Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 2, 1981

УДК 539.383

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ УПРУГОГО ШТАМПА С ЖИДКОСТЬЮ ЧЕРЕЗ ТОНКОЕ ПОКРЫТИЕ

Коваленко Е. В.

Рассматривается задача о взаимодействии упругого тела (упругого штампа) со слоем идеальной жидкости бесконечной глубины (случай плоской деформации) через тонкое покрытие. Предполагается, что штамп вдавливается в границу покрытия и движется вдоль нее с постоянной скоростью. Силы трения в области контакта считаются отсутствующими, течение в жидкости установившимся, потенциальным. Задача подобного рода возникает при изучении процессов динамического воздействия упругих тел на поверхность ледяного поля.

С помощью интегрального преобразования Фурье задача приведена к интегральному уравнению первого рода типа свертки на конечном интервале с сингулярным ядром. Исследована структура решения полученного уравнения. Для построения его приближенного решения использован метод ортогональных полиномов [1].

1. Постановка задачи, интегральное уравнение. Рассмотрим слой идеальной тяжелой жидкости бесконечной глубины ($y \leqslant 0$) с плотностью ρ, на поверхности которого лежит слой малой толщины h с упругими характеристиками G и ν. Допустим, что вдоль границы такого составного основания движется без трения с постоянной скоростью V упругий штамп (G_0, ν_0), прижимаемый к нему силой P с моментом $M = Pe$. Предполагаем, что в процессе движения штампа не происходит отслоения покрытия от жидкости. Пусть в подвижной системе координат, связанной со штампом, основание его описывается функцией $f(x')$, а линия контакта определяется неравенством $|x'| \leqslant a$. Тогда в приближении теории Герца для производной от перемещения v_0 точек поверхности штампа по оси y будем иметь выражение

$$v_0'(x', 0, t) = -\frac{1}{\pi\theta_0}\int_{-a}^{a}\frac{q^*(\xi, t)}{\xi - x'}\,d\xi \quad \left(\theta_0 = \frac{G_0}{1-\nu_0}\right) \tag{1.1}$$

Здесь $q^*(x, t) = q(x')$ — контактное давление, отличное от нуля лишь при $|x'| \leqslant a$, $x' = x - Vt$.

В качестве физической модели покрытия возьмем модель тонкой пластинки, растянутой постоянным по ее длине усилием. Такой слой описывается уравнением

$$h^3\beta^* v^{(4)} - h\sigma v'' = p^*(x, t) - q(x') - h\rho^* \ddot{v} \tag{1.2}$$
$$\beta^* = G[6(1-\nu)]^{-1}$$

Здесь v — перемещение точек срединной плоскости пластинки по оси y, σ — осредненное по толщине нормальное напряжение, действующее в поперечном сечении слоя, $p^*(x, t) = p(x')$ — реактивное давление, действующее на слой со стороны жидкости, ρ^* — плотность материала покрытия. Далее штрихи у подвижной координаты x' будем опускать предполагая, что рассуждения ведутся в системе, связанной со штампом.

Предположим, что физико-механические свойства жидкости описываются линеаризованными уравнениями установившегося потенциального течения

$$\Delta\varphi = 0, \quad v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - V, \quad v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad p = \rho V\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \rho g y \tag{1.3}$$

где $\varphi(x, y)$ — потенциал скоростей, p — давление в жидкости, v_x, v_y — проекции скорости частиц жидкости на оси подвижной системы координат, g — постоянная силы тяжести, ρ — плотность жидкости.

Условие контакта при $|x| \leqslant a$ между штампом и покрытием, очевидно, будет иметь вид

$$v + v_0 = -[\delta + \alpha^* x - f(x)] \tag{1.4}$$

Здесь $\delta + \alpha^* x$ — жесткое перемещение штампа под действием приложенных к нему силы P и момента M.

