

УДК 539.3

## АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГОГО СЛОЯ СО СМЕШАННЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Александров В. М., Зеленцов В. Б.

Изучаются задачи о сдвиге жестким штампом вязкоупругого слоя и о вдавливании жесткого штампа в вязкоупругий слой, находящийся на вязкоупругом винклеровском основании. На штамп действуют усилия, изменяющиеся во времени по гармоническому закону. В качестве модели деформирования берется трехконстантный закон (стандартное тело). Рассматриваются аналогичные задачи для упругого слоя, находящегося на упругом винклеровском основании. Все задачи сводятся к интегральным уравнениям первого рода, которые затем на основе [1, 2] сводятся к бесконечным алгебраическим системам, эффективно решаемым при малых значениях характерного геометрического параметра. Помимо того, развивается асимптотический метод для больших значений указанного параметра. Подобные методы для больших значений характерного геометрического параметра развивались также в [3, 4].

1. Рассмотрим задачу о сдвиге-вибрации жестким полосовым штампом ширины  $2a$  вязкоупругого слоя высоты  $h$ , находящегося на вязкоупругом винклеровском основании. К штампу приложена сдвигающая сила  $T = T_0 \exp(-i\omega t)$ . Уравнения линейной теории вязкоупругости в перемещениях имеют вид [5]

$$(1.1) \quad \int_{-\infty}^t \mu(t-\tau) \frac{\partial u_{i, ll}}{\partial \tau} d\tau + \int_{-\infty}^t [\lambda(t-\tau) + \bar{\mu}(t-\tau)] \frac{\partial u_{k, ki}}{\partial \tau} d\tau = \\ = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \int_{-\infty}^t \lambda(t-\tau) \frac{\partial \epsilon_{kk}(\tau)}{\partial \tau} d\tau + 2 \int_{-\infty}^t \mu(t-\tau) \frac{\partial \epsilon_{ij}(\tau)}{\partial \tau} d\tau$$

Здесь  $\lambda(t)$  и  $\mu(t)$  — функции релаксации,  $\rho$  — объемная плотность материала слоя.

Граничные условия задачи

$$(1.2) \quad y = 0: -\rho_* \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + \sigma_{23} = \int_{-\infty}^t \nu(t-\tau) \frac{\partial u_3}{\partial \tau} d\tau, \quad |x| < \infty$$

$$(1.3) \quad y = h: \sigma_{23} = 0, \quad |x| > a; \quad u_3 = \bar{\epsilon}(x) \exp(-i\omega t), \quad |x| \leq a \\ u_1 = u_2 \equiv 0; \quad \sigma_{13} \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty$$

Условие (1.2) описывает работу вязкоупругого основания Винклера, в нем  $\rho_*$  — поверхностная плотность материала основания,  $\nu(t)$  — функ-

ция релаксации. В дальнейшем для получения конкретных формул, не уменьшая общности, ограничимся трехконстантным законом линейного деформирования, а именно: модуль сдвига для слоя примем в виде [5]

$$(1.4) \quad \mu(t) = G_0 + G_1 \exp(-t/t_1)$$

Здесь  $G_0$  — длительный модуль сдвига,  $G_1$  — мгновенный модуль сдвига,  $t_1$  — время релаксации. Аналогично в условии (1.2) примем

$$(1.5) \quad \nu(t) = k_0 + k_1 \exp(-t/t_2)$$

Здесь  $k_0$  — длительный коэффициент постели основания Винклера,  $k_1, t_2$  — мгновенный коэффициент постели и время релаксации.

Отыскивая решение задачи в виде  $u_3(x, y, t) = \bar{u}_3(x, y) \exp(-i\omega t)$  и применяя затем к уравнениям (1.1) интегральное преобразование Фурье по  $x$ , сведем краевую задачу к интегральному уравнению первого рода

$$(1.6) \quad \int_{-a}^a \tau(\xi) k(x - \xi) d\xi = \varepsilon(x), \quad |x| \leq a$$

$$k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(u) \exp(iut) du$$

$$\tau(\xi) = \bar{\tau}(\xi h) \bar{\mu}^{-1}, \quad \varepsilon(x) = \bar{\varepsilon}(xh) h^{-1}, \quad a' = \lambda^{-1} = ah^{-1}$$

Здесь  $\bar{\tau}(x)$  — амплитуда неизвестных контактных касательных напряжений под штампом,  $\bar{\mu}$  — комплексный модуль сдвига [5], штрих у безразмерной величины  $a'$  в (1.6) и далее опускаем.

