Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 2, 1981

УДК 539.375

К ЗАДАЧЕ О ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ТРЕЩИНЕ В АНИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

Канаун С. К.

Рассматривается трехмерная задача теории упругости для однородной и анизотропной среды, содержащей изолированную трещину. В результате использования известной аналогии между трещиной и дислокацией Сомилиана задача сводится к решению эллиптического псевдодифференциального уравнения относительно плотности дислокационных моментов, моделирующих трещину. Исследуются свойства оператора, входящего в это уравнение. Получено регулярное представление данного оператора на классе достаточно гладких функций. Обсуждается возможность применения предложенной регуляризации для численного решения задачи. Анализируется структура тензорного коэффициента интенсивности напряжений на гладком контуре произвольной трещины в анизотропной среде.

1. Дислокационная модель трещины. Рассмотрим бесконечную однородную и анизотропную упругую среду, в которой имеется разрез по гладкой ограниченной поверхности Ω (пространственная трещина). Будем считать, что внешнее поле напряжений $\sigma_0(x)$ (деформаций $\varepsilon_0(x)$) реализовано нагрузками, приложенными на бесконечности, а берега трещины свободны от внешних нагрузок ($x(x_1, x_2, x_3)$ — точка среды).

Если при нагружении среды берега трещины не смыкаются, то граничное условие на Ω имеет вид

$$n_\alpha(x)\,\sigma^{\alpha\beta}(x) = 0, \quad x \in \Omega \tag{1.1}$$

где $n(x)$ — нормаль к поверхности Ω, $\sigma(x)$ — тензор напряжений.

В случаях, когда берега трещины контактируют, граничные условия на Ω будут более сложными, зависящими от характера взаимодействия берегов.

Решению данной задачи соответствует вектор перемещений $u(x)$, который представляет собой непрерывную функцию во всем пространстве, за исключением поверхности Ω. При переходе через Ω функция $u(x)$ изменяется скачкообразно, поскольку берега трещины в поле $\sigma_0(x)$ смещаются относительно друг друга. (Для внешних полей, в которых относительное смещение берегов трещины отсутствует, задача имеет тривиальное решение $\sigma(x) = \sigma_0(x)$.)

Заметим также, что при отсутствии массовых сил тензор напряжений $\sigma(x)$ в среде с трещиной в смысле обобщенных функций удовлетворяет уравнению $\operatorname{div}\sigma(x) = 0$ во всем пространстве, включая и поверхность Ω.

Наличие конечного скачка поля перемещений $u(x)$ на Ω, а также указанное свойство тензора напряжений позволяют интерпретировать трещину как индуцированную внешним полем дислокацию Сомилиана [1, 2]. Последняя, как известно, представляет собой разрез в упругой среде, берега которого смещаются на заданный вектор $b(x)$. Образующиеся при этом полости заполняют материалом исходной среды (или убирают лишний материал), осуществляют спайку всех контактирующих поверхностей, а затем «снимают» усилия, которыми смещались берега разреза. В случае трещины вектор $b(x)$ заранее не известен и должен быть выбран таким, чтобы суммарный тензор напряжений (внешних и внутренних) удовлетворял заданным граничным условиям на берегах разреза.

Рассмотрим основные следствия указанной аналогии. Сингулярная плотность дислокационных моментов $m(x)$, которая соответствует дислокации Сомилиана, имеет вид [3]

$$m_{\alpha\beta}(x) = n_\alpha(x) b_\beta(x) \delta(\Omega) \tag{1.2}$$

Здесь $\delta(\Omega)$ — дельта-функция, сосредоточенная на поверхности Ω, $b(x) = u^+(x) - u^-(x)$ — скачок вектора перемещений на Ω, который в случае трещины совпадает с вектором ее раскрытия, знаком плюс обозначено предельное значение вектора u на Ω со стороны нормали, а знаком минус — с противоположной стороны.

Поле напряжений в среде с трещиной можно теперь представить в виде суммы внешнего поля $\sigma_0(x)$ и внутренних напряжений от дислокационных моментов плотности (1.2). Аналогичное представление допускает и тензор деформаций $\varepsilon(x)$. Используя результаты континуальной теории дислокаций [3], имеем

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(x) = \varepsilon_{0\alpha\beta}(x) + \int\limits_\Omega U_{\alpha\beta}^{\lambda\mu}(x - x') n_\mu(x') b_\lambda(x') d\Omega' \tag{1.3}$$

$$\sigma^{\alpha\beta}(x) = \sigma_0^{\alpha\beta}(x) + \int\limits_\Omega S^{\alpha\beta\lambda\mu}(x - x') n_\mu(x') b_\lambda(x') d\Omega' \tag{1.4}$$

