

УДК 539.375

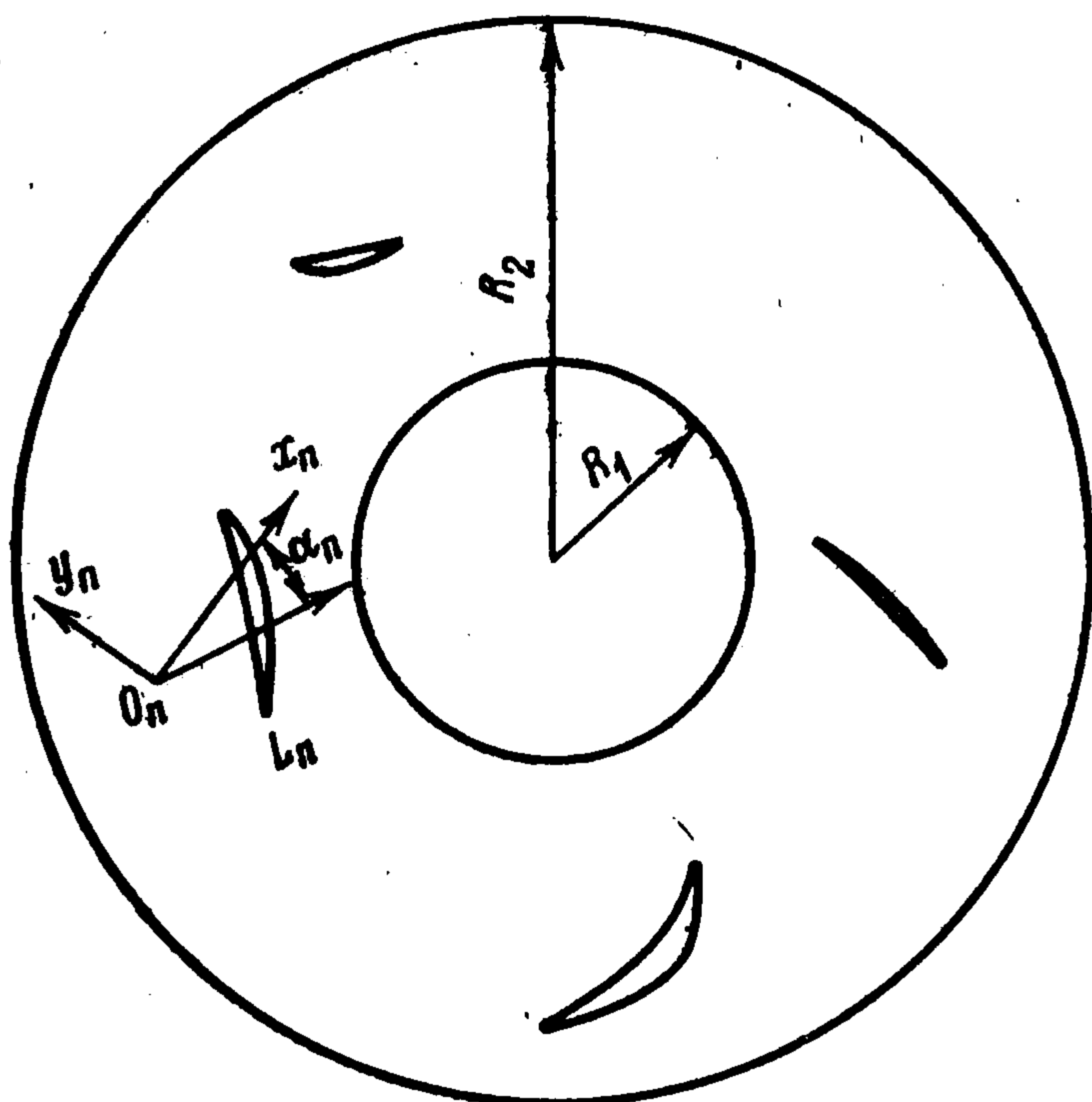
## НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ПЛОСКОМ КРУГОВОМ КОЛЬЦЕ, ОСЛАБЛЕННОМ СИСТЕМОЙ КРИВОЛИНЕЙНЫХ РАЗРЕЗОВ

Борщук Е. М., Панасюк В. В., Саврук М. П.

