

УДК 539.375

ОДНА ПРОСТРАНСТВЕННАЯ АВТОМОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА О СВЕРХЗВУКОВОМ РАСКЛИНИВАНИИ УПРУГОГО ТЕЛА

Борзых А. А.

В рамках динамической теории упругости дается метод решения пространственной задачи о сверхзвуковом расклинивании тела тонким стреловидным лезвием. Соответствующим преобразованием масштаба и предельным переходом («принцип микроскопа» [1]) задача о тонком лезвии сводится к предельной задаче о математическом разрезе. Решение получено в замкнутом виде для случая зависимости перемещений или некоторого дифференциального преобразования их от двух автомодельных переменных. Заменой координат исходная задача сводится к определению аналитических функций двух комплексных переменных. Нахождение последних после некоторых преобразований приводится к краевой задаче Дирихле одной комплексной переменной, решаемой стандартными методами.

Задачи о тонких сверхзвуковых лезвиях в упругом теле [2] представляют интерес для решения проблемы сверхзвукового разрезания в теории электронного и лазерного разрушения твердых тел. К задачам сверхзвукового разрушения примыкают также задачи о сверхзвуковом штампе, движущемся по поверхности. В принципе все эти задачи допускают общее решение, впрочем, весьма трудно осуществимое, с помощью интегральных представлений [3].

1. Постановка задачи. Пусть бесконечное тонкое лезвие — математический разрез в плоскости x_1, x_3 , симметрично расположенное относительно оси x_3 , движется с постоянной сверхзвуковой скоростью $V > c_1 > c_2$ вдоль оси x_3 в упругом теле (c_1 и c_2 — скорости продольной и поперечной упругих волн). Лезвие имеет постоянный угол стреловидности β (или коэффициент $\gamma = \text{ctg } \beta$) и находится внутри конуса характеристик (фиг. 1), т. е. выполняется условие

$$\gamma > M_1 > M_2 \quad (M_j^2 = V^2/c_j^2 - 1 > 0 \quad (j = 1, 2))$$

Задача считается симметричной относительно плоскости x_1x_3 .

В качестве исходных здесь используются уравнения динамической теории упругости в перемещениях [3], которые в стационарной задаче в подвижной системе координат: $x = x_1, y = x_2, z = x_3 - Vt$ имеют вид ($\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ — полный вектор перемещений):

$$(1.1) \quad \frac{\partial^2 \mathbf{u}_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_j}{\partial y^2} = M_j^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}_j}{\partial z^2} \quad (j = 1, 2)$$

$$(1.2) \quad \text{rot } \mathbf{u}_1 = 0, \text{ div } \mathbf{u}_2 = 0$$

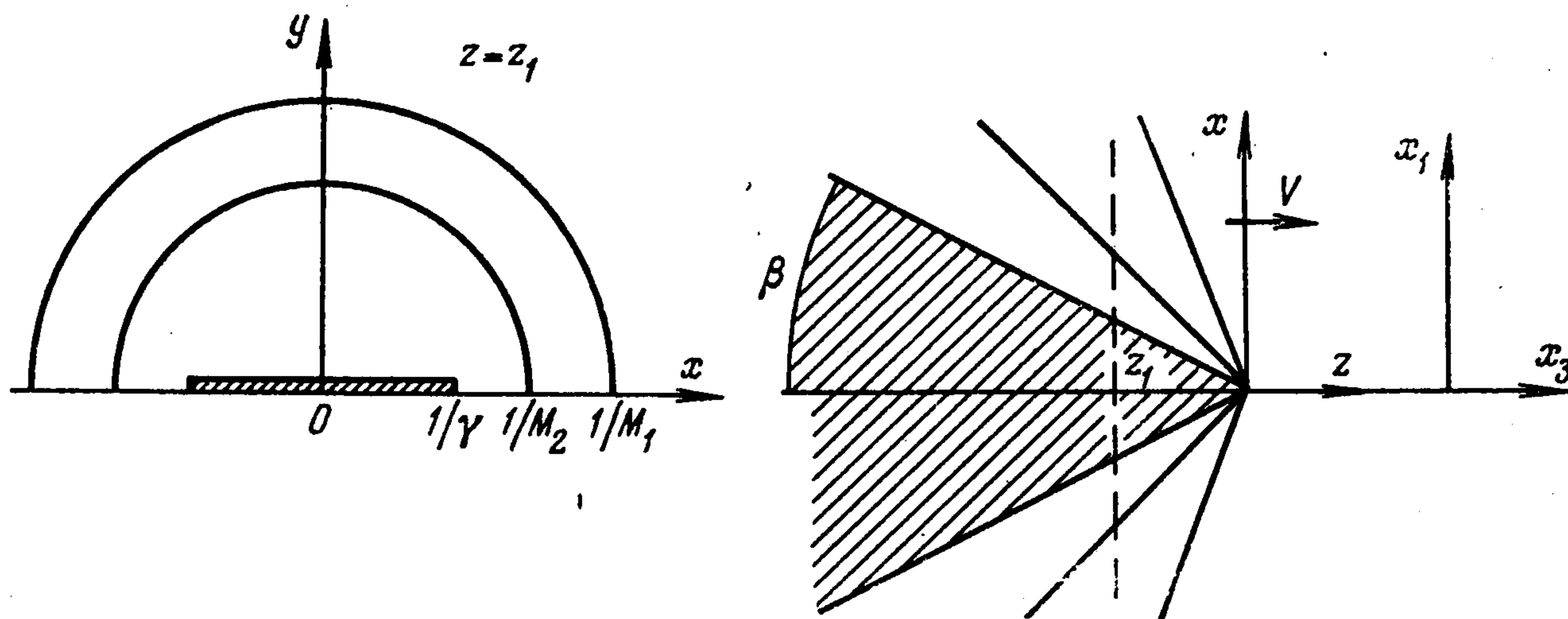
Векторы \mathbf{u}_1 и \mathbf{u}_2 характеризуют соответственно перемещения в волне дилатации и волне сдвига.