Трансформанта Фурье ядра  $K(u)$  имеет вид

$$(1.7) \quad K(u) = \frac{1 + \lambda_0 \sigma^{-1} \operatorname{th} \sigma}{\lambda_0 + \sigma \operatorname{th} \sigma}, \quad \lambda_0 = \frac{(\bar{\nu} - \rho_* \omega^2) h}{\bar{\mu}}$$

$$\sigma = \sqrt{u^2 - b^2}, \quad b^2 = \rho \omega^2 h^2 \bar{\mu}^{-1}$$

$$\bar{\mu} = G_0 - G_1 \frac{i\omega t_1}{1 - i\omega t_1}, \quad \bar{\nu} = k_0 - k_1 \frac{i\omega t_2}{1 - i\omega t_2}$$

Аналогично ставится плоская задача о вдавливании-вибрации жестким штампом ширины  $2a$  вязкоупругого слоя толщины  $h$ , который в свою очередь, лежит без трения на вязкоупругом основании типа Винклера. Граничные условия такой задачи имеют вид

$$(1.8) \quad y=0: \quad -\rho_* \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \sigma_{22} = \int_{-\infty}^t \nu(t - \tau) \frac{\partial u_2}{\partial \tau} d\tau, \quad |x| < \infty$$

$$\sigma_{12} = 0, \quad |x| < \infty$$

$$y = h: \quad \sigma_{12} = 0, \quad |x| < \infty$$

$$\sigma_{22} = 0, \quad |x| > a; \quad u_2 = \bar{\varepsilon}(x) \exp(-i\omega t), \quad |x| \leq a$$

$$u_3 \equiv 0; \quad \sigma_{11}, \sigma_{12} \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty$$

Здесь и в (1.1)

$$(1.9) \quad \lambda(t) = G_\lambda^0 + G_\lambda^1 \exp(-t/t_0), \quad \mu(t) = G_\mu^0 + G_\mu^1 \exp(-t/t_1)$$

$$\nu(t) = k_0 + k_1 \exp(-t/t_2)$$

$\mu(t)$ ,  $\lambda(t)$ ,  $\nu(t)$  — функции релаксации,  $G_\lambda^0$ ,  $G_\lambda^1$ ,  $t_0$ ,  $G_\mu^0$ ,  $G_\mu^1$ ,  $t_1$ ,  $k_0$ ,  $k_1$ ,  $t_2$  — длительный, мгновенный модули и время релаксации функций  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  соответственно.

Далее, условия (1.8) вместе с уравнениями (1.1) определяют смешанную краевую задачу. Представив  $u_i(x, y, t) = \bar{u}_i(x, y) \exp(-i\omega t)$  и применив для решения смешанной краевой задачи интегральное преобразование Фурье по  $x$ , получим интегральное уравнение поставленной задачи (1.6), где  $\tau(\xi)$  нужно заменить на  $q(\xi)$  — безразмерную амплитуду контактного давления. Функцию  $K(u)$  здесь не выписываем, так как она имеет очень громоздкий вид.

В теоретическом плане самостоятельный интерес представляют задачи о сдвиге-вибрации и о вдавливании-вибрации жестким штампом упругого слоя, который лежит на упругом винклеровском основании. Первая из этих задач по описанной выше схеме сводится к интегральному уравнению (1.6), в котором

$$(1.10) \quad K(u) = (1 + \lambda_0 \sigma^{-1} \operatorname{th} \sigma)(\lambda_0 + \sigma \operatorname{th} \sigma)^{-1} \\ \sigma = \sqrt{u^2 - \kappa^2}, \quad \kappa^2 = \rho \omega^2 h^2 \mu^{-1}, \quad \lambda_0 = (k - \rho_* \omega^2) h \mu^{-1}$$

Здесь  $k$  — коэффициент постели основания Винклера,  $\mu$  — модуль сдвига материала слоя. Вторая из указанных задач также сводится к интегральному уравнению (1.6). Выражение для  $K(u)$  ради краткости не выписываем.

2. Рассмотрим интегральное уравнение (1.6). Пусть  $K(u)$  можно представить в виде

$$(2.1) \quad K(u) = K(0) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{u^2}{\delta_n^2}\right) \left(1 + \frac{u^2}{\gamma_n^2}\right)^{-1} = K(0) P_1(u^2) P_2^{-1}(u^2)$$

где  $\pm i\delta_n$ ,  $\pm i\gamma_n$  — счетное множество простых нулей и полюсов в комплексной плоскости ( $u = \sigma + it$ ), конечное количество которых может лежать на действительной оси. При этом интегрирование по действительной оси в выражении (1.6) для  $k(t)$  нужно заменить интегрированием по контуру  $\Gamma$ , который с учетом принципа предельного поглощения в обычном (регулярном) случае должен отклоняться от вещественной оси лишь обходя отрицательные полюса сверху, а положительные — снизу [6]. Пусть далее  $\delta_n$  и  $\gamma_n$  монотонно возрастают с ростом номера, обеспечивая сходимость бесконечного произведения (2.1), а на любой правильной системе контуров  $C_n$  в комплексной плоскости имеет место оценка

$$(2.2) \quad K(u) = O(|u|^{-1}), \quad u \rightarrow \infty$$

Предполагая, что функция  $\varepsilon(x)$  может быть представлена интегралом Фурье, рассмотрим случай, когда  $\varepsilon(x) = \exp(-\varepsilon x)$ . Следуя [1, 2], решение интегрального уравнения (1.6) можно представить в виде

$$(2.3) \quad \tau(x) = K^{-1}(i\varepsilon) \exp(-\varepsilon x) + \sum_{n=1}^{\infty} H_n(x), \quad H_n(x) = C_n \exp(-\delta_n x) + \\ + D_n \exp(\delta_n x)$$

Подставив (2.3) в (1.6) и взяв необходимые квадратуры с учетом (2.1), (2.2) и леммы Жордана, получаем

$$(2.4) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P_1(-\gamma_m^2)}{P_2'(-\gamma_m^2)} [\zeta(\gamma_m) \exp(-\gamma_m x) + \eta(\gamma_m) \exp(\gamma_m x)] \exp(-\gamma_m a) = 0$$

Учитывая линейную независимость функций  $\exp(-\gamma_m x)$  и  $\exp(\gamma_m x)$  [7], из (2.4) получаем бесконечную алгебраическую систему для определения  $C_n$  и  $D_n$

$$(2.5) \quad \frac{\exp(\varepsilon a)}{K(i\varepsilon)(\varepsilon - \gamma_m)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ C_n \frac{\exp(\delta_n a)}{\delta_n - \gamma_m} - D_n \frac{\exp(-\delta_n a)}{\delta_n + \gamma_m} \right] = 0,$$

$$m = 1, 2, \dots$$

$$\frac{\exp(-\varepsilon a)}{K(i\varepsilon)(\varepsilon + \gamma_m)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ C_n \frac{\exp(-\delta_n a)}{\delta_n + \gamma_m} - D_n \frac{\exp(\delta_n a)}{\delta_n - \gamma_m} \right] = 0, m = 1, 2, \dots$$

В случае плоского штампа ( $\varepsilon = 0$ ) система (2.5) упростится

$$(2.6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} x_n = -\gamma_m^{-1}, \quad m = 1, 2, \dots$$

$$a_{mn} = (\gamma_m + \delta_n \operatorname{th} \delta_n a) (\gamma_m^2 + \delta_n^2)^{-1}$$

а решение (2.3) примет вид

$$(2.7) \quad \tau(x) = K^{-1}(0) \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \operatorname{ch} \delta_n x \operatorname{ch}^{-1} \delta_n a \right), \quad |x| \leq a$$

Полученное решение эффективно при малых значениях параметра  $\lambda = h/a$ . Бесконечные алгебраические системы (2.5), (2.6) изучались в [6,8].

3. Построим решение интегрального уравнения (1.6), эффективное при больших значениях параметра  $\lambda$ . Предположим, что  $K(u)$  в (1.6) имеет на действительной оси  $N$  полюсов и интегрирование проходит по контуру  $\Gamma$ , описанному в п. 2. С учетом выбора контура интегрирования функцию  $k(t)$  представим в виде

$$(3.1) \quad k(t) = \sum_{m=1}^N \frac{P_1(-\gamma_m^2)}{P_2'(-\gamma_m^2)} \cos(i\gamma_m t) + \text{v. p.} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(u) e^{iut} du$$

Здесь  $\gamma_m$  ( $m = 1, 2, \dots, N$ ) — полюсы  $K(u)$  на положительной части действительной оси.

Пусть  $K(u) = u^{-1}L(u)$ . Тогда, выделяя из интеграла в (3.1) особенность при  $t \rightarrow 0$  и регуляризуя его на действительной оси с учетом свойства четности функции  $K(u)$  и следующих асимптотических оценок для  $L(u)$ :

$$(3.2) \quad \begin{aligned} L(u) &= 1 + c_1 u^{-2} + c_2 u^{-4} + O(u^{-6}), \quad u \rightarrow \infty \\ L(u) &= K(0) u + O(u^3), \quad u \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Получим представление

$$\begin{aligned}
 (3.3) \quad \pi k(t) &= -\ln|t| + \pi \sum_{m=1}^N \frac{P_1(-\gamma_m^2)}{P_2'(-\gamma_m^2)} e^{-\gamma_m|t|} + a_{30}^* + \\
 &+ a_{20}^*|t| + a_{11}^*t^2 \ln|t| + a_{31}^*t^2 + a_{21}^*|t|^3 + O(t^4) = \\
 &= -\ln|t| + a_{30} + a_{20}|t| + a_{11}t^2 \ln|t| + a_{31}t^2 + a_{21}|t|^3 + O(t^4) \\
 a_{30} &= \pi i \sum_{m=1}^N \frac{P_1(-\gamma_m^2)}{P_2'(-\gamma_m^2)} + \int_0^\infty u^{-1} \left[ L(u) - 1 - \sum_{m=1}^N \frac{A_m u}{u^2 + \gamma_m^2} + e^{-u} \right] du \\
 a_{20} &= -2\pi i \sum_{m=1}^N \frac{P_1(-\gamma_m^2)}{P_2'(-\gamma_m^2)} \gamma_m, \quad a_{31} = -\frac{3}{4}c_2 - \frac{1}{2} \int_0^\infty F(u) du, \\
 a_{11} &= \frac{c_2}{2}, \quad a_{21} = 0 \\
 F(u) &= u^{-1} \left[ L(u) - 1 - \sum_{m=1}^N \frac{A_m u}{u^2 + \gamma_m^2} + u^{-1} \sum_{m=1}^N A_m - c_2(1 - e^{-u}) \right] \\
 A_m &= 2\gamma_m i \frac{P_1(-\gamma_m^2)}{P_2'(-\gamma_m^2)}
 \end{aligned}$$

Получив асимптотическое разложение (3.3) ядра  $k(t)$  при малых  $t$ , решение уравнения (1.6) строим по методу работы [9]. Оно имеет вид

$$(3.4) \quad \tau(x) = (a^2 - x^2)^{-1/2} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \omega_{ij}(x) \lambda^{-m} \ln^j \lambda$$

причем функции  $\omega_{ij}(x)$  находятся по формулам (1.13), а в частном случае  $\varepsilon(x) = \varepsilon$  — по формулам (1.14) — (1.18) работы [9]. Отметим, что метод эффективен при  $\lambda > \max(\gamma_m)$ ,  $m = 1, 2, \dots, N$ .

4. Получим формулы для расчета комплексной амплитуды волн перемещений вне штампа. Она определяется контурным интегралом

$$(4.1) \quad h^{-1}\bar{u}_3(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \tau^*(u) K(u) e^{iux} du$$

где  $\tau^*(u)$  — трансформанта Фурье функции  $\tau(\xi)$ .

Контур  $\Gamma$  описан выше. Замыкая контур интегрирования в верхнюю полуплоскость и учитывая (2.1) — (2.3), в результате вычислений получим

$$\begin{aligned}
 (4.2) \quad h^{-1}\bar{u}_3(x) &= 2i \sum_{m=1}^{\infty} D(\gamma_m) \left\{ \frac{H(\varepsilon, -\gamma_m)}{K(i\varepsilon)} + \right. \\
 &+ \left. \sum_{n=1}^{\infty} [C_n H(\delta_n, -\gamma_m) + D_n H(\delta_n, \gamma_m)] \right\} e^{-\gamma_m x} \\
 H(u, v) &= (u+v)^{-1} \operatorname{sh}(u+v) a, \quad D(\gamma_m) = P_1(-\gamma_m^2) \times \\
 &\times [P_2'(-\gamma_m^2)]^{-1}
 \end{aligned}$$

В случае плоского штампа ( $\varepsilon(x) = \varepsilon$ ) имеем

$$\begin{aligned}
 (4.3) \quad h^{-1}\bar{u}_3(x) &= \frac{2i}{K(0)} \sum_{m=1}^{\infty} D(\gamma_m) \left[ \frac{\operatorname{sh} \gamma_m a}{\gamma_m} + \operatorname{ch} \gamma_m a \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} x_n \right] e^{-\gamma_m x}, \quad x > a \\
 b_{mn} &= (\gamma_m^2 - \delta_n^2)^{-1} [\gamma_m \operatorname{th} \gamma_m a - \delta_n \operatorname{th} \delta_n a]
 \end{aligned}$$

где  $x_n$  — то же, что в (2.6), (2.7). Расчет по этим формулам эффективен при малых  $\lambda$ . При больших  $\lambda$  нужно пользоваться решением интегрального уравнения (1.6) в форме (3.4). В этом случае  $\tau^*(u)$  дается формулой

$$(4.4) \quad \tau^*(u) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{mn}^*(u) \lambda^{-m} \ln^n \lambda$$

$$\omega_{mn}^*(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a (a^2 - x^2)^{-1/2} \omega_{mn}(x) e^{-iux} dx$$

В общем случае решение очень громоздко, но при  $\varepsilon(x) = \varepsilon$  его можно выписать. В этом случае

$$(4.5) \quad \omega_{00}^*(u) = PJ_0, \quad \omega_{10}^*(u) = 4\pi^{-3} a_{20} PS_1(u)$$

$$\omega_{20}^*(u) = \frac{P}{\pi} \left\{ -\pi \left[ a_{11} \left( \frac{3}{2} - \ln 2 \right) + a_{31} \right] l(u) + \right.$$

$$\left. + 32\pi^4 a_{20}^2 [S_2(u) - \pi 0,1508 J_0] \right\}, \quad \omega_{21}^*(u) = Pa_{11} l(u)$$

$$S_1(u) = \pi \left[ l(u) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} (J_{2k+2} + J_{2k}) \right]$$

$$S_2(u) = \pi \{ 0,4356 (au)^{-1} J_1 - 0,1321 (au)^{-3} [3aul(u) - (au)^2 J_1] -$$

$$- 0,4988\pi^{-10} \theta(u) \}$$

$$\theta(u) = \sum_{k=1}^{\infty} B(3/2, k+1/2) M(k-2, u) (2k-1)^{-1}$$

$$l(u) = -J_0 + 2(au)^{-1} J_1, \quad M(k, u) = F(k+5/2; 5/2; k+4; -$$

$$-(au)^2/16)$$

Здесь  $J_m = J_m(au)$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) — функции Бесселя,  $P$  находится по формуле (1.18) работы [10].

Подставив  $\tau^*(u)$  в виде (4.4) в (4.1) и замкнув контур интегрирования в верхнюю полуплоскость, с учетом (2.1), (2.2) получим

$$(4.6) \quad h^{-1} \bar{u}_3(x) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-m} \ln^n \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_1(-\gamma_k^2)}{P_2'(-\gamma_k^2)} \omega_{mn}^*(i\gamma_k) \exp(-\gamma_k x), \quad x > a$$

Аналогичные формулы можно получить для амплитуды и при  $x < -a$ .

5. Можно показать, что для функции  $K(u)$  задачи о сдвиге-вибрации жестким штампом вязкоупругого (упругого) слоя, лежащего на винклеровском вязкоупругом (упругом) основании, выполняются все свойства (2.1), (2.2), (3.2). Тогда для малых  $\lambda$  решение можно построить по формуле (2.7), для реализации этого необходимо знать нули и полюсы  $K(u)$  в комплексной плоскости ( $u = \sigma + it$ ). Для выяснения качественной картины явления интересно изучить зависимость амплитуды контактных касательных напряжений  $\tau(x)$  от параметров вязкоупругой задачи. При  $|x| \ll 1$  и  $h/a \ll 1$  можно (2.7) заменить выражением

$$(5.1) \quad \tau(x) = K^{-1}(0) + O(\exp(-(1-x)\delta_n a))$$

Далее, для простоты положим  $\rho_* = \rho h$ ,  $t_1 = t_2$  и будем изменять параметры задачи

$$(5.2) \quad \kappa^2 = \rho h^2 \omega^2 G_0^{-1}, \quad \delta^2 = G_0 t_1^2 (\rho h^2)^{-1}, \quad \theta = G_0 / h k \\ \eta_1 = k_0 (k_0 + k_1)^{-1}, \quad \eta_2 = G_1 G_0^{-1}$$

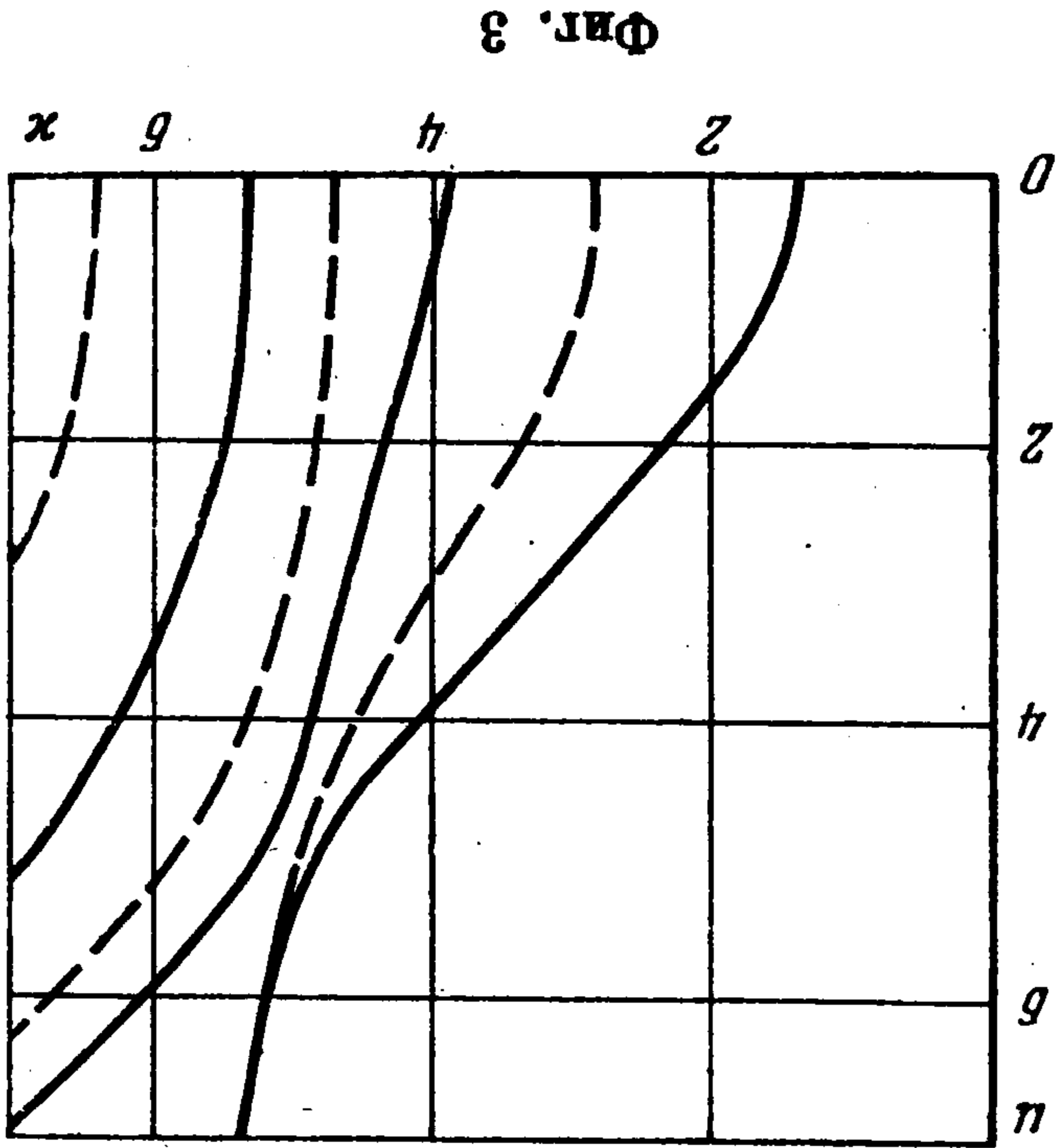
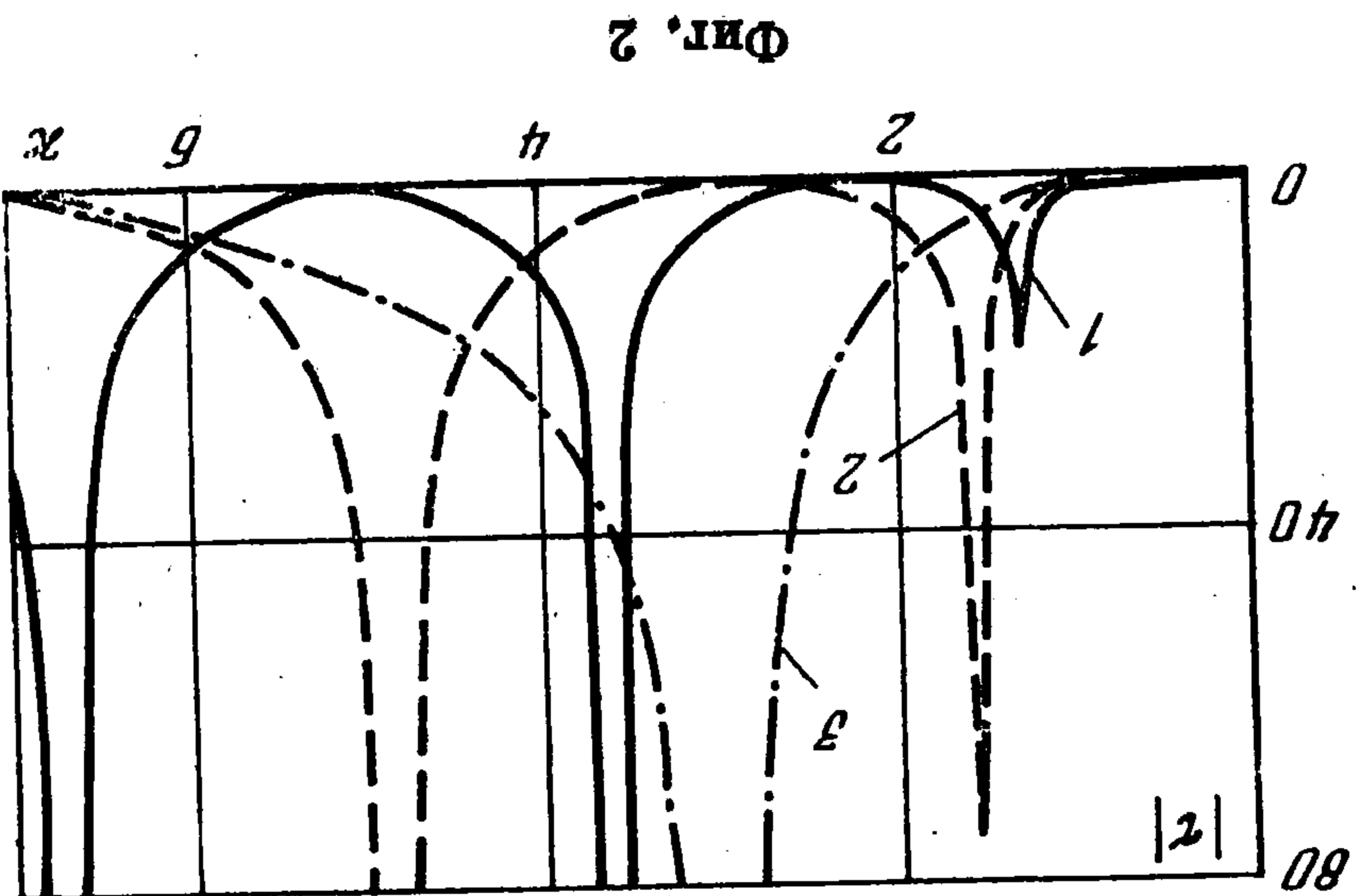
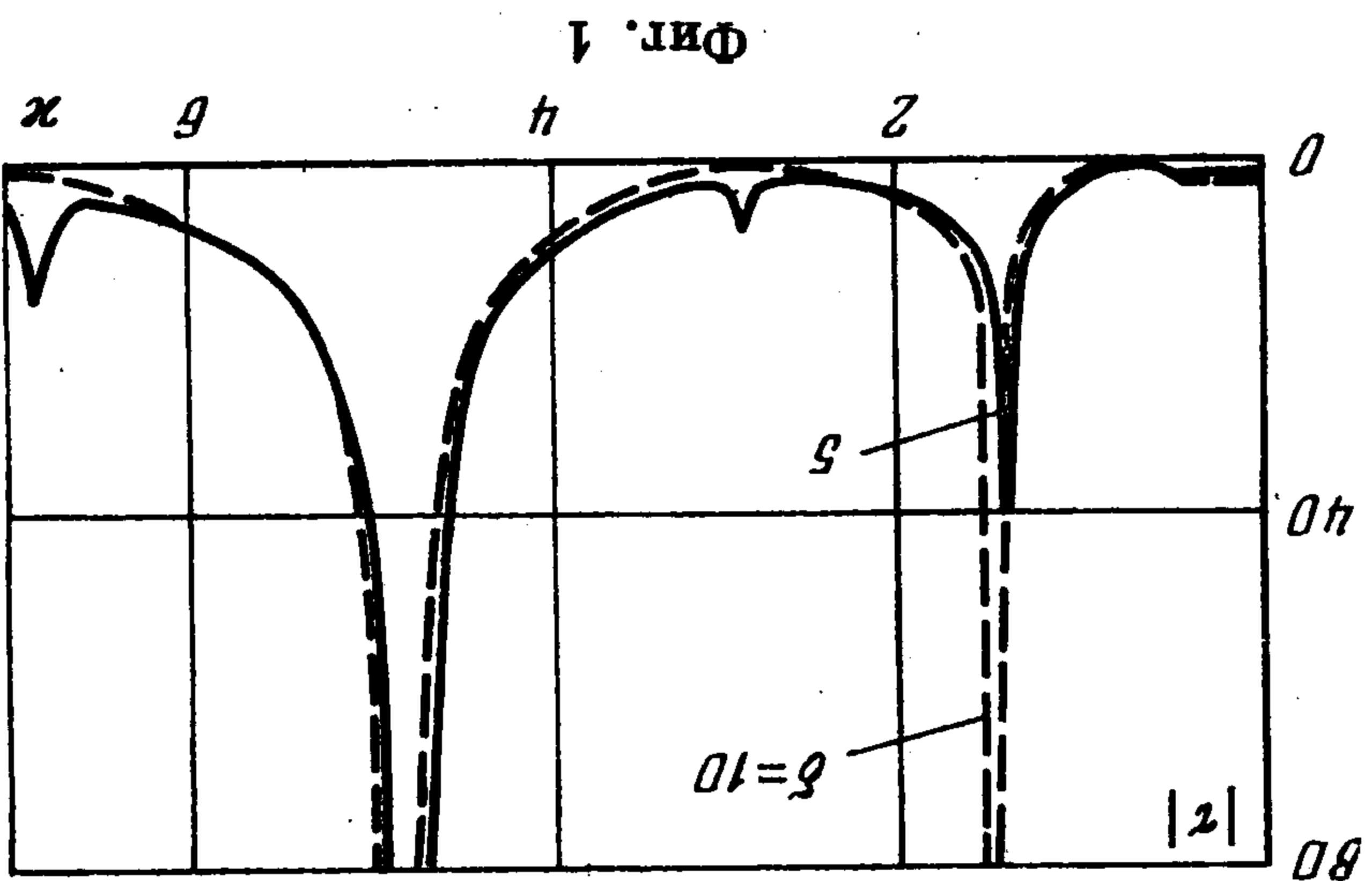
в широких пределах.

На фиг. 1 приведены графики  $|\tau(x)|$  в зависимости от безразмерной частоты  $\kappa$ , рассчитанные по формуле (5.1) для  $x$ , близких к нулю, при  $\eta_1 = \eta_2 = \theta = 1$ , а величина  $\delta$  указана на графиках. Видно, что при одновременном и одинаковом относительном изменении жесткого слоя и жесткости основания Винклера резонансные частоты незначительно сдвигаются влево, а амплитуда  $|\tau(x)|$  становится меньше. При  $\delta > 100$  амплитуда и резонансные частоты стабилизируются (упругость). Интересно, что при  $\delta = 5$  добавляются промежуточные пики  $|\tau|$ ; при  $\delta \geq 10$  они уже не наблюдаются.

Изменение параметра  $\theta$  показывает, что при относительно жестком слое ( $\delta = 100$ ) изменение жесткости основания мало влияет на характер распределения резонансных частот и на амплитуду. При менее жестком слое ( $\delta = 5$ ) с увеличением жесткости основания по отношению к жесткости слоя первые резонансные частоты отодвигаются вправо, а при  $\kappa > 15$  резонансные частоты совпадают для различных значений  $\theta$ .

Проследим влияние внутреннего трения на режимы работы системы. Для слоя, более жесткого, чем основание ( $\theta = 100$ ), изменение трения в основании Винклера (изменение  $\eta_1$ ) сказывается только на малых по величине частотах, а при  $\kappa > 0,2$  амплитуды для различных  $\eta_1$  совпадают. Значительное влияние на резонансные частоты системы наблюдается при изменении внутреннего трения слоя, т. е.  $\eta_2$ . На фиг. 2 при  $\delta = 5$ ,  $\theta = 1$ ,  $\eta_1 = 1$  представлены кривые 1, 2, 3, соответствующие значениям  $\eta_2$ , равным 0, 1, 1, 10. Анализ кривых показывает, что при уменьшении вязкости слоя резонансные частоты сдвигаются вправо (так у первой кривой при  $\kappa < 7$  три пика резонанса, а у третьей кривой — только один), а сами резонансные пики принимают несколько другой характер — становятся более размытыми.

Интересные моменты прослеживаются при численном анализе задачи о сдвиге жестким штампом упругого слоя, находящегося на упругом основании Винклера. Функция  $K(u)$  вида (1.10) этой задачи удовлетворяет всем требованиям, перечисленным в (2.1), (2.2), (3.2). Здесь можно получить представление о волновом характере напряжений под штампом и перемещений вне штампа, построив фазовую плоскость, подобно тому, как это делалось в [6]. Положив, как и выше, для простоты  $\rho_* = \rho h$ , будем менять параметры задачи  $\kappa$  и  $\theta$  в широких пределах. На фиг. 3 представлены в зависимости от  $\kappa$  кривые фазовых скоростей волн напряжений под штампом (штриховая линия) и фазовых скоростей волн перемещений вне штампа (сплошная линия) при  $\theta = 25$ . Видно, что при  $\theta \gg 1$  и  $\theta < \kappa^2$  характер нулей и полюсов такой же, как в задаче с жестким основанием. Первые же две кривые (полюсы и нули) резко возрастают по сравнению с другими кривыми и сильно сближаются. Отсюда и из структуры формул (2.6), (2.7) следует, что под штампом и вне штампа появляются волны с малой амплитудой, но с высокой фазовой скоростью. Это и характеризует указанный тип основания.



Аналогичные численные результаты можно получить и для задачи о вибрации жесткого штампа на вязкоупругом (упругом) слое, который лежит на вязкоупругом (упругом) основании Винклера. Именно: амплитуду нормальных напряжений под штампом и амплитуду нормальных перемещений вне штампа можно рассчитывать по формулам (2.7) и (3.4), (4.3) и (4.6) соответственно.

В заключение отметим, что аналогичным образом, основываясь на методах, изложенных в [1, 2, 6, 8, 10], можно рассмотреть осесимметричные задачи о кручении-вибрации и вдавливании-вибрации штампом вязкоупругого слоя, лежащего на вязкоупругом основании Винклера.

Авторы благодарят Н. Х. Арутюняна за внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бабешко В. А. Об одном асимптотическом методе при решении интегральных уравнений теории упругости и математической физике.— ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
2. Александров В. М. Об одном методе сведения парных интегральных уравнений и парных рядов-уравнений к бесконечным алгебраическим системам.— ПММ, 1975, т. 39, вып. 2.
3. Губенко В. С., Киселев М. Я., Ламзюк В. Д., Приварников А. К. К теории динамических задач для многослойных оснований.— Докл. АН УССР, