frac{E}{1-2\mu} \|E^{(2)}\|$$

Это неравенство справедливо для любых $\xi_{ij}^{(2)} = \xi_{ij} - \xi_{ij}^{(1)}$, в том числе и для составляющих тензора $\|E^{(2)}\|$ с минимальной нормой. Как известно из теоремы Беппо — Леви [1, 2], минимальной норме $\|E^{(2)}\|$ соответствуют компоненты ξ_{ij}^\perp тензора E^\perp , ортогонального замыканию \bar{H}_1 подпространства H_1

$$\xi_{ij}^\perp = \xi_{ij} - (\text{pr}_{\bar{H}_1} E)_{ij}$$

$$\|E^\perp\| = \inf \|E^{(2)}\| = \inf \|E - E^{(1)}\| = \|E - \text{pr}_{\bar{H}_1} E\|$$

где $(\text{pr}_{\bar{H}_1} E)_{ij}$ — компоненты проекции тензора E с составляющими ξ_{ij} на подпространство \bar{H}_1 .

Введем обозначение

$$r_{ij}(\tau) = \varepsilon_{ij}^p(\tau) + \varepsilon^T \delta_{ij}, \quad x \in \bar{D}, \quad \{r_{ij}\} = R$$

где $r_{ij}(\tau)$ — сумма текущих пластических $\varepsilon_{ij}^p(\tau)$ и полных температурных $\varepsilon^T \delta_{ij}$ составляющих тензора деформации.

Используя совместность полных деформаций, можно показать, что ξ_{ij}^\perp с точностью до знака совпадают с компонентами $r_{ij}^\perp(\tau_1)$ тензора $R^\perp(\tau_1)$ (здесь τ_1 — момент охлаждения области до температуры T_1).

Если известен ортонормированный базис $\Pi^{(n)}$ в подпространстве H_1 (он же является базисом и в \bar{H}_1), то

$$[\text{pr}_{\bar{H}_1} R(\tau_1)]_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \pi_{ij}^{(n)}, \quad \alpha_n = \int_D r_{ij}(\tau_1) \pi_{ij}^{(n)} dV$$

— коэффициент Фурье в базисе $\Pi^{(n)}$.

Согласно определению проекции, имеем

$$\|E^\perp\| = \|R^\perp(\tau_1)\| \leq \|R(\tau_1) - R^{(1N)}(\tau_1)\|$$

где компоненты $r_{ij}^{(1N)}(\tau_1)$ тензора $R^{(1N)}(\tau_1)$ определяются как

$$r_{ij}^{(1N)}(\tau_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \pi_{ij}^{(n)}.$$

В итоге из неравенства (7) получаем окончательную оценку уровня остаточных напряжений

$$(8) \quad \|P\| \leq \Phi[\varepsilon_{ij}^p(\tau_1)] = \frac{E}{1-2\mu} \|R(\tau_1) - R^{(1N)}(\tau_1)\| = \\ = \frac{E}{1-2\mu} \left[\|R(\tau_1)\|^2 - \sum_{n=1}^N \alpha_n^2 \right]^{1/2}$$

Для использования оценки (8) следует построить базис $\pi_{ij}^{(n)}$ в подпространстве совместных деформаций, что можно сделать с помощью полей перемещений. Функционал, введенный в [4], следует из (8) при использовании базисных тензоров в виде констант.