Согласно закону Гука

$$(1.3) \quad \sigma_{kl} = 2\mu\varepsilon_{kl} + \lambda\varepsilon\delta_{kl}; \quad 2\varepsilon_{kl} = u_{k,l} + u_{l,k}, \quad \varepsilon = u_{k,k}$$

σ_{kl} ($k, l = x, y, z$) — компоненты тензора напряжений, λ и μ — постоянные Ламе.

Все основные уравнения (1.1) — (1.3) будут также справедливы при замене u на функцию $v = Lu$, представляющую собой линейное преобра-



Фиг. 1

зование поля перемещений (L — некоторый линейный дифференциальный оператор), и соответствующих заменах

$$\varepsilon_{kl} \rightarrow L\varepsilon_{lk}, \quad \sigma_{lk} \rightarrow L\sigma_{lk}.$$

Рассматриваются автомодельные пространственные задачи о сверхзвуковых стреловидных лезвиях (частный случай общей автомодельной задачи о сверхзвуковом конусе), в которых соответствующие решения (например, перемещения) зависят только от двух автомодельных переменных:

$$\xi = x/z, \quad \eta = y/z$$

К этому типу относятся задачи, в которых перемещения u — однородные функции x, y, z нулевого измерения [4], и задачи, в которых функции $v = Lu$ (например, вектор скорости среды) однородные. Развиваемый здесь подход к пространственным задачам аналогичен известным методам ТФКП в плоских статических [5], стационарно-динамических [6] и динамических [4] задачах теории упругости.

Решаются задачи в следующей постановке.

Задача А. Перемещения — однородные функции (функции ξ и η).

Граничные условия в системе координат xyz имеют вид

$$(1.4) \quad u_x = g_x(x/z), \quad u_y = g_y(x/z), \quad u_z = g_z(x/z)$$

при $|x| \leq -z/\gamma, \quad y = 0, \quad z < 0$

$$(1.5) \quad u_{jx} = u_{jy} = u_{jz} = 0 \quad (j = 1, 2)$$

при $x^2 + y^2 > z^2/M_j^2, \quad z < 0$ и всех $z > 0$

$$(1.6) \quad u_x = u_y = u_z = 0$$

при $|x| \geq -z/\gamma, \quad y = 0, \quad z < 0.$

Здесь u_x, u_y, u_z — декартовы компоненты вектора перемещений u , g_x, g_y и g_z — заданные функции аргумента $\xi = x/z$, условия (1.5) указывают границы возмущенных областей и ограничивают решения перемещениями, не испытывающими разрывов на этих границах. Условия (1.6) имеют смысл условий симметрии, обеспечивающих однородность решений, и аналогичны обычным, но более слабым условиям равновесия (отсутствия скачка напряжений на разрезе). Такие условия реализуются, например, при расклинивании кусочно-однородного тела по поверхности, разделяющей упругое и абсолютно жесткое тела, или для тонких лезвий с большими углами стреловидности (близкими к углам раствора конусов характеристик).

Задача Б. Функции $v = Lu$ (линейное преобразование) — однородные функции (от ξ и η). Граничные условия полностью совпадают с условиями (1.4) — (1.6) задачи А с учетом замены $u \rightarrow v$, поэтому в дальнейшем обе задачи будут различаться только с точки зрения механики, т. е. при определении напряжений в среде, а с математической точки зрения обе задачи А и Б как задачи нахождения неизвестной функции (u или v) по ее значениям на границах совершенно одинаковы.

Простым примером функции v в задаче Б может служить поле скоростей среды; оператор преобразования равен $L = \partial/\partial t = -V\partial/\partial z$.

Укажем вид условий (1.2) в координатах ξ, η

$$(1.7) \quad u_{1z,\xi} + \xi u_{1x,\xi} + \eta u_{1x,\eta} = 0$$

$$u_{1z,\eta} + \xi u_{1y,\xi} + \eta u_{1y,\eta} = 0, \quad u_{1y,\xi} - u_{1x,\eta} = 0$$

$$(1.8) \quad u_{2x,\xi} + u_{2y,\eta} - \xi u_{2z,\xi} - \eta u_{2z,\eta} = 0$$

2. Метод решения: сведение к краевой задаче Дирихле. Дальнейшее изложение ведется в терминах задачи А (в перемещениях); полученные результаты при заменах $u \rightarrow v = Lu$, $\sigma_{ik} \rightarrow L\sigma_{ik}$ будут полностью справедливы для задачи Б.

Для каждого из уравнений (1.1) вводится собственная система координат $r_j \sigma_j \varepsilon_j$, определенная следующими соотношениями:

$$(2.1) \quad M_j \xi = \cos \sigma_j \frac{2\varepsilon_j}{1 + \varepsilon_j^2}$$

$$M_j \eta = \sin \sigma_j \frac{2\varepsilon_j}{1 + \varepsilon_j^2}; \quad z = r_j \frac{1 + \varepsilon_j^2}{1 - \varepsilon_j^2}$$

Уравнения (1.1) с учетом автомодельности, т. е. независимости решений от r_j , примут в координатах $\sigma_j \varepsilon_j$ вид уравнений Лапласа

$$(2.2) \quad \frac{\partial^2 u_j}{\partial \sigma_j^2} + \varepsilon_j \frac{\partial}{\partial \varepsilon_j} \left(\varepsilon_j \frac{\partial u_j}{\partial \varepsilon_j} \right) = 0$$

Использованный здесь метод преобразования уравнений динамики упругой среды аналогичен методу, применявшемуся Буземаном и другими авторами в задачах сверхзвуковой газодинамики (см., например, [7]).

Следовательно, векторы u_j можно рассматривать как действительную часть некоторой векторной аналитической функции соответствующей

комплексной переменной

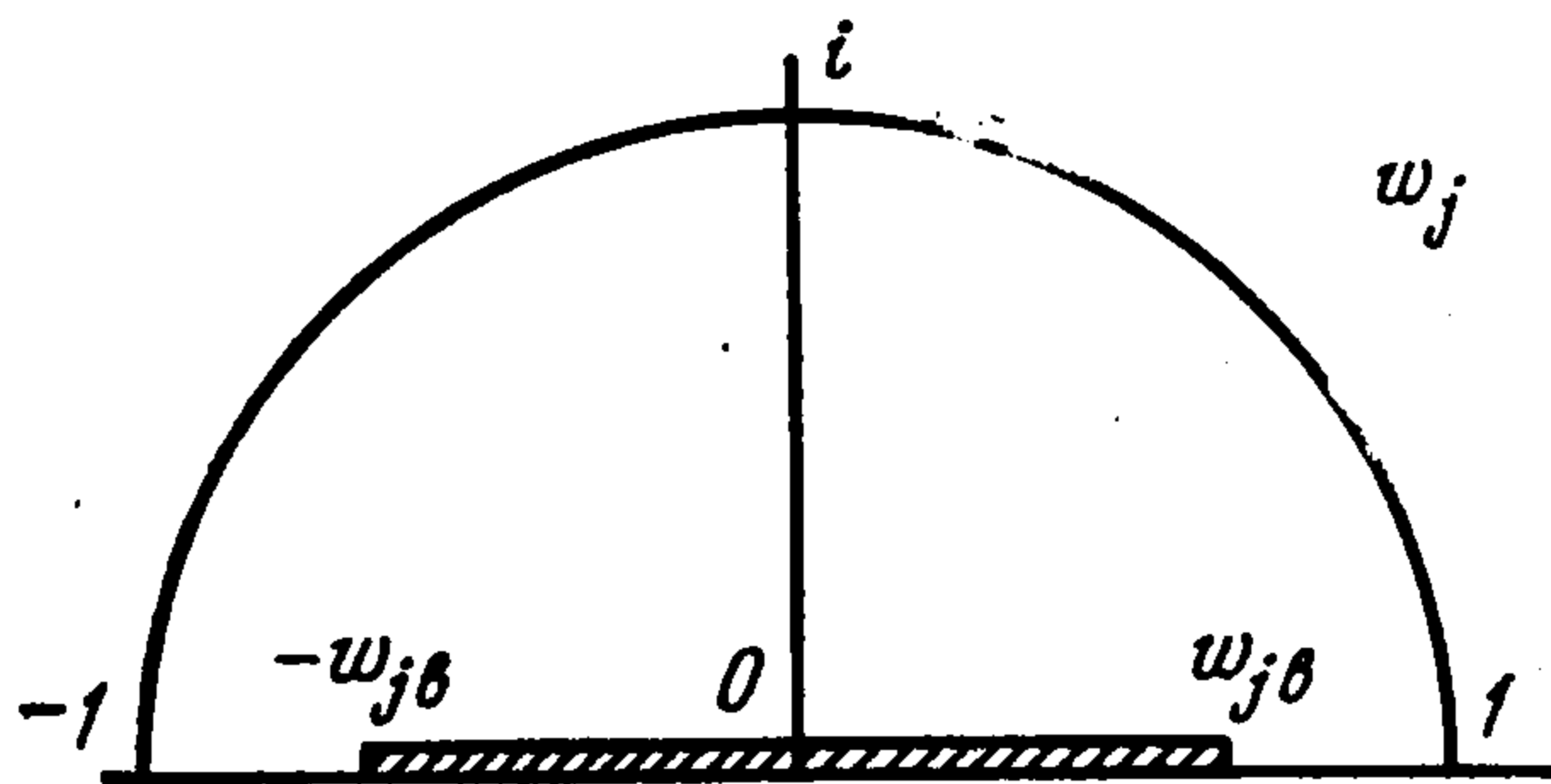
$$(2.3) \quad w_j = \varepsilon_j \exp(i\sigma_j)$$

Этим преобразованием при соответствующем выборе ветви в соотношениях (2.1) исходная область u_j — возмущений в пространстве xuz отображается на внутренность единичного круга в комплексной плоскости w_j , а лезвие отображается на отрезок действительной оси с концами в точках $w_{j\theta} = \pm M_j^{-1} (\gamma - \sqrt{\gamma^2 - M_j^2})$, как показано на фиг. 2.

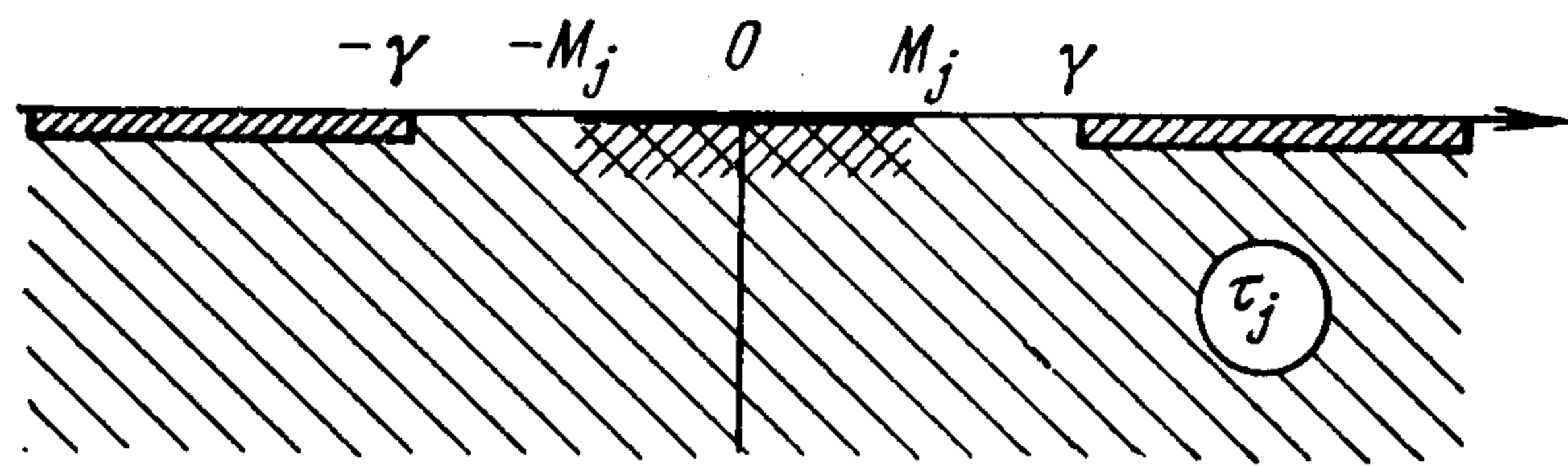
Обозначим

$$(2.4) \quad u_{jk} = \operatorname{Re} F_{jk}(w_j) \quad (j = 1, 2; k = x, y, z)$$