С учетом малости толщины пластинки снесем условие (1.2) с ее срединной плоскости на границу жидкости $y = 0$. Тогда

$$Dv^{(4)} - Tv'' = p(x) - q(x) \tag{1.5}$$

$$D = h^3\beta^*, \quad T = h(\sigma - \rho^* V^2)$$

Предположим, как и в теории тонкого крыла [2], что условие контакта жидкости с поверхностью покрытия имеет вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -V\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.6}$$

Тогда, согласно (1.6), условие (1.2) при $y = 0$ перепишем в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(D\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - T\varphi\right) = V[p(x) - q(x)] \tag{1.7}$$

Будем еще считать, что при $(x^2 + y^2) \to \infty$ возмущения в жидкости, вызванные движением штампа, исчезают.

Решим теперь с помощью интегрального преобразования Фурье уравнение (1.3) при граничном условии (1.7) и условии отсутствия возмущений в жидкости на бесконечности. Получим следующее выражение для производной от перемещения v при $y = 0$:

$$v(x, 0) = -\frac{1}{\pi D}\int_{-a}^{a} q(\xi)\,d\xi \int_0^\infty \frac{A_0 u \sin u(\xi - x)\,du}{A_0 u^4 + A_2 u^2 - A_3 u + A_4} \tag{1.8}$$

$$A_0 = D, \quad A_2 = T, \quad A_3 = \rho V^2, \quad A_4 = \rho g$$

Будем рассматривать случай, когда скорость движения штампа

$$V < V_*, \quad \text{где} \quad V_*^2 = \varkappa^2\left(\sqrt{1 + 2\varkappa^{-2}\sigma/\rho^*} - 1\right), \quad \varkappa^2 = 16\rho^* gh(9\rho)^{-1}.$$

Тогда выражение, стоящее под знаком внутреннего интеграла в (1.8), не имеет полюсов на действительной полуоси $u \geqslant 0$.

Используя условие контакта штампа с покрытием, получим интегральное уравнение относительно $q(x)$, которое в безразмерных переменных и обозначениях

$$\varphi(x') = q(ax')\theta_0^{-1}, \quad r(x') = f(ax')a^{-1}$$
$$x' = xa^{-1}, \quad \xi' = \xi a^{-1},$$
$$\lambda = ha^{-1}, \quad u' = uh, \quad \mu = \theta_0(\beta^*)^{-1}, \quad A_i' = A_i(A_4h^{4-i})^{-1}$$
$$(i = 0, 2, 3)$$

будет иметь вид

$$(1.9) \qquad \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\xi')}{\xi' - x'} d\xi' + \frac{\mu}{\lambda} \int_{-1}^{1} \varphi(\xi') K\left(\frac{\xi' - x'}{\lambda}\right) d\xi' = \pi[\alpha^* - r'(x')]$$
$$(|x'| \leqslant 1)$$

$$K(z) = \int_0^\infty L(u')\sin u'z\,du', \qquad L(u') = \frac{A_0'u'}{A_0'(u')^4 + A_2'(u')^2 - A_3'u' + 1}$$

В дальнейшем штрих у безразмерных переменных будем опускать. К уравнению (1.9) необходимо еще добавить условия статики

$$(1.10) \qquad N_0 = P(\theta_0 a)^{-1} = \int_{-1}^{1} \varphi(\xi)d\xi, \quad N_1 = Pe(\theta_0 a^2)^{-1} = \int_{-1}^{1} \xi\varphi(\xi)d\xi$$

2. Структура решения интегрального уравнения (1.9). Прежде чем приступить к доказательству теорем о структуре решения полученного в п. 1 интегрального уравнения (1.9), изучим некоторые свойства функции $K(z)$, необходимые в дальнейшем. С учетом асимптотического поведения

$$(2.1) \qquad L(u) = A_0u + O(u^2) \quad (u \to 0)$$
$$L(u) = u^{-3} + O(u^{-5}) \quad (u \to \infty)$$

сформулируем следующую лемму.

Лемма. При всех значениях переменной $z \in (-R, R)$, где R — любое, сколь угодно большое число, справедливо

$$(2.2) \qquad K(z) \in B_1^1(-R, R), \quad K(z) \sim z \quad (z \to 0)$$

Здесь $B_k^\alpha(-R, R)$ — пространство функций, k-е производные которых при $|z| \leqslant R$ удовлетворяют условию Гельдера с показателем $0 < \alpha \leqslant 1$. При $k = \alpha = 0$ имеем $C(-R, R)$ — пространство непрерывных на $[-R, R]$ функций.

Доказательство леммы может быть выполнено с учетом следующих интегралов [3]:

$$\int_0^\infty \frac{\sin uz}{u} du = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} z, \qquad \int_0^\infty \frac{uz - \sin uz}{u^3} du = \frac{\pi}{4} z^2 \operatorname{sgn} z$$

Напомним некоторые сведения из теории сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши [4], касающиеся следующего вспомогательного уравнения:

$$(2.3) \qquad \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - x} d\xi = \pi\psi(x) \quad (|x| \leqslant 1)$$

Теорема 1. Если функция $\psi(x) \in B_0^{\alpha}(-1,1)$ и $\alpha > 0$, то решение интегрального уравнения (2.3) в классе $L_p(-1,1)$, $1 < p < 2$ существует и имеет вид

$$\varphi(x) = \omega^*(x)(1 - x^2)^{-1/2} \tag{2.4}$$

$$\omega^*(x) = \frac{1}{\pi}\left[N_0 - \int_{-1}^{1} \frac{\psi(\xi)\sqrt{1-\xi^2}}{\xi - x} d\xi\right], \quad \omega^*(x) \in B_0^{\nu}(-1,1)$$

причем $\nu = \alpha$ при $\alpha < 1$, $\nu = 1-0$ при $\alpha = 1$.

Если функция $\psi(x) \in B_0^{\alpha}(-1,1)$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$, $\psi(x) \in B_0^{\beta}(1-\varepsilon, 1)$ $(\varepsilon > 0$, $1/2 < \beta \leqslant 1)$ и выполняется соотношение

$$N_0 + \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}}\, \psi(\xi)\, d\xi = 0 \tag{2.5}$$

то решение интегрального уравнения (2.3) имеет вид

$$\varphi(x) = \omega^*(x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad \omega^*(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{\psi(\xi)}{\xi - x} d\xi \tag{2.6}$$

$$\omega^*(x) \in B_0^{\nu}(-1,1), \quad \nu = \inf(\alpha, \beta - 1/2)$$

Если функция $\psi(x) \in B_0^{\alpha}(-1,1)$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$, $\psi(x) \in B_0^{\beta}(1-\varepsilon, 1)$, $\psi(x) \in$ $\in B_0^{\beta}(-1, -1+\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0$, $1/2 < \beta \leqslant 1)$ и выполняются соотношения

$$N_0 + \int_{-1}^{1} \frac{\psi(\xi)\,\xi\, d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = 0, \quad \int_{-1}^{1} \frac{\psi(\xi)\, d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = 0 \tag{2.7}$$

то решение интегрального уравнения (2.3) имеет вид

$$\varphi(x) = \omega^*(x)\sqrt{1-x^2}, \quad \omega^*(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\psi(\xi)\, d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}\,(\xi - x)} \tag{2.8}$$

$$\omega^*(x) \in B_0^{\nu}(-1,1), \quad \nu = \inf(\alpha, \beta - 1/2)$$

Здесь $L_p(-1,1)$ $(p \geqslant 1)$ — пространство суммируемых со степенью p на отрезке $[-1,1]$ функций.

Таким образом, формулы (2.4) — (2.8) служат формулами обращения интегрального уравнения (2.3) и дают возможность получить решения (2.3), неограниченные на обоих краях, ограниченные на одном крае, ограниченные на двух краях.

Если теперь предположить, что $\varphi(x) \in L_p(-1,1)$ $(1 < p < 2)$ в (1.9) и использовать результаты леммы, теоремы 1 и работы [5], то можно сформулировать следующие теоремы относительно структуры решения интегрального уравнения (1.9).