Ядро $U(x)$ интегрального оператора в (1.3) выражается через тензор Грина для перемещений $G(x)$ исходной (однородной) среды с тензором модулей упругости $c^{\alpha\beta\lambda\mu}$ по формуле

$$U_{\alpha\beta}^{\lambda\mu}(x) = -[\nabla_\alpha \nabla_\rho G_{\beta\nu} c^{\rho\nu\lambda\mu}]_{(\alpha\beta)} \tag{1.5}$$

где ∇ — оператор градиента в $\mathbf{R}^3$ — трехмерном евклидовом пространстве, круглые скобки означают симметризацию по соответствующим индексам.

В свою очередь, ядро $S(x)$ интегрального оператора в (1.4) выражается через тензор Грина для внутренних напряжений $Z(x)$ исходной среды ($e^{\alpha\beta\lambda}$ — символ Леви-Чивита)

$$S^{\alpha\beta\lambda\mu}(x) = \mathrm{rot}_\nu{}^\lambda \mathrm{rot}_\rho{}^\mu Z^{\alpha\beta\nu\rho}(x), \qquad \mathrm{rot}^{\alpha\beta} = e^{\alpha\lambda\beta}\nabla_\lambda \tag{1.6}$$

Можно показать [3], что тензоры U и S связаны соотношением ($\delta(x)$ — дельта-функция Дирака)

$$S^{\alpha\beta\lambda\mu}(x) = c^{\alpha\beta\nu\rho} U_{\nu\rho}^{\lambda\mu}(x) - c^{\alpha\beta\lambda\mu}\delta(x) \tag{1.7}$$

Заметим, что определенный соотношением (1.3) тензор ε равен сумме упругой $c^{-1}\sigma$ и «пластической» $m_{(\alpha\beta)}$ составляющих, где σ и m имеют вид (1.4) и (1.2) соответственно.

Тензор Грина для перемещений $G(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\nabla_\alpha c^{\alpha\beta\lambda\mu}\nabla_\lambda G_{\mu\nu}(x) = -\delta_\nu{}^\beta\delta(x) \tag{1.8}$$

где $\delta_\beta{}^\alpha$ — символ Кронекера, а тензор Грина для внутренних напряжений $Z(x)$ — системе уравнений в частных производных второго порядка, приведенной в [3]. Явные выражения для $G(x)$ и $Z(x)$ известны лишь в частных случаях симметрии среды [4]. В общем случае $G(x)$ и $Z(x)$ — четные однородные функции степени —1. Из (1.5), (1.6) следует тогда, что $U(x)$ и $S(x)$ — четные однородные обобщенные функции степени —3.

Заметим, что к соотношениям вида (1.3), (1.4) можно придти, представляя решение упругой задачи $u(x)$ в виде суммы векторного потенциала внешнего поля $u_0(x)$ и потенциала двойного слоя с плотностью $b(x)$, сосредоточенной на Ω (см., например, [5]). При этом выражение для $\varepsilon(x)$ будет совпадать с (1.3), а выражение для $\sigma(x)$ — с (1.4), если в качестве ядра $S(x)$ взять первый член в правой части соотношения (1.7). Полученное таким образом поле напряжений будет отличаться от $\sigma(x)$ в форме (1.4) только сингулярным слагаемым — $c^{\alpha\beta\lambda\mu}n_\mu(x)b_\lambda(x)\delta(\Omega)$, сосредоточенным на поверхности трещины Ω.

Указанное различие обусловлено тем, что при выборе решения в форме потенциала двойного слоя трещина моделируется не дислокационными особенностями, а силовыми — некоторым распределением силовых диполей на Ω [6]. При этом соответствующее поле $\sigma(x)$ содержит сингулярную составляющую, сосредоточенную на Ω, и удовлетворяет уравнению

$$\nabla_\alpha\sigma^{\alpha\beta}(x) = \nabla_\alpha q^{\alpha\beta}(x), \quad q^{\alpha\beta}(x) = c^{\alpha\beta\lambda\mu}n_\mu(x)\,b_\lambda(x)\,\delta(\Omega)$$

где $q(x)$ — сингулярная плотность моментов силовых диполей, моделирующих трещину.

Отметим, что тензор $\sigma(x)$ вида (1.4) удовлетворяет уравнению $\operatorname{div}\sigma(x) = 0$ во всем пространстве, что следует из представления (1.6). Если Ω — поверхность Ляпунова, а плотность $b(x)$ — дважды дифференцируема на Ω, то соответствующий напряжениям (1.4) вектор усилий $f^\alpha(x) = n_\beta(x)\,\sigma^{\alpha\beta}(x)$ будет непрерывной ограниченной функцией во всем пространстве, за исключением, быть может, контура Γ — границы Ω [1, 2]. (Здесь под $n(x)$ понимается произвольное гладкое продолжение в $\mathbf{R}^3$ поля нормали, заданного на Ω.)