Рассматривается плоская задача теории упругости для кругового кольца, ослабленного системой гладких криволинейных разрезов, при действии произвольной самоуравновешенной нагрузки на их берегах. При использовании интегрального представления комплексных потенциалов напряжений через разрывы смещений на контурах разрезов в бесконечной плоскости и решения первой основной задачи для сплошного кругового кольца задача сведена к решению системы сингулярных уравнений. В качестве примера исследуется предельно равновесное состояние кольца с внутренней радиальной трещиной при действии постоянного давления на берегах трещины или на внутренней границе кольца.

Упругое равновесие кругового кольца, ослабленного прямолинейными трещинами, для некоторых частных случаев их расположения изучалось в работах [1—5]. Определялись также [6] напряжения в кольце с дугообразной трещиной, размещенной на концентрической окружности.

1. Пусть область  $S$ , занятая кольцом, ограничена двумя концентрическими окружностями  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  радиусов  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ) с центрами в



Фиг. 1

начале декартовой системы координат  $xOy$ . Разрезы расположены вдоль контуров  $L_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ), отнесенных к локальным системам координат  $x_n O_n y_n$ , начала  $O_n$  которых в основной системе координат определяются комплексными координатами  $z_n^0 = x_n^0 + iy_n^0$ , а оси  $O_n x_n$  образуют углы  $\alpha_n$  с осью  $Ox$  (фиг. 1).

Будем считать, что напряжения на контурах  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  отсутствуют, а на берегах разрезов действуют самоуравновешенные усилия

$$(1.1) \quad N_n^\pm + iT_n^\pm = p_n(t_n)$$

$$z_n = x_n + iy_n, \quad t_n = z_n \in L_n, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

Комплексные потенциалы  $\Phi_1(z)$  и  $\Psi_1(z)$ , определяющие напряженное состояние бесконечной плоскости, вызванное разрывами смещений  $g_k(z_k)$

на контурах  $L_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ), имеют вид [7]

$$(1.2) \quad \Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N e^{i\alpha_k} \int_{L_k} \frac{g_k'(t) dt}{T_k - z}$$

$$T_k = te^{i\alpha_k} + z_k^0, \quad z = x + iy$$

$$\Psi_1(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \int_{L_k} \left[ \frac{\overline{g_k'(t)} \overline{dt}}{T_k - z} e^{-i\alpha_k} - \frac{T_k g_k'(t) dt}{(T_k - z)^2} e^{i\alpha_k} \right]$$

Предположим, что все  $N$  разрезов в бесконечной плоскости расположены в области  $S$ . Используя формулу [8]

$$\sigma_r - i\tau_{r\theta} = \Phi_1(z) + \overline{\Phi_1(z)} - e^{2i\theta} [z\Phi_1(z) + \Psi_1(z)]$$

и функции (1.2), находим комбинацию напряжений  $\sigma_r^j - i\tau_{r\theta}^j$ , вызванных в бесконечной пластине на окружностях  $\Gamma_1$  ( $j = 1$ ) и  $\Gamma_2$  ( $j = 2$ ) разрывами смещений  $g_k(z_k)$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ )

$$(1.3) \quad \sigma_r^j - i\tau_{r\theta}^j = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \int_{L_k} [F_{1k}^j(t, \sigma) g_k'(t) dt + F_{2k}^j(t, \sigma) \overline{g_k'(t)} \overline{dt}]$$

$$F_{1k}^j(t, \sigma) = e^{i\alpha_k} \left[ \frac{1}{T_k - R_j \sigma} - \frac{\sigma^2 (R_j \overline{\sigma} - \overline{T_k})}{(T_k - R_j \sigma)^2} \right]$$

$$F_{2k}^j(t, \sigma) = e^{-i\alpha_k} \left[ \frac{1}{\overline{T_k} - R_j \overline{\sigma}} - \frac{\sigma^2}{T_k - R_j \sigma} \right], \quad \sigma = e^{i\theta}, \quad j = 1, 2$$

Решив вспомогательную задачу для кругового кольца, когда на его границе действуют усилия, равные по величине и обратные по направлению напряжениям (1.3), определим комплексные потенциалы [8]

$$\Phi_2(z) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_s z^s, \quad \Psi_2(z) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} b_s z^s$$