где F_{jx} , F_{jy} , F_{jz} — аналитические во внутренности единичного круга с разрезом по отрезку $\operatorname{Im} w_j = 0$, $|\operatorname{Re} w_j| \leq w_{j\theta}$ функции соответствую-



Фиг. 2



Фиг. 3

щих комплексных переменных w_1 и w_2 . Подставляя выражения (2.4) в условия (1.7), (1.8) и учитывая следующие представления:

$$\frac{(w_j)_\xi'}{(w_j)_\eta'} = i \frac{w_j^2 + 1}{w_j^2 - 1}, \quad \eta + \xi \frac{(w_j)_\xi'}{(w_j)_\eta'} = \frac{2iw_j}{M_j(w_j^2 - 1)}$$

получим три условия связи шести неизвестных аналитических функций $F_{jk}(w_j)$ ($j = 1, 2; k = x, y, z$) в такой форме (штрих означает дифференцирование по аргументу):

$$(2.5) \quad \begin{aligned} i(w_1^2 + 1) F_{1y}'(w_1) &= (w_1^2 - 1) F_{1x}'(w_1) \\ 2iw_1 F_{1y}'(w_1) + M_1(w_1^2 - 1) F_{1z}'(w_1) &= 0 \\ iM_2(w_2^2 + 1) F_{2x}'(w_2) + M_2(w_2^2 - 1) F_{2y}'(w_2) &= 2iw_2 F_{2z}'(w_2) \end{aligned}$$

Таким образом, задача А сведена к краевой задаче теории аналитических функций двух комплексных переменных. Задача определения аналитических функций двух переменных может быть существенно упрощена, если можно указать связь между этими переменными.

Отметим, что из трех условий (1.7) только два независимы, поэтому в (2.5) приведены только три независимых условия, полученных из (1.7) и (1.8). Из условий (2.5) следует также, что только одна функция F_{1k} и две функции F_{2k} являются независимыми.

Введем еще одну пару комплексных переменных τ_j , определенных следующими выражениями (преобразование Жуковского):

$$(2.6) \quad \tau_j = \frac{M_j}{2} \left(w_j + \frac{1}{w_j} \right) \quad (j = 1, 2)$$

В обеих плоскостях τ_j внутренность единичного круга соответствующей верхней полуплоскости w_j (область возмущений) переходит в нижнюю полуплоскость $\text{Im } \tau_j < 0$, а поверхность лезвия — в два одинаковых луча на действительной оси: $|\text{Re } \tau_j| \geq \gamma$, $\text{Im } \tau_j = 0$. Кроме того, окружность единичного радиуса в плоскости w_j перейдет в отрезок $|\text{Re } \tau_j| > M_j$, $\text{Im } \tau_j = 0$, а действительная ось $\text{Im } w_j = 0$ — в два луча $|\text{Re } \tau_j| > M_j$, $\text{Im } \tau_j = 0$ (см. фиг. 3). Следовательно, все границы, на которых заданы условия (1.4) — (1.6) задачи А в плоскости τ_j , изображаются действительной осью $\text{Im } \tau_j = 0$, причем при $y = 0$ ($\eta = 0$) имеет место следующее равенство:

$$(2.7) \quad \tau_1 = \tau_2 = 1/\xi \text{ при } |\text{Re } \tau_j| \geq \gamma, \text{Im } \tau_j = 0$$

Компоненты полного вектора перемещений среды u , выраженные через комплексные переменные τ_j , примут вид

$$(2.8) \quad u_k = \text{Re} [F_{1k}(\tau_1) + F_{2k}(\tau_2)] \quad (k = x, y, z)$$

Здесь $F_{jk}(\tau_j)$ — подлежащие определению аналитические в нижней полуплоскости τ_j (в силу симметрии) функции, связанные дополнительными условиями, принимающими согласно соотношениям (2.5), (2.6) такую форму:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \sqrt{\tau_1^2 - M_1^2} F'_{1x} &= -i\tau_1 F'_{1y}, & \sqrt{\tau_1^2 - M_1^2} F'_{1z} &= iF'_{1y} \\ \sqrt{\tau_2^2 - M_2^2} F'_{2y} &= i\tau_2 F'_{2x} - iF'_{2z} \end{aligned}$$

Компоненты тензора деформаций (формулы (1.3)) будут находиться из следующих выражений:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} 2\varepsilon_{lk} &= \text{Re} \left[\frac{\partial \tau_1}{\partial x_k} F'_{1k} + \frac{\partial \tau_2}{\partial x_k} F'_{2k} + \frac{\partial \tau_1}{\partial x_l} F'_{1l} + \frac{\partial \tau_2}{\partial x_l} F'_{2l} \right] \\ \varepsilon &= \text{Re} \left[\frac{\partial \tau_1}{\partial x} F'_{1x} + \frac{\partial \tau_2}{\partial x} F'_{2x} + \frac{\partial \tau_1}{\partial y} F'_{1y} + \frac{\partial \tau_2}{\partial y} F'_{2y} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \tau_1}{\partial z} F'_{1z} + \frac{\partial \tau_2}{\partial z} F'_{2z} \right] \end{aligned}$$

В выражениях (2.9), (2.10) аргументами функций F_{jk} являются соответствующие переменные τ_j , штрих означает дифференцирование по аргументу.

Для нахождения связи между переменными τ_1 и τ_2 заметим, что при $|\text{Re } \tau_j| < \gamma$, $\text{Im } \tau_j = 0$ граничные условия (1.5), (1.6) принимают вид

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \text{Re} F_{1x}(\tau_1) &= \text{Re} F_{1y}(\tau_1) = \text{Re} F_{1z}(\tau_1) = 0 \\ \text{Re} F_{2x}(\tau_2) &= \text{Re} F_{2y}(\tau_2) = \text{Re} F_{2z}(\tau_2) = 0 \end{aligned}$$

т. е. нулевые при любых τ_1 и τ_2 на этом отрезке. Этот факт можно записать таким образом; каковы бы ни были пары величин τ_1 и τ_2 , принадлежащих соответствующим отрезкам $|\text{Re } \tau_j| < \gamma$, $\text{Im } \tau_j = 0$, всегда выполняется равенство

$$\text{Re} [F_{1k}(\tau_1) + F_{2k}(\tau_2)] = \text{Re} [F_{1k}(\tau) + F_{2k}(\tau)] = 0$$

Это равенство выполняется также и при $\tau = \tau_1 = \tau_2$, что позволяет распространить условие (2.7) на указанные отрезки действительных

осей плоскостей τ_j , не изменяя граничных условий (2.11). Таким образом, для всех точек действительных осей $\text{Im}\tau_1 = 0$ и $\text{Im}\tau_2 = 0$ можно считать выполняющимся условие равенства обеих комплексных переменных

$$(2.12) \quad \tau = \tau_1 = \tau_2$$

Введем теперь новую комплексную переменную, вещественная часть которой равна вещественным частям обеих переменных τ_1 и τ_2

$$(2.13) \quad \text{Re}\tau = \text{Re}\tau_1 = \text{Re}\tau_2$$

т. е. распространим условие связи (2.12) между двумя комплексными переменными на действительной оси на всю нижнюю полуплоскость.

Указанный здесь метод сведения задачи определения шести функций двух комплексных переменных к краевым задачам для функций одной комплексной переменной во многом аналогичен методу, используемому в работе [4] для решения нескольких больших классов плоских автотомельных задач динамической теории упругости дозвуковых скоростей, исследованных авторами на основе метода Смирнова — Соболева функционально-инвариантных решений волнового уравнения [4, 8].

Обозначим

$$(2.14) \quad \begin{aligned} F_{1x}(\tau) + F_{2x}(\tau) &= V_x(\tau), & F_{1y}(\tau) + F_{2y}(\tau) &= V_y(\tau) \\ F_{1z}(\tau) + F_{2z}(\tau) &= V_z(\tau) \end{aligned}$$

где $V_k(\tau)$ ($k = x, y, z$) — аналитические в нижней полуплоскости $\text{Im}\tau < 0$ функции. Функции $F_{jk}(\tau)$ выражаются через $V_k(\tau)$, согласно соотношениям (2.9), так:

$$(2.15) \quad \begin{aligned} F_{1x}' &= -i\tau\kappa_1 D [V_y' + i\kappa_2 V_z' - i\tau\kappa_2 V_x'] \\ F_{1y}' &= D [V_y' + i\kappa_2 V_z' - i\tau\kappa_2 V_x'] \\ F_{1z}' &= i\kappa_1 D [V_y' + i\kappa_2 V_z' - i\tau\kappa_2 V_x'] \\ F_{2x}' &= D [i\tau\kappa_1 V_y' - \tau\kappa_1\kappa_2 V_z' + (1 - \kappa_1\kappa_2) V_x'] \\ F_{2y}' &= i\kappa_2 D [\tau V_x' - V_z' + i\kappa_1 (1 + \tau^2) V_y'] \\ F_{2z}' &= D [(1 - \tau^2\kappa_1\kappa_2) V_z' - i\kappa_1 V_y' - \tau\kappa_1\kappa_2 V_x'] \\ \kappa_j(\tau) &= (\tau^2 - M_j^2)^{-1/2} \quad (j = 1, 2), \quad D(\tau) = [1 - \kappa_1\kappa_2 (1 + \tau^2)]^{-1} \end{aligned}$$

Аргументом функций $V_x, V_y, V_z, \kappa_1, \kappa_2, D, F_{jk}$ служит τ .

Для определения функций $V_k(\tau)$ имеем три разделяющиеся независимые задачи Дирихле для одной комплексной переменной в полуплоскости $\text{Im}\tau < 0$, принимающие, согласно соотношениям (1.4) — (1.6),

(2.7) — (2.9), (2.11) — (2.14), следующий вид:

$$(2.16) \quad \begin{aligned} \text{Re}V_k(\tau) &= g_k(\xi = 1/\tau), \quad |\text{Re}\tau| \geq \gamma \\ \text{Re}V_k(\tau) &= 0, \quad |\text{Re}\tau| < \gamma \quad (k = x, y, z) \end{aligned}$$

где g_k — известные согласно (1.4) функции переменной ξ («профиль лезвия»).

Решение каждой из краевых задач (2.16) есть интеграл Шварца для полуплоскости [9], имеющий, например, для $V_x(\tau)$ вид

$$(2.17) \quad V_x(\tau) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Re}V_x(t) \frac{dt}{t - \tau} + iC_x$$

где C_x — произвольная действительная постоянная, значения $\operatorname{Re} V_x(t)$ заданы условием (2.16).

Представления вида (2.17) для каждой из искоемых функций полностью решают задачу А; перемещения определяются по формулам (2.8) интегрированием соотношений (2.15), поле напряжений находится непосредственно по формулам (1.3), (2.10).

Задача Б решается совершенно аналогично с помощью представлений (2.17) с тем только отличием, что поле перемещений u находится по найденному из решения краевой задачи полю v обратным преобразованием: $u = L^{-1}v$, а поле напряжений затем определяется по формулам (1.3), либо непосредственно по формулам (2.10) определяется линейное преобразование $L\sigma_{lk}$, и далее преобразованием L^{-1} — поле σ_{lk} .

3. Одна краевая задача и ее приложения. Общий метод проиллюстрируем на примере одного важного предельного случая граничной задачи (1.4) — (1.6).

Пусть

$$g_k(\xi) = a_k \quad (k = x, y, z)$$

где a_x, a_y, a_z — некоторые действительные постоянные. Согласно представлениям (2.17), имеем

$$V_k(\tau) = -i(a_k/\pi) \ln [(\gamma - \tau)/(\gamma + \tau)] + iC_k \quad (k = x, y, z)$$

где C_x, C_y и C_z — произвольные действительные постоянные. Для определения напряжений используются формулы (2.10). При $\eta = 0$ имеем представления функций $F_{jk}(\tau)$, выраженные через переменные $\xi\eta$ согласно определениям (2.15)

$$(3.1) \quad F_{1x}' = -2i\xi H(a_x - a_z\xi + ia_y h_2)$$

$$F_{1y}' = iF_{1x}'h_1, \quad F_{1z}' = -\xi F_{1x}'$$

$$(3.2) \quad F_{2x}' = 2i\xi H[(h_1 h_2 - \xi^2)a_1 - a_3\xi + ia_2 h_2]$$

$$F_{2y}' = -2\xi H[a_1 h_1 - h_1 h_2 a_3 + ia_2 \xi^{-1} h_2 (1 + \xi^2)]$$

$$F_{2z}' = -2i\xi H[a_1 \xi - a_3 (h_1 h_2 - 1) + ia_2 \xi h_2]; \quad |\xi| < M_2^{-1}$$

$$(3.3) \quad F_{2x}' = F_{2y}' = F_{2z}' = 0, \quad M_2^{-1} < |\xi| < M_1^{-1}$$

$$h_j = \sqrt{1 - M_j^2 \xi^2}, \quad H = (\gamma^2 \xi^2 - 1)^{-1} (h_1 h_2 - 1 - \xi^2)^{-1} \quad (j = 1, 2)$$

Для производных комплексных переменных τ_j по координатам x, y, z при $\eta = 0$ имеем

$$(3.4) \quad \frac{\partial \tau_j}{\partial x} = -\frac{1}{z\xi^2}, \quad \frac{\partial \tau_j}{\partial z} = \frac{1}{z\xi}, \quad \frac{\partial \tau_j}{\partial y} = -i\frac{h_j}{z\xi^2} \quad (j = 1, 2)$$

Сводка выражений (3.1) — (3.4) позволяет определить поле напряжений по формулам (1.3), (2.10). Не приводя представлений для всех девяти компонентов σ_{lk} , легко получающихся из (3.1) — (3.4), ограничимся выражением для первого инварианта тензора напряжений ($\eta = 0$)

$$(3.5) \quad I_1 = 2(2\mu + 3\lambda)a_2 z^{-1} \xi^{-2} h_2 H[\xi h_1^2 - h_2(1 + \xi^2)], \quad |\xi| < M_2^{-1}$$

$$(3.6) \quad I_1 = \frac{2(2\mu + 3\lambda)(1 + M_1^2)(a_1 - a_3\xi - a_2 h_2)h_1 h_2}{z\xi(\gamma^2 \xi^2 - 1)[2 + M_1^2 + M_2^2 + (1 - M_1^2 M_2^2)\xi^2]}, \quad M_2^{-1} < |\xi| < M_1^{-1}$$

Отметим некоторые особенности полученных результатов.

Поле напряжений в области $\xi^2 + \eta^2 < M_2^{-2}$ (области существования обеих волн — поперечной и продольной) определяется только нормальными перемещениями a_y на разрезе, т. е. задача о произвольном скачке смещений на сверхзвуковом разрезе может без ограничения общности рассматриваться в этой области как задача о нормальном разрыве.

В окрестности следующих точек: $|\xi| = 1/\gamma$, $|\xi| = 1/M_2$ и $|\xi| = 1/M_1$ поле напряжений имеет особенности. Укажем асимптотики поля напряжений вблизи этих точек. Для инварианта I_1 имеем

$$(3.7) \quad I_1 = \frac{(2\mu + 3\lambda) a_2 \sqrt{\gamma^2 - M_2^2} [\gamma^2 - M_1^2 + (1 + \gamma^2) \sqrt{\gamma^2 - M_2^2}]}{\rho z [V(\gamma^2 - M_1^2)(\gamma^2 - M_2^2) - \gamma^2 - 1]}$$

$$\rho = 1 - \xi\gamma \rightarrow \pm 0.$$

Как и следовало ожидать, особенность в напряжениях (3.7) имеет порядок $1/\rho$, т. е. такая же, как особенность вблизи края дозвукового дислокационного разрыва [1, 4]. Вблизи границ возмущенных областей (фронтов Маха) получим

$$(3.8) \quad I_1 = a_2 R_2 (M_1^2 - M_2^2) \sqrt{\rho}, \quad \rho = 1 - M_2 \xi \rightarrow +0$$

$$I_1 = M_2 R_2 (1 + M_1^2) \sqrt{M_2^2 - M_1^2} (a_1 - a_3/M_2 - a_2 \sqrt{2\rho}) \sqrt{\rho}, \quad \rho = M_2 \xi - 1 \rightarrow +0$$

$$I_1 = R_1 \sqrt{M_2^2 - M_1^2} (a_1 M_1 - a_3 - a_2 \sqrt{M_2^2 - M_1^2}) \sqrt{\rho}, \quad \rho = 1 - M_1 \xi \rightarrow +0$$

$$R_j = \frac{2\sqrt{2} (2\mu + 3\lambda) M_j^3}{z(\gamma^2 - M_j^2)(1 + M_j^2)} \quad (j = 1, 2)$$

Все результаты § 3 полностью переносятся на задачу Б с учетом замены $\sigma_{ik} \rightarrow L\sigma_{ik}$. В частности, в важном случае оператора $L = -V\partial/\partial z$ (задача об однородных скоростях среды), аналогичном плоской задаче, рассмотренной в работе [2], получим, что вблизи края лезвия напряжения, получаемые применением обратного оператора L^{-1} к выражениям (3.7), (3.8), имеют особенность порядка $\ln(z + \gamma|x|)$.

Автор благодарит Черепанова Г. П. за ряд замечаний, высказанных в ходе работы над статьей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
2. Борзых А. А., Черепанов Г. П. К теории разрушения твердых тел под воздействием мощных импульсных пучков электронов. — ПММ, 1980, т. 44, вып. 6, с. 1120.
3. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
4. Афанасьев Е. Ф., Черепанов Г. П. Некоторые динамические проблемы теории упругости. — ПММ, 1973, т. 37, вып. 4, с. 618.
5. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
6. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1953. 264 с.
7. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Т. 2. М.: Наука, 1963. 727 с.
8. Соболев С. Л. Некоторые вопросы теории распространения колебаний. В кн.: Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Л.— М.: ОНТИ, Главн. ред. общетехн. лит-ры, 1937, с. 468.
9. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.