Запишем теперь уравнение для векторного поля $b(x)$ на Ω. Из соотношения (1.4) и граничного условия (1.1) имеем

$$(T^{\alpha\beta}b_\beta)(x) = \int_\Omega T^{\alpha\beta}(x, x')\,b_\beta(x')\,d\Omega' = n_\beta(x)\,\sigma_0^{\alpha\beta}(x), \quad x \in \Omega \tag{1.9}$$

$$T^{\alpha\beta}(x, x') = -n_\lambda(x)\,S^{\lambda\alpha\beta\mu}(x - x')\,n_\mu(x') \tag{1.10}$$

По векторному полю $b(x)$ напряжения и деформации в среде с трещиной однозначно восстанавливаются из соотношений (1.3), (1.4).

Заметим, что оператор $\mathbf{T}$ в уравнении (1.9) может быть записан в форме интегрального оператора с ядром $T(x, x')$ лишь условно, поскольку соответствующий интеграл формально расходится при $x \in \Omega$ для сколь угодно гладких $b(x)$ ($T(x, x') \sim |x - x'|^{-3}$ при $x' \to x$).

Перейдем к исследованию свойств оператора $\mathbf{T}$ и построению формулы регуляризации интеграла в (1.9).

2. Обобщенная функция $T(x)$. Начнем со случая, когда Ω — плоскость в $\mathbf{R}^3$ с уравнением $x_3 = 0$ (x_1, x_2, x_3 — декартовы координаты в $\mathbf{R}^3$), а $b(x_1, x_2)$ — функция класса $S(\mathbf{R}^2)$ на Ω [7]. При этом $n = \mathrm{const}$ и ядро $T(x, x')$ в (1.9) зависит только от разности аргументов $x - x'$. Следовательно, $\mathbf{T}$ — оператор свертки с обобщенной функцией $T(x)$, действующей на основных функциях из $S(\mathbf{R}^2)$.

Заметим, что функция $T(x) = T(x_1, x_2)$ порождается обобщенной функцией $S(x_1, x_2, x_3)$, определенной соотношением (1.6) (или (1.7)) и действующей на основных функциях в $\mathbf{R}^3$. Из (1.10) имеем

$$T^{\alpha\beta}(x_1, x_2) = -S^{3\alpha\beta3}(x_1, x_2, x_3)\,|_{x_3=0} \tag{2.1}$$

Отсюда следует, что преобразование Фурье функции $T(x_1, x_2)$ имеет вид

$$T^{\alpha\beta}(k_1, k_2) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S^{3\alpha\beta3}(k_1, k_2, k_3)\,dk_3 \tag{2.2}$$

Здесь и ниже фурье-образ функции имеет аргумент k, а ее x-представление — аргумент x.

Из (1.7), (1.5) и (1.8) имеем

$$S^{\alpha\beta\lambda\mu}(k_1, k_2, k_3) = c^{\alpha\beta\nu\rho}k_\rho G_{\nu\tau}(k_1, k_2, k_3)\,k_\sigma c^{\sigma\tau\lambda\mu} - c^{\alpha\beta\lambda\mu} \tag{2.3}$$
$$G(k) = L^{-1}(k),\quad L^{\alpha\beta}(k_1, k_2, k_3) = c^{\alpha\beta\lambda\mu}k_\lambda k_\mu$$

Используя эти соотношения, можно установить, что интеграл в (2.2) сходится абсолютно и определяет четную однородную функцию $T(k)$ первой степени по $k\,(k_1, k_2)$.

Действие обобщенной функции $T(x)$ на любую основную $\varphi(x) \in S(\mathbf{R}^2)$ можно определить теперь соотношением

$$(T, \varphi) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} T(x_1, x_2)\,\varphi(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2 = \tag{2.4}$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} T(k_1, k_2)\,\varphi(k_1, k_2)\,dk_1\,dk_2$$

которое следует из формулы Парсеваля. Последний интеграл абсолютно сходится.