Коэффициенты  $a_s, b_s$  можно записать в виде

$$a_s = \frac{1}{2\pi d^s} \sum_{k=1}^N \int_{L_k} \{a_{sk}^1(t) g_k'(t) dt + a_{sk}^2(t) \overline{g_k'(t)} \overline{dt}\}$$

$$b_s = \frac{1}{2\pi d^s} \sum_{k=1}^N \int_{L_k} \{b_{sk}^1(t) g_k'(t) dt + b_{sk}^2(t) \overline{g_k'(t)} \overline{dt}\},$$

$$s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$a_{0k}^j(t) = \frac{1}{2(1-m^2)} \{B_{0kj}^2(t) - m^2 B_{0kj}^1(t)\}$$

$$a_{1k}^j(t) = \frac{1}{d\varepsilon_2(1-m^4)} \{\overline{B_{1kv}^2(t)} - m^3 \overline{B_{1kj}^1(t)}\}, \quad a_{-1k}^j(t) = 0$$

$$a_{sk}^j(t) = d^{-s} \{\beta_{1s} B_{skj}^1(t) + \beta_{2s} B_{skj}^2(t) + \beta_{3s} \overline{B_{-skv}^1(t)} + \beta_{4s} \overline{B_{-skv}^2(t)}\};$$

$$s = \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$b_{sk}^j(t) = \varepsilon_1^{-2(s+1)} a_{-(s+2)k}^v(t) - (1+s) \varepsilon_1^2 a_{(s+2)k}^j(t) - \varepsilon_1^{-s} B_{(s+2)kv}^1(t)$$

$$s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad j, v = 1, 2, \quad j \neq v$$

$$B_{skv}^j(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_{vk}^j(t, \sigma) e^{-is\theta} d\theta; \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$j, v = 1, 2$$

$$\beta_s^1 = -m^{2-s}\beta_s^2, \quad \beta_s^2 = \frac{(1+s)(1-m^2)}{\beta_0}, \quad \beta_s^3 = m^{2+s}\beta_s^4$$

$$\beta_s^4 = -\frac{1-m^{-2s+2}}{\beta_0}, \quad \beta_0 = [(1-s^2)(1-m^2)^2 - (1-m^{2s+2})(1-m^{-2s-2})] \varepsilon_2^s$$

$$\varepsilon_1 = \frac{R_1}{d}, \quad \varepsilon_2 = \frac{R_2}{d}, \quad m = \frac{R_1}{R_2}, \quad d = R_2 - R_1$$

Комплексные потенциалы  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$ , описывающие напряженное состояние кругового кольца со свободной границей и заданными на контурах  $L_k$  разрывами смещений  $g_k(z_k)$ , можно представить в виде

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \quad \Psi(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z)$$

Удовлетворяя с их помощью граничные условия (1.1), получим систему  $N$  сингулярных интегральных уравнений относительно функций  $g_k'(z_k)$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ )

$$(1.4) \quad \sum_{k=1}^N \int_{L_k} [K_{nk}(t, t') g_k'(t) dt + M_{nk}(t, t') \overline{g_k'(t)} \overline{dt}] = \pi p_n(t_n')$$

$$t_n' \in L_n, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

$$K_{nk}(t, t') = \frac{e^{i\alpha_k}}{2} \left[ \frac{1}{T_k - T_n'} + \frac{e^{-2i\alpha_n} \frac{dt_n'}{dt_n'}}{\overline{T_k - T_n'}} \right] + \frac{1}{2} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left[ a_{sk}^1(t) T_n'^s + \overline{a_{sk}^2(t) \overline{T_n}'^s} + e^{-2i\alpha_n \frac{dt_n'}{dt_n'}} \left\{ s a_{sk}^2(t) T_n' \overline{T_n}'^{s-1} + \overline{b_{sk}^2(t) \overline{T_n}'^s} \right\} \right]$$

$$M_{nk}(t, t') = \frac{e^{-i\alpha_k}}{2} \left[ \frac{1}{\overline{T_k - T_n'}} - \frac{(T_k - T_n') e^{-2i\alpha_n} \frac{dt_n'}{dt_n'}}{(\overline{T_k - T_n'})^2} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left[ a_{sk}^1(t) \overline{T_n}'^s + a_{sk}^2(t) T_n'^s + e^{-2i\alpha_n \frac{dt_n'}{dt_n'}} \left\{ s a_{sk}^1(t) T_n' \overline{T_n}'^{s-1} + \overline{b_{sk}^1(t) \overline{T_n}'^s} \right\} \right], \quad T_n' = t' e^{i\alpha_n} + z_n^0.$$

Решение системы (1.4) в случае внутренних трещин  $L_n$  должно удовлетворять условиям

$$\int_{L_n} g_n'(t) dt = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

которые обеспечивают однозначность смещений при обходе контуров  $L_n$ .