Теорема 2. Пусть $r(x) \in B_1^{\alpha}(-1,1)$, $0 < \alpha \leqslant 1$. Тогда если при данных λ, $\mu \in (0, \infty)$ существует решение уравнения (1.9), такое, что $\varphi(x) \in L_p(-1,1)$, $1 < p < 2$, то $\varphi(x)$ имеет вид

$$\varphi(x) = \omega(x)(1 - x^2)^{-1/2}, \quad \omega(x) \in B_0^{\gamma}(-1,1) \tag{2.9}$$

причём $\gamma = \alpha$ при $\alpha < 1$ и $\gamma = 1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ при $\alpha = 1$.

Теорема 3. Пусть 1) $r(x) \in B_1^{\alpha}(-1,1)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, 2) $r(x) \in B_1^{\beta}\cdot$ $\cdot(1-\varepsilon, 1)$, $\varepsilon > 0$, $1/2 < \beta \leqslant 1$. Тогда если при данных λ, $\mu \in (0, \infty)$ существует решение уравнения (1.9) такое, что: 1) $\varphi(x) \in L_p(-1,1)$, $1 <$

$< p < 2$, 2) $|\varphi(x)| \leqslant m$, $m > 0$ при $1 - \varepsilon \leqslant x \leqslant 1$ и выполняется соотношение

$$N_0 = -\pi\alpha^* + \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} [r'(\xi) + \mu\psi(\xi)]\, d\xi$$

$$\psi(\chi) = \frac{1}{\pi\lambda} \int_{-1}^{1} \varphi(\xi) K\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi$$

то $\varphi(x)$ имеет вид

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\omega(x), \quad \omega(x) \in B_0^{\gamma}(-1, 1), \quad \gamma = \inf(\alpha, \beta - {}^1/_2) \tag{2.10}$$

Теорема 4. Пусть 1) $r(x) \in B_1^{\alpha}(-1, 1)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, 2) $r(x) \in B_1^{\beta} \cdot (1 - \varepsilon, 1)$, $\varepsilon > 0$, ${}^1/_2 < \beta \leqslant 1$, 3) $r(x) \in B_1^{\beta}(-1, -1 + \varepsilon)$. Тогда если при данных λ, $\mu \in (0, \infty)$ существует решение уравнения (1.9) такое, что 1) $\varphi(x) \in L_p(-1,1)$ $1 < p < 2$, 2) $|\varphi(x)| \leqslant m$, $m > 0$ при $1 - \varepsilon \leqslant x \leqslant 1$ и $-1 \leqslant x \leqslant -1 + \varepsilon$, и выполняются соотношения

$$N_0 = \int_{-1}^{1} [r'(\xi) + \mu\psi(\xi)] \frac{\xi\, d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$\pi\alpha^* = \int_{-1}^{1} [r'(\xi) + \mu\psi(\xi)] \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

то $\varphi(x)$ имеет вид

$$\varphi(x) = \omega(x)\sqrt{1 - x^2}, \quad \omega(x) \in B_0^{\gamma}(-1,1), \quad \gamma = \inf(\alpha, \beta - {}^1/_2) \tag{2.11}$$

Доказательства теорем 2—4 содержатся фактически в работе [5].

3. Построение решения уравнения (1.9). Для отыскания приближенного решения интегрального уравнения (1.9) воспользуемся методом ортогональных многочленов, который будет основываться на применении некоторых спектральных соотношений для классических многочленов Чебышева и Якоби, а именно имеют место формулы [3]

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(\xi)\, d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}\,(\xi - x)} = \pi U_{n-1}(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3.1}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi - x} U_{n-1}(\xi)\, d\xi = -\pi T_n(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \frac{P_n^{({}^1/_2,\, -{}^1/_2)}(\xi)}{\xi - x}\, d\xi = -\pi P_n^{(-{}^1/_2,\, {}^1/_2)}(x) \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