Получим регуляризованное выражение для (T, φ), использующее формальное выражение обобщенной функции $T(x)$ в x-пространстве. Предварительно заметим, что $T(k)$ всегда можно представить в форме

$$T^{\alpha\beta}(k) = -Q^{\alpha\beta\lambda\mu}(k)\,k_\lambda k_\mu,\quad Q^{\alpha\beta\lambda\mu}(k) = -T^{\alpha\beta}(k)k^\lambda k^\mu\,|k|^{-4}, \tag{2.5}$$
$$\lambda, \mu = 1, 2$$

где $k = k(k_1, k_2)$, а $Q(k)$ — четная однородная функция степени -1. Следовательно, существует $Q(x)$ — четная однородная функция степени -1. Эта функция интегрируема в нуле и в силу (2.5) связана с $T(x)$

соотношением

(2.6) $$T^{\alpha\beta}(x_1, x_2) = \nabla_\lambda \nabla_\mu Q^{\alpha\beta\lambda\mu}(x_1, x_2), \quad \lambda, \mu = 1, 2$$

Воспользуемся схемой, которая предложена [8] для построения регуляризации обобщенных функций типа производных от однородных регулярных функционалов. Пусть ω — область в $\mathbf{R}^2$ с гладкой границей γ, для которой точка $x = 0$, где функция $T(x)$ неинтегрируема, является внутренней, а $\overline{\omega}$ — дополнение ω до всего пространства.

По определению производной от обобщенной функции имеем для любой основной $\varphi(x)$ (индексы для простоты опущены)

$$(\nabla\nabla Q, \varphi) = -(\nabla Q, \nabla\varphi) = -\int_{\overline{\omega}} \nabla Q(x)\nabla\varphi(x)\,dx -$$
$$-\int_{\omega} \nabla Q(x)[\nabla\varphi(x) - \nabla\varphi(0)]\,dx - \oint_{\gamma} Q(x)\nu(x)\,d\gamma\nabla\varphi(0)$$

Здесь учтено, что $\nabla Q(x)$ — однородная функция степени -2 в $\mathbf{R}^2$, и для ее регуляризации использовано представление, приведенное в [8], $\nu(x)$ — внешняя нормаль к контуру γ, ∇ — градиент в $\mathbf{R}^2$.

Перебрасывая теперь производную в первом интеграле на ∇Q, получим, учитывая (2.6)

$$(T, \varphi) = \int_{\overline{\omega}} T(x)[\varphi(x) - \varphi(0)]\,dx - \int_{\omega} \nabla Q(x)[\nabla\varphi(x) - \nabla\varphi(0)]\,dx +$$
$$+\oint_{\gamma} \nabla Q(x)[\varphi(x) - \varphi(0)]\,\nu(x)\,d\gamma - \oint_{\gamma} Q(x)\nu(x)\,d\gamma\nabla\varphi(0)$$

Пусть ω — круговая область радиуса ρ. Если $\rho \to 0$, то второй интеграл в этом соотношении исчезает, так как $Q(x) \sim |x|^{-1}$, контурные интегралы по γ обращаются в нуль в силу четности $Q(x)$, а первый интеграл стремится к интегралу в смысле главного значения по Коши и существует в силу определенности (T, φ). Таким образом регуляризация обобщенной функции $T(x)$ принимает вид

(2.7) $$(T, \varphi) = ⨍ T(x)[\varphi(x) - \varphi(0)]dx$$

где черточка означает интеграл в смысле главного значения по Коши, интегрирование здесь проводится по всей плоскости $\mathbf{R}^2$.

Заметим, что изложенная схема обобщается на случай пространства любой размерности $n \geqslant 1$ и регуляризация (2.7) имеет место для всякой однородной обобщенной функции в $\mathbf{R}^n$, фурье-образ которой — четная однородная функция степени 1.

3. Регулярное представление оператора $\mathbf{T}$ на функциях из $C^\infty(\Omega)$.

Пусть по-прежнему Ω — плоскость $x_3 = 0$. Оператор свертки с обобщенной функцией $T(x)$, фигурирующий в уравнении (1.9), на функциях из $S(\mathbf{R}^2)$ можно определить формулой

(3.1) $$(\mathbf{T}b)(x_1, x_2) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int\!\!\int_{-\infty}^{\infty} T(k_1, k_2)\, b(k_1, k_2)\exp[-i(k_1x_1 + k_2x_2)]\,dk_1\,dk_2$$

Здесь $T(k_1, k_2)$ имеет вид (2.2), при этом интеграл является абсолютно сходящимся ($b \in S(\mathbf{R}^2)$).

Представление (3.1) показывает, что $\mathbf{T}$ — псевдодифференциальный оператор с символом $T(k_1, k_2)$ [7].