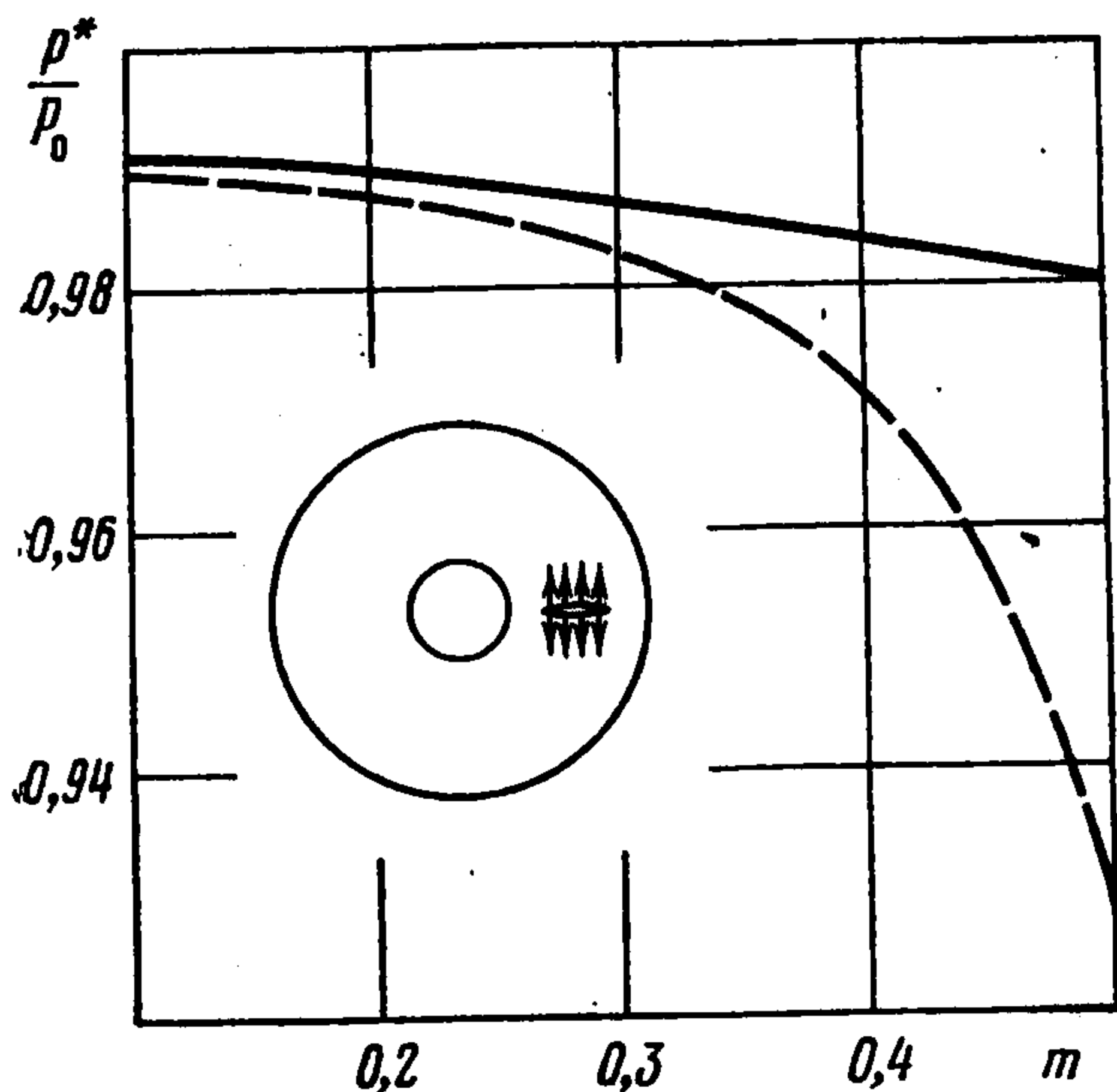
Таким образом, задача об определении напряженно-деформированного состояния кругового кольца, ослабленного системой криволинейных трещин, сведена к решению сингулярных интегральных уравнений.