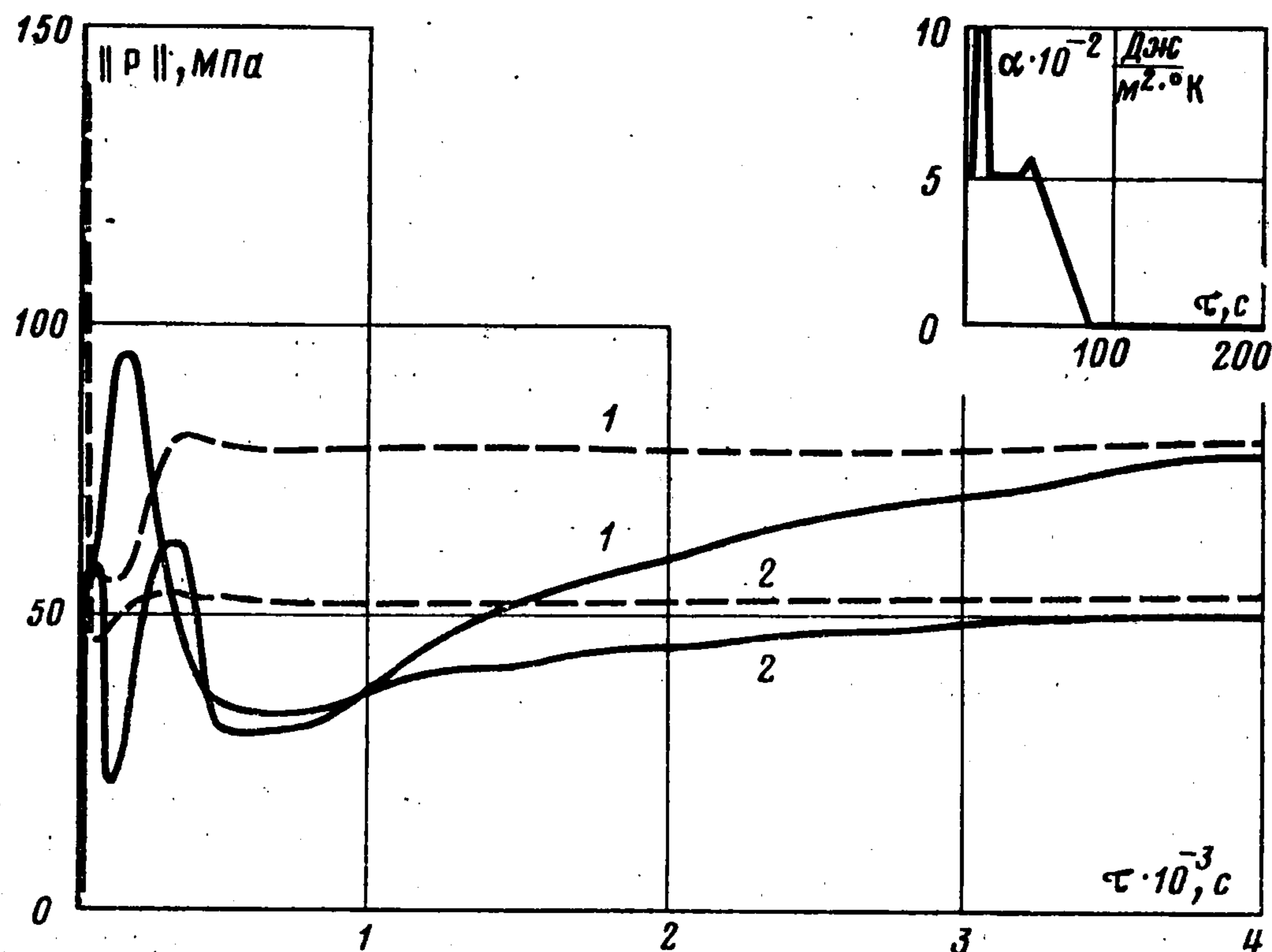
Заметим, что функционал $\Phi[\varepsilon_{ij}^p(\tau_1)]$ можно вычислить в момент времени τ_k , вслед за которым ни в одной точке исследуемой области не возникает пластических деформаций.

В качестве примера решения прикладной задачи рассмотрена задача минимизации термических остаточных напряжений в двутавровой балке 60Ш1 (широкополочная балка с расстоянием между полками, равным 60 см) из стали Ст.20. Предполагается, что после окончания прокатки напряжения в балке отсутствуют, распределение температуры по сечению $T_0(x)$ известно из решения задачи теплопроводности при прокатке. Остаточные напряжения найдены из решения задачи термоупругопластичности, соответствующей остыванию балки на хододильнике. Все расчеты сделаны методом конечных элементов. Более подробно решение описано в [4]. В качестве управления использовано принудительное локальное охлаждение внешних поверхностей фланцев. Поиск минимума функционала $\Phi(\tau)$ (8) производился методом деформируемого многогранника.

Заметим, что для профилей, получаемых способом горячей прокатки, характерно, что напряжение вдоль оси профиля значительно больше других компонент тензора напряжения. В этом частном случае оценка (8), как показано в [4], принимает вид равенства. Минимизация функционала $\Phi(\tau)$ на каждом шаге по времени эквивалентна получению деформированного состояния с деформациями $\varepsilon_{ij}^p(\tau) + \varepsilon^T \delta_{ij}$, все более

приближающимися к совместным, при этом уменьшается потенциальная энергия остаточных напряжений.

На фигуре показано изменение коэффициента теплоотдачи α от охлаждающей жидкости к металлу в зависимости от времени τ при оптимальном режиме. Приведено также сравнение оценок уровня внутренних напряжений по их текущим значениям (сплошная кривая 1 — при естественном охлаждении, сплошная кривая 2 — при оп-



тимальном принудительном охлаждении) и по функционалу $\Phi(\tau)$ (8) (штриховые кривые 1 и 2 соответственно). Видно, что оценка (8) для остаточных напряжений соблюдается с большой точностью. Пики кривых при малых значениях τ связаны с фазовыми переходами в профиле.

Решение показало, что максимальные продольные сжимающие напряжения в середине стенки падают от -80 МПа (при естественном охлаждении) до -25 МПа (при оптимальном режиме охлаждения). Максимальные растягивающие напряжения в переходной от стенки к фланцу области падают от значения $+160$ МПа до значения $+80$ МПа.

Общее время решения задачи оптимизации на БЭСМ-6 составило 2,5 ч.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вулик Б. З. Введение в функциональный анализ. М.: Наука, 1967. 415 с.
2. Морен К. Методы гильбертова пространства. М.: Мир, 1965. 572 с.
3. Няшин Ю. И. К вопросу об определении остаточных напряжений. — Изв. АН СССР. Металлы, 1980, № 1, с. 174.
4. Няшин Ю. И., Трусов П. В. Об одном подходе к управлению уровнем остаточных напряжений. Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 3, с. 483.