Другую формулу регулярного представления оператора $\mathbf{T}$ на функциях из $S(\mathbf{R}^2)$ получим используя соотношение (2.7)

$$(Tb)(x) = \oint T(x - x')[b(x') - b(x)]dx' \tag{3.2}$$

Здесь интеграл вычисляется по всей плоскости Ω, для его существования при любых $x \in \Omega$ достаточно непрерывной дифференцируемости и ограниченности $b(x)$ на Ω.

Перейдем к случаю, когда Ω — гладкая односвязная поверхность в $\mathbf{R}^3$, ограниченная контуром Γ, а $b(x) \in C^\infty(\Omega)$. Отметим, что трехмерный фурье-образ функции $S(x)$, которая порождает ядро $T(x, x')$ оператора $\mathbf{T}$, имеет вид (2.2) и представляет собой однородную функцию нулевой степени по k. Псевдодифференциальный оператор с символом $S(k)$ допускает следующее регулярное представление на функциях из $S(\mathbf{R}^3)$ (D — известная постоянная) [7]:

$$(S\psi)(x) = \int S(x - x')\psi(x')dx' = \oint S(x - x')\psi(x')dx' + D\psi(x), \quad \psi(x) \in S(\mathbf{R}^3) \tag{3.3}$$

Пусть $h_i(x)$ — последовательность функций из $S(\mathbf{R}^3)$, при $i \to \infty$ сходящаяся к $\delta(\Omega)$. Доопределим $n(x)$ и $b(x)$, заданные на Ω, во всем пространстве $\mathbf{R}^3$ с помощью произвольного гладкого продолжения. Тогда действие оператора $\mathbf{T}$ на любую $b(x) \in C^\infty(\Omega)$ можно определить формулой

$$(\mathbf{T}b)(x) = -\lim_{i\to\infty} n(x) \int S(x - x')n(x')b(x')h_i(x')dx', \quad x \in \Omega \tag{3.4}$$

где интеграл по $\mathbf{R}^3$ понимается в смысле регуляризации (3.3).

Далее, учитывая выражение (1.6) для $S(x)$ и теорему Стокса, имеем равенство

$$\int_\Omega S^{\alpha\beta\lambda\mu}(x - x')\, n_\mu(x')\, d\Omega' = \oint_\Gamma \mathrm{rot}_\nu{}^\lambda Z^{\alpha\beta\nu\mu}(x - x')\, d\Gamma_\mu' \tag{3.5}$$

где $d\Gamma_\mu$ — векторный элемент длины на контуре Γ, ориентация которого согласована по обычному правилу с ориентацией Ω.

Используя (3.4), (3.5), представим $(\mathbf{T}b)(x)$ в форме

$$(\mathbf{T}b)(x) = -\lim_{i\to\infty} n(x) \int S(x - x')\, n(x')\,[b(x') - b(x)]\, h_i(x')\, dx' + n(x) \oint \Pi(x - x')\, d\Gamma' b(x), \quad x \in \Omega$$

$$\Pi^{\alpha\beta\lambda\mu}(x) = -\mathrm{rot}_\nu{}^\lambda Z^{\alpha\beta\nu\mu}(x)$$

Учитывая регуляризацию (3.3) и переходя к пределу при $i \to \infty$, получим окончательную формулу представления оператора $\mathbf{T}$ на функциях из $C^\infty(\Omega)$

$$(T^{\alpha\beta} b_\beta)(x) = \oint_\Omega T^{\alpha\beta}(x, x')\,[b_\beta(x') - b_\beta(x)]\, d\Omega' + n_\nu(x) \oint_\Gamma \Pi^{\nu\alpha\beta\lambda}(x - x')\, d\Gamma_\beta' b_\lambda(x), \quad x \in \Omega \tag{3.6}$$

Здесь первый интеграл по Ω понимается в смысле главного значения по Коши и существует в силу существования интеграла в (3.2).

Заметим, что для существования интегралов в (3.6) достаточно, чтобы функция $b(x)$ была непрерывно дифференцируема на Ω и обращалась в нуль на Γ.

По непрерывности оператор $\mathbf{T}$ продолжается до неограниченного оператора из $H_s(\Omega)$ в $H_{s-1}(\Omega)$ и является обобщенным псевдодифференциальным оператором с главным однородным символом — однородной функцией степени единица.

Уравнение

$$(\mathbf{T}b)(x) = f(x), \quad x \in \Omega \tag{3.7}$$

при $f \in H_{\delta-1/2}(\Omega)$ имеет единственное решение $b \in \overset{\circ}{H}_{\delta+1/2}(\Omega)$, где $|\delta| < 1/2$ — любое. (Определение функциональных пространств Соболева — Слободецкого $H_s(\Omega)$ и $H_s^\circ(\Omega)$ см. в [7].) Соответствующая теорема доказана в [7].

Для бесконечно дифференцируемой на Ω функции $f(x)$ асимптотика решения уравнения (3.7) вблизи гладкой границы — контура Γ — имеет вид [7]

$$b(x) = \beta(x_0)\sqrt{r} + O(r^{3/2}) \tag{3.8}$$

где r — расстояние от точки $x \in \Omega$ до $x_0 \in \Gamma$ по нормали к Γ, $\beta(x_0)$ — бесконечно дифференцируемая вдоль Γ функция.

Рассмотрим теперь $\mathbf{T}$ как оператор в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega) \equiv H_0(\Omega)$. Областью определения $\mathbf{T}$ будем считать функции из плотного в $L_2(\Omega)$ пространства $C_0^\infty(\Omega)$ финитных, бесконечно дифференцируемых на Ω функций, носитель которых сосредоточен во внутренних подобластях Ω. Можно показать, что $\mathbf{T}$ — положительный оператор.

Пусть $u_1(x)$ — вектор перемещений, а $\sigma_1(x)$ — тензор внутренних напряжений в среде с распределенными на поверхности Ω дислокационными моментами плотности $n_\alpha(x)b_\beta(x)$ ($n \in C^\infty(\Omega)$, $b \in C_0^\infty(\Omega)$). Из (1.4), (1.10) следует, что $(\mathrm{T}b)(x)$ — значение на Ω вектора $-n_\alpha(x)\sigma_1^{\alpha\beta}(x)$.

Обозначим через Ω_+ положительную, а через Ω_- отрицательную стороны поверхности Ω, выбор которых определяется ориентацией нормали n. Рассмотрим интеграл

$$I(b) = \int_\Omega (T^{\alpha\beta}b_\beta)\, b_\alpha\, d\Omega = -\int_{\Omega_+} n_\alpha^+(x)\,\sigma_1^{\alpha\beta}(x)\,u_{1\beta}^+(x)\,d\Omega -$$
$$-\int_{\Omega_-} n_\alpha^-(x)\,\sigma_1^{\alpha\beta}(x)\,u_{1\beta}^-(x)\,d\Omega; \quad n^+ = n,\ n^- = -n$$

где учтено, что $b(x) = u_1^+(x) - u_1^-(x)$.

Применим к правой части формулу Остроградского. Учитывая, что $\operatorname{div}\sigma_1(x) = 0$, получаем

$$I(b) = \int_{R^3\setminus\Omega} \nabla_\alpha[\sigma_1^{\alpha\beta}(x)\,u_{1\beta}(x)]\,dx = \tag{3.9}$$
$$= \int_{R^3\setminus\Omega} \varepsilon_{1\alpha\beta}(x)\,c^{\alpha\beta\lambda\mu}\varepsilon_{1\lambda\mu}(x)\,dx \geqslant 0; \quad \varepsilon_{1\alpha\beta}(x) = \nabla_{(\alpha}u_{1\beta)}(x)$$

Здесь использовано равенство $\sigma_1^{\alpha\beta} = c^{\alpha\beta\lambda\mu}\varepsilon_{1\lambda\mu}$, справедливое вне Ω, интеграл по $R^3\diagdown\Omega$ сходится, так как $\varepsilon_1(x) \sim |x|^{-3}$ на бесконечности и при $b \in C_0^\infty(\Omega)$ поле $\varepsilon_1(x)$ ограничено в окрестности Ω.

Последнее неравенство в (3.9) — следствие положительной определенности тензора $c^{\alpha\beta\lambda\mu}$.

Таким образом, $I(b) = (Tb, b) \geqslant 0$, причем равенство достигается только при $b = 0$. Следовательно, T — положительный оператор, который к тому же симметричен, что можно проверить используя (1.10).

Полученное свойство оператора T позволяет утверждать, что решение уравнения (3.7) доставляет минимум функционалу

$$F(b) = \int_\Omega (T^{\alpha\beta}b_\beta)\, b_\alpha\, d\Omega - 2\int_\Omega f^\alpha b_\alpha\, d\Omega$$

и, следовательно, для приближенного вычисления $b(x)$ можно использовать прямые вариационные методы [9].

Замечание о численном решении уравнения (3.7). Если явное выражение функции $T(x, x')$ известно, то для решения уравнения (3.7) можно воспользоваться схемой, рассматриваемой, например, в [5]. Разобьем поверхность Ω на N подобластей Ω_i. Функцию $b(x)$ внутри каждой подобласти Ω_i аппроксимируем линейной комбинацией стандартных функций с неизвестными коэффициентами. Подставляя $b(x)$ в такой форме в (3.7), получим систему линейных уравнений относительно постоянных коэффициентов аппроксимации.

В частности, если $b(x) = \text{const}$ при $x \in \Omega_i$, то система для определения векторов b^i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ — значений $b(x)$ внутри Ω_i — примет вид

$$\sum_{j=1}^{N} T_{ij}^{\alpha\beta} b_\beta^{\,j} = f_i^\alpha \tag{3.10}$$

где $f_i = f(x_i)$ — значение правой части (3.7) в узловой (внутренней) точке x_i области Ω_i, тензоры T_{ij} определяются соотношением

$$T_{ij} = \int_{\Omega_j} T(x_i, x')\, d\Omega'$$

При $i \neq j$ подынтегральная функция не имеет особенностей в Ω_j и этот интеграл может быть вычислен любым приближенным методом.

Если $i = j$, то предыдущая формула теряет смысл и для вычисления элементов T_{ii} следует воспользоваться регуляризацией (3.6). Поскольку $b = \text{const}$ в Ω_j, первое слагаемое справа в (3.6) исчезает и

$$T_{ii}^{\alpha\beta} = -\oint_{\Gamma_i} n_\lambda(x_i)\, \mathrm{rot}_\mu{}^\beta Z^{\lambda\alpha\mu\nu}(x_i - x')\, d\Gamma_\nu'$$

где Γ_i — граничный контур области Ω_i, $x_i \overline{\in} \Gamma_i$.

Если контур Γ_i целиком лежит в одной плоскости ω_i, то вместо регуляризации (3.6) можно использовать соотношение (3.2). Тогда T_{ii} представляется в форме абсолютно сходящегося интеграла

$$T_{ii} = -\int_{\overline{\omega}_i} T(x_i, x')\, d\Omega'$$

где $\overline{\omega}_i$ — часть плоскости ω_i вне конутра Γ_i.

Приведенные здесь формулы существенно облегчают реализацию рассматриваемого метода решения. Трудоемкие схемы вычисления элементов T_{ii} предлагались в [5, 10, 11], там же даны примеры решения системы (3.10).

4. Тензорный коэффициент интенсивности напряжений на контуре трещины. Рассмотрим асимптотику поля напряжений $\sigma(x)$ вне трещины в окрестности ее кромки Г. Пусть y_1, y_2, y_3 — локальные декартовы координаты в точке $x_0 \in \Gamma$, причем ось y_3 направлена по предельной нормали к Ω в точке x_0, ось y_2 — по касательной к Г, тогда ось y_1 лежит в касательной к Ω плоскости в точке x_0. Учитывая асимптотику (3.8), имеем асимптотику вектора b в окрестности x_0

$$b(y) = \beta(x_0)\sqrt{y_1} + O(y_1^{3/2})$$

Используя (1.4), запишем выражение для σ в точке $z = (-r\cos\theta, 0, -r\sin\theta)$, где r — расстояние от точки z до начала координат системы y_i, θ — полярный угол в плоскости (y_1, y_3)

$$\sigma(z) = \sigma_0(z) + \frac{1}{\sqrt{r}} \int\limits_{\Omega(r)} S(\cos\theta + \xi_1, \xi_2, \sin\theta + \xi_3) \times \tag{4.1}$$

$$\times\, n(r\xi)\beta(x_0)\sqrt{\xi_1}\, d\Omega_\xi + O(\sqrt{r}), \quad \xi_i = r^{-1}y_i$$

Здесь учтено, что $S(x)$ — однородная, степени -3, четная функция. Можно показать, что при $r \to 0$ интеграл стремится к конечному пределу и, следовательно, напряжения имеют особенность $r^{-1/2}$.

Рассмотрим представляющую интерес для приложений тензорную функцию $J(\theta, x_0)$ (тензорный коэффициент интенсивности напряжений), которую определим соотношением

$$J(\theta, x_0) = \lim \sqrt{r}\sigma(z), \quad r \to 0$$

Из (4.1) следует, что

$$\sigma(z) = \frac{1}{\sqrt{r}} J(\theta, x_0) + O(1)$$

а компоненты тензора J имеют вид

$$J^{\alpha\beta}(\theta, x_0) = s^{\alpha\beta\lambda\mu}(\theta)\, n_\lambda(x_0)\, \beta_\mu(x_0) \tag{4.2}$$

$$s(\theta) = \int\limits_0^\infty \sqrt{\xi_1}\, d\xi_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} S(\cos\theta + \xi_1, \xi_2, \sin\theta)\, d\xi_2 \tag{4.3}$$

где $n(x_0)$ — предельное значение нормали к Ω в точке $x_0 \in \Gamma$.

Отсюда видно, что функция $J(\theta, x_0)$ представима в виде двух сомножителей, из которых первый $s(\theta)n(x_0)$ не зависит от формы поверхности Ω и приложенного к среде внешнего поля и определяется локальной ориентацией осей y_1, y_2, y_3 в точке $x_0 \in \Gamma$.

Второй сомножитель, вектор $\beta(x_0)$, есть функционал всей поверхности Ω и внешнего поля $\sigma_0(x)$.

Функция $J(\theta, x_0)$ допускает наглядную интерпретацию, если учесть, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} S(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\, d\xi_2$$

по существу есть аналог тензора $S(x)$ в плоской задаче о деформации и сложном сдвиге (в безразмерных координатах ξ_i) однородной среды с модулями $c^{\alpha\beta\lambda\mu}$, причем нормаль к плоскости деформирования (ξ_1, ξ_3)

направлена вдоль оси ξ_2. При этом тензор $J(\theta, x_0)$ совпадает с тензором напряжений в точке $\xi_1 = -\cos\theta$, $\xi_3 = -\sin\theta$, когда вдоль положительной полуоси ξ_1 задан скачок вектора перемещений, изменяющийся по закону $\beta(x_0)\sqrt{\xi_1}$.

Заметим, что тензор $S(x)$ для плоского случая выражается через функцию Грина $G(x)$ плоской задачи по формулам, аналогичным (1.5), (1.7).

В плоском случае явное выражение функции $G(x)$ известно при произвольной анизотропии тензора упругих постоянных, поэтому построение тензора $s(\theta)$ вида (4.3) сводится к вычислению стандартных интегралов и его выражение также может быть найдено в явном виде.

Тензор J можно представить в виде суммы трех тензоров, соответствующих трем составляющим вектора $\beta(x_0)$ в осях y_1, y_2, y_3

$$J = J_1 + J_2 + J_3; \quad J_i^{\alpha\beta}(\theta, x_0) = s^{\alpha\beta\lambda i}(\theta) n_\lambda(x_0)\beta_i(x_0) \tag{4.4}$$

(не суммировать по i!).

Тензоры $s^{\alpha\beta\lambda 1}(\theta)$ и $s^{\alpha\beta\lambda 3}(\theta)$ находятся из решения соответствующей плоской задачи, а $s^{\alpha\beta\lambda 2}(\theta)$ — из решения антиплоской задачи (сложный сдвиг).

Отметим, что в теории упругости и в механике разрушения асимптотику поля напряжений в окрестности кромки трещины обычно характеризуют коэффициентами интенсивности напряжений K_{I}, K_{II}, K_{III} (см., например, [12]). Используя определение этих коэффициентов, можно показать, что их связь с компонентами тензоров $J_i(\theta, x_0)$ дается соотношениями

$$K_{\mathrm{I}}(x_0) = \sqrt{2\pi} J_3^{33}(0, x_0), \quad K_{\mathrm{II}}(x_0) = \sqrt{2\pi} J_1^{13}(0, x_0), \quad K_{\mathrm{III}}(x_0) = \sqrt{2\pi} J_2^{23}(0, x_0)$$

Отсюда и из (4.4) следует, что с точностью до постоянных множителей, зависящих от упругих постоянных, коэффициенты интенсивности напряжений совпадают с компонентами вектора $\beta(x_0)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Эшелби Дж.* Континуальная теория дислокаций. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 247 с.
2. *Билби Б., Эшелби Дж.* Дислокации и теория разрушения.— В кн.: Разрушение. Т. 1. М.: Мир, 1973. 112. с.
3. *Кунин И. А.* Теория дислокаций. Дополнение к кн. Схоутена А. Я. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука, 1965. 373. с.
4. *Лифшиц И. М., Розенцвейг Л. Н.* О построении тензора Грина для основного уравнения теории упругости в случае неограниченной упругоанизотропной среды.— ЖЭТФ, 1947, т. 17, в. 9, с. 783.
5. *Партон В. З., Перлин П. И.* Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 311 с.
6. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
7. *Эскин Г. И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973. 232 с.
8. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959. 440 с.
9. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
10. *Зиновьев Б. М.* Один приближенный метод расчета тел с разрезами.— Тр. Новосибирск. ин-та инж. ж.-д. трансп. Новосибирск, 1972, вып. 137, с. 105.
11. *Nisitani H., Murekami Y.* Stress intensity factors of semi-elliptical crack and elliptical crack.— Trans. Japan. Soc. Mech. Eng., 1974, v. 40. No. 329.
12. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.

Ленинград

Поступила в редакцию 9.X.1980