2. В качестве примера рассмотрим предельно равновесное состояние кругового кольца, ослабленного прямолинейной трещиной длины  $2l$ , расположенной на оси  $Ox$ . Будем считать, что центр трещины расположен на расстоянии  $h$  от внутренней границы

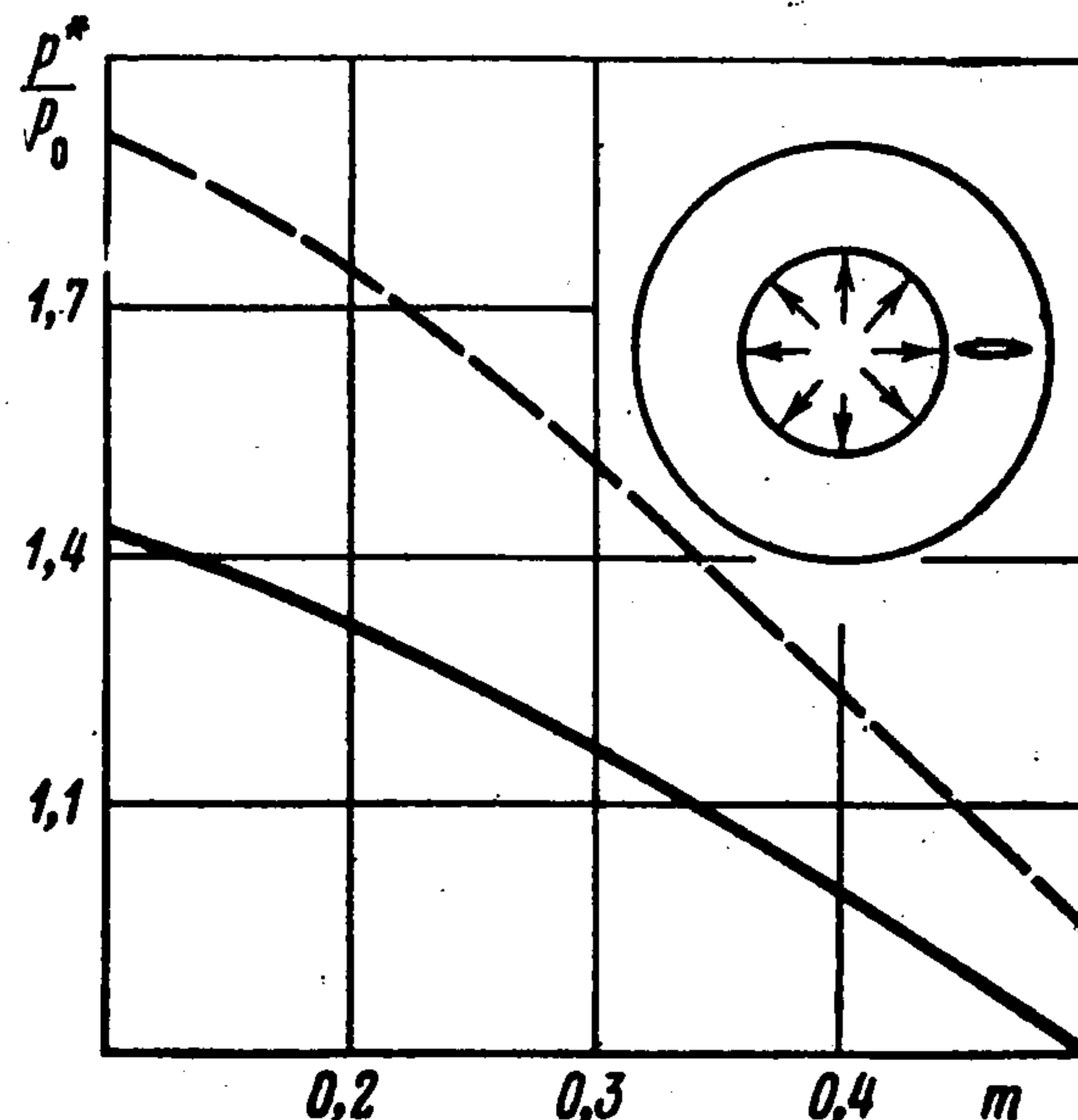
кольца. Тогда в формулах (1.4) следует положить

$$n = k = 1, \quad \alpha_1 = 0, \quad \frac{dt_1}{dt_1} = 1, \quad z_1^0 = R_1 + h$$

и для определения функции  $g_1'(x_1)$  необходимо решить одно сингулярное интегральное уравнение. Численное решение интегрального уравнения получим методом механических квадратур с использованием квадратурных формул Гаусса — Чебышева [9].



Фиг. 2



Фиг. 3

По известной функции  $g_1(t_1)$  определяем коэффициенты интенсивности напряжений у вершин трещин

$$k_1^\pm - ik_2^\pm = \lim_{t_1 \rightarrow l^\pm} \sqrt{2|t_1 - l^\pm|} g_1'(t_1)$$

Здесь нижние знаки относятся к началу трещины  $t_1 = l^-$ , а верхние — к концу  $t_1 = l^+$ .

На фиг. 2 представлены графики зависимости величины критического давления  $p^*$ , приложенного к берегам трещины, отнесенной к  $p_0$  ( $p_0$  — критическое значение давления, действующего на трещине в бесконечной плоскости [10]), от величины  $m$  при  $\lambda = 0,6$ ,  $\epsilon_1 = 3$ . Сплошная линия относится к левой вершине трещины, штриховая — к правой. Анализ графиков показывает, что при данном расположении трещины величина  $p^*$  для левой вершины мало зависит от изменения параметра  $m$ , тогда как для правой вершины с увеличением  $m$  при  $m > 0,4$  величина  $p^*$  падает.

При  $m < 0,2$  величина  $p^*$  для кругового кольца практически равна соответствующей величине для бесконечной плоскости, ослабленной круговым отверстием и трещиной [9].

При действии нормального давления на внутренней границе кольца функция  $p(t_1)$ , равная по величине и противоположная по знаку нормальным напряжениям, возникающим на линии трещины в сплошном кольце, имеет вид [8]

$$p(t_1) = -p \left[ \frac{m^2}{1-m^2} - \frac{R_1^2}{1-m^2} \frac{1}{t_1^2} \right]$$

На фиг. 3 для последнего случая нагрузки показана зависимость величины  $p^*/p_0$  от параметра  $m$  при  $\epsilon = 3$ ,  $\lambda = 0,6$ . Как видно из графиков, с ростом  $m$  величина  $p^*$  уменьшается как для правой, так и для левой вершины трещины. На всем интервале изменения  $m$  трещина начинает распространяться с левой вершины.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Баблоян А. А., Гулканян Н. О. Плоская задача для кругового кольца с радиальными трещинами. — Изв. АН АрмССР. Механика, 1969, т. 22, № 3.
2. Сирунян В. Х. Две задачи теории трещин в областях с круговыми границами. — Изв. АН АрмССР. Механика, 1971, т. 24, № 4.
3. Bowie O. L., Freese C. E. Elastic analysis for a radial crack in circular ring. — Engng Fract. Mech., 1972, v. 4, No. 2.
4. Murakami Y., Nisitani H. The stress intensity factor for the cracked hollow spin disk. — Trans. Japan. Soc. Mech. Engrs., 1975, v. 41, No 348.
5. Petroski H. J., Achenbach J. D. Computation of the weight function from a stress intensity factor. — Engng. Fract. Mech., 1978, v. 10, No 2.
6. Белинский Б. П., Локшин А. З. Напряженное состояние в плоском круговом кольце с трещиной. — ПММ, 1975, т. 39, вып. 6.
7. Саерук М. П. О построении интегральных уравнений двумерных задач теории упругости для тела с криволинейными трещинами. — Физ.-хим. механ. материалов, 1976, т. 12, № 6.
8. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
9. Панасюк В. В., Саерук М. П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976.
10. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев: Наукова думка, 1968.

Львов

Поступила в редакцию  
10.VIII.1979