Перейдем к изучению общего неограниченного случая (2.9) исходного интегрального уравнения. Будем искать функцию $\omega(x)$, входящую в соотношение (2.9), в виде следующего ряда по полиномам Чебышева первого рода:

$$\omega(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k(x), \qquad a_0 = N_0\pi^{-1} \tag{3.2}$$

В силу свойств $\omega(x)$, указанных в теореме 2, и соотношений

$$(3.3)\qquad B_k^{\nu}(-1,1)\subset L_{2,\rho}(-1,1),\qquad \|\omega\|_{L_{2,\rho}(-1,1)}=\|\omega\|_{l_2}$$

(в равенстве (3.3) подразумевается, что a_k — коэффициенты Фурье функции $\omega(x)$ по замкнутой в $L_{2,\rho}(-1, 1)$, ортонормированной системе функций) ряд (3.2) сходится к $\omega(x)$ по норме пространства $L_{2,\rho}(-1, 1)$, $\rho(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$, а соответствующая последовательность $\{a_k\}\in l_2$. Определения пространств $L_{2,\rho}(-1, 1)$, l_2 дано в [6].

Функцию $\alpha^* - r'(x)$, а также добавку ядра $K((\xi - x)/\lambda)$ разложим, соответственно, в одинарный и двойной ряды вида

$$(3.4)\qquad \alpha^*-r'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_nU_{n-1}(x)$$

$$K\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}e_{ij}(\lambda)T_i(\xi)U_{j-1}(x)$$

Воспользовавшись известным свойством ортогональности полиномов Чебышева, получим

$$e_{ij}(\lambda)=\frac{2\alpha_i}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}K\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-\xi^2}}T_i(\xi)U_{j-1}(x)\,d\xi\,dx$$

$$b_i=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}[\alpha^*-r'(x)]\sqrt{1-x^2}\,U_{i-1}(x)\,dx,\qquad \alpha_0=1,\quad \alpha_i=2$$

В силу описанных свойств функций $r'(x)$ и $K((\xi - x)/\lambda)$ ряды (3.4) равномерно сходятся к этим функциям при $|x|\leqslant 1$, $|\xi|\leqslant 1$, $\lambda\in(0, \infty)$.

Теорема 5. Если функция $r(x)\in B_1^{\alpha}(-1, 1)$ $(0<\alpha\leqslant 1)$, то любому решению $\varphi(x)$ из класса $L_p(-1, 1)$ $(1<p<2)$ уравнения (1.9) соответствует последовательность чисел $\{a_k\}$ из класса l_2, удовлетворяющая бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$(3.5)\qquad a_n=b_n-\frac{\mu}{\pi\lambda}e_{0n}(\lambda)N_0-\frac{\mu}{2\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}e_{kn}(\lambda)a_k\qquad(n=1,2,\ldots)$$

Наоборот, если функция $r(x)\in B_1^{\alpha}(-1, 1)$ $(0<\alpha\leqslant 1)$, то любому решению $\{a_n\}$ из класса l_2 системы (3.5) соответствует решение $\varphi(x)\in L_{4/3-0}(-1, 1)$ уравнения (1.9) вида (2.9).

Для доказательства, с учетом теоремы 2 и соотношений (3.3), подставим в интегральное уравнение (1.9) функции $\varphi(x)$, $\alpha^* - r'(x)$, $K((\xi - x)/\lambda)$ в виде (2.9), (3.4) и вычислим интегралы, используя первую формулу (3.1) и свойство ортогональности полиномов Чебышева. Получим выражение, в левой и правой частях которого стоят ряды по многочленам Чебышева второго рода. Приравнивая в нем коэффициенты обоих частей при полиномах одинакового номера, получим бесконечную систему (3.5). Легко производятся и обратные преобразования с учетом соотношения [1]

$$\|\varphi(x)\|_{L_{4/3-0}(-1,1)}\leqslant m_1\|\omega(x)\|_{L_{2,\rho}(-1,1)},\qquad \rho(x)=(1-x^2)^{-1/2}$$

$$m_1=\mathrm{const}$$

Теорема 6. Если функция $r(x) \in B_1^\alpha(-1, 1)$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$, то оператор, стоящий в правой части (3.5), действует в пространстве l_2 и является в нем вполне непрерывным при всех значениях параметров λ, $\mu \in (0, \infty)$.

Учитывая свойства $K((\xi - x)/\lambda)$ и $r(x)$, указанные выше, а также соотношения (3.3), заключаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} e_{kn}^2(\lambda) < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} e_{0n}^2(\lambda) < \infty, \quad \{b_n\} \in l_2 \tag{3.6}$$

Из (3.6) следует, что оператор, стоящий в правой части (3.5), действует в пространстве последовательностей l_2 и является там вполне непрерывным при λ, $\mu \in (0, \infty)$. Таким образом, к системе (3.5) применима альтернатива Гильберта [6] о разрешимости бесконечных систем.

Решив бесконечную систему (3.5), найдем затем по формулам (3.2), (2.9) решение исходного интегрального уравнения (1.9) в общем неограниченном случае.

В случае ограниченного на одном крае $x = 1$ решения интегрального уравнения (1.9) будем искать функцию $\omega(x)$, входящую в (2.10), в виде

$$\omega(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k^{(1/2,\, -1/2)}(x), \quad a_0 = N_0\pi^{-1} \tag{3.7}$$

Заметим, что в силу свойств функции $\omega(x)$ (теорема 3) и соотношений (3.3) ряд (3.7) сходится к $\omega(x)$ по норме пространства $L_{2,\rho}(-1, 1)$, $\rho(x) = \sqrt{(1-x)/(1+x)}$, а последовательность $\{a_k\} \in l_2$.

Разлагая далее функции $\alpha^* - r'(x)$ и $K((\xi - x)/\lambda)$ соответственно в одинарный и двойной ряды вида

$$\alpha^* - r'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k P_k^{(-1/2,\, 1/2)}(x) \tag{3.8}$$

$$K\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} e_{mn}(\lambda) P_m^{(1/2,\, -1/2)}(\xi) P_n^{(-1/2,\, 1/2)}(x)$$

и пользуясь ортогональностью полиномов Якоби, будем иметь

$$e_{mn}(\lambda) = \frac{\alpha_m^*\alpha_n^*}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} K\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) \times \tag{3.9}$$

$$\times \sqrt{\frac{(1-\xi)(1+x)}{(1+\xi)(1-x)}}\, P_m^{(1/2,\, -1/2)}(\xi) P_n^{(-1/2,\, 1/2)}(x)\, d\xi\, dx$$

$$b_n = \frac{\alpha_n^*}{\pi}\int_{-1}^{1} [\alpha^* - r'(x)] \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, P_n^{(-1/2,\, 1/2)}(x)\, dx,$$

$$\alpha_n^* = \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2$$

При этом ряды (3.8) сходятся равномерно к $\alpha^* - r'(x)$ и $K(\xi - x)/\lambda)$ при $|x| \leqslant 1$, $|\xi| \leqslant 1$, $\lambda \in (0, \infty)$.

Теорема 7. Если функция $r(x) \in B_1^\alpha(-1, 1)$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$ и $r(x) \in B_1^\beta(1 - \varepsilon, 1)$, $\varepsilon > 0$, $1/2 < \beta \leqslant 1$, то любому решению $\varphi(x) \in L_p(-1, 1)$ $(1 < p < 2)$, $|\varphi(x)| \leqslant m$ $(m > 0)$ при $1 - \varepsilon \leqslant x \leqslant 1$

уравнения (1.9) соответствует последовательность чисел $\{a_k\} \in l_2$, удовлетворяющая бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$(3.10)\qquad a_n = \frac{\mu}{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} a_k(\alpha_k{}^*)^{-1}e_{kn}(\lambda) + \frac{\mu}{\lambda}e_{0n}(\lambda)\frac{N_0}{\pi} - b_n \qquad (n=1,2,\ldots)$$

и соотношению

$$(3.11)\qquad \frac{N_0}{\pi} = \frac{\mu}{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} a_k(\alpha_k{}^*)^{-1}e_{k0}(\lambda) + \frac{\mu}{\lambda}e_{00}(\lambda) - b_0$$

Наоборот, если функция $r(x) \in B_1{}^\alpha(-1, 1)$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$ и $r(x) \in B_1{}^\beta(1-\varepsilon, 1)$, $\varepsilon > 0$, $1/2 < \beta \leqslant 1$ и выполнено соотношение (3.11), то любому решению $\{a_n\} \in l_2$ системы (3.10) соответствует решение $\varphi(x) \in L_{4/3-0}(-1, 1)$, $|\varphi(x)| \leqslant m$ $(m > 0)$ при $1-\varepsilon \leqslant x \leqslant 1$ уравнения (1.9) вида (2.10).

Заметим, что соотношение (3.11) есть условие ограниченности решения уравнения (1.9) на крае $x = 1$ и служит, после определения a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ из (3.10), для нахождения неизвестной полудлины области контакта a.

Доказательство теоремы 7 может быть проделано аналогично доказательству теоремы 5 с учетом неравенства

$$\|\varphi(x)\|_{L_{4/3-0}(-1,1)} \leqslant m_2\|\omega(x)\|_{L_{2,\rho}(-1,1)}, \quad \rho(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$
$$m_2 = \text{const}$$

которое устанавливается с помощью известного неравенства Гельдера [6].

Отметим, что, как и в предыдущем случае, следующая теорема позволяет сделать вывод о разрешимости бесконечной системы в пространстве квадратично суммируемых последовательностей почти при всех значениях параметров λ, $\mu \in (0, \infty)$.

Теорема 8. Если функция $r(x) \in B_1{}^\alpha(-1, 1)$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$ и $r(x) \in B_1{}^\beta(1-\varepsilon, 1)$, $\varepsilon > 0$, $1/2 < \beta \leqslant 1$, то оператор, стоящий в правой части (3.10), действует в пространстве l_2 и является в нем вполне непрерывным при всех λ, $\mu \in (0, \infty)$.

Доказательство теоремы 8 воспроизводит доказательство теоремы 6.

После решения системы (3.10) найдем решение исходного интегрального уравнения (1.9), ограниченное на конце $x = 1$ согласно (3.7), (2.10), а вместе с тем определим неизвестную полудлину области контакта по формулам (3.11), (1.10).

В заключение рассмотрим случай ограниченного на обоих краях $x = \pm 1$ решения интегрального уравнения (1.9). Будем искать функцию $\omega(x)$ в (2.11) в виде

$$(3.12)\qquad \omega(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k U_{k-1}(x)$$

Используя далее представления

$$
(3.13) \qquad \alpha^* - r'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n T_n(x)
$$

$$
K\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e_{mn}(\lambda) U_{m-1}(\xi) T_n(x)
$$

и условие ортогональности полиномов Чебышева, получим

$$
e_{mn}(\lambda) = \frac{2\alpha_n}{\pi^2} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} K\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\sqrt{1-x^2}} U_{m-1}(\xi) T_n(x)\, d\xi\, dx
$$

$$
b_n = \frac{\alpha_n}{\pi} \int_{-1}^{1} [\alpha^* - r'(x)] \frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx
$$

Исходя из свойств функций $r(x)$ и $K((\xi - x)/\lambda)$, указанных выше, можно утверждать, что ряды (3.13) равномерно сходятся к ним при всех значениях $|x| \leqslant 1$, $|\xi| \leqslant 1$, $\lambda \in (0, \infty)$.

Теорема 9. Если 1) $r(x) \in B_1^\alpha(-1, 1)$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$, 2) $r(x) \in B_1^\beta(1 - \varepsilon, 1)$, $\varepsilon > 0$, $1/2 < \beta \leqslant 1$, 3) $r(x) \in B_1^\beta(-1, -1 + \varepsilon)$, то любому решению $\varphi(x) \in L_p(-1, 1)$ $(1 < p < 2)$ $|\varphi(x)| \leqslant m$ $(m > 0)$ при $1 - \varepsilon \leqslant x < 1$ и $-1 \leqslant x \leqslant -1 + \varepsilon$ уравнения (1.9) соответствует последовательность чисел $\{a_k\} \in l_2$, удовлетворяющая бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$
(3.14) \qquad a_n = \frac{\mu}{2\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_{kn}(\lambda) + \frac{\mu}{\pi\lambda} e_{1n}(\lambda) N_0 - b_n \qquad (n = 2, 3, \ldots)
$$

и соотношениям

$$
(3.15) \qquad 0 = \frac{\mu}{2\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} a_k e_{k0}(\lambda) + \frac{\mu}{\pi\lambda} e_{10}(\lambda) N_0 - b_0
$$

$$
\frac{2N_0}{\pi} = \frac{\mu}{2\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} a_k e_{k1}(\lambda) + \frac{\mu}{\pi\lambda} e_{11}(\lambda) N_0 - b_1
$$

Наоборот, если 1) $r(x) \in B_1^\alpha(-1, 1)$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$, 2) $r(x) \in B_1^\beta(1 - \varepsilon, 1)$, $\varepsilon > 0$, $1/2 < \beta \leqslant 1$, 3) $r(x) \in B_1^\beta(-1, -1 + \varepsilon)$ и выполнены соотношения (3.15), то любому решению $\{a_n\} \leqslant l_2$ системы (3.14) соответствует решение $\varphi(x) \in L_{4-0}(-1, 1)$, $|\varphi(x)| \leqslant m$ $(m > 0)$ при $1 - \varepsilon \leqslant x \leqslant 1$ и $-1 \leqslant x \leqslant -1 + \varepsilon$ уравнения (1.9) вида (2.11).

Соотношения (3.15) являются условиями ограниченности и служат, после определения a_n из (3.14), для нахождения неизвестной полудлины области контакта a и величины e.

Доказательство теоремы 9 воспроизводит доказательство теоремы 5, если принять во внимание неравенство

$$
\|\varphi(x)\|_{L_{4-0}(-1,1)} \leqslant m_3 \|\omega(x)\|_{L_{2,\rho}(-1,1)}, \quad \rho(x) = \sqrt{1 - x^2}
$$

$$
m_3 = \mathrm{const}
$$

проверяющееся с помощью неравенства Гельдера [6].

Теорема 10. Если 1) $r(x) \in B_1^\alpha(-1, 1)$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$, 2) $r(x) \in B_1^\beta(1-\varepsilon, 1)$, $\varepsilon > 0$, $1/2 < \beta \leqslant 1$, 3) $r(x) \in B_1^\beta(-1, -1+\varepsilon)$, то оператор в правой части (3.14) действует в l_2 вполне непрерывно при всех значениях параметров λ, $\mu \in (0, \infty)$.

Доказательства теорем 6 и 10 аналогичны.

Из теоремы 10 следует, что бесконечная система (3.14) разрешима в l_2 почти при всех значениях параметров λ, $\mu \in (0, \infty)$.

После ее решения найдем решение уравнения (1.9) по формулам (3.12), (2.11), а вместе с тем определим величины a и e согласно (3.15), (1.10).

Автор благодарит Александрова В. М. за внимание к работе и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
2. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966. 448 с.
3. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962, 1100 с.
4. *Александров В. М.* О плоских контактных задачах теории упругости при наличии сцепления или трения.— ПММ, 1970, т. 34, вып. 2, с. 246.
5. *Александров В. М., Арутюнян Н. Х.* Взаимодействие движущегося упругого штампа с упругой полуплоскостью через накладку или тонкий слой идеальной жидкости.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 3, с. 475.
6. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.

Москва

Поступила в редакцию
23.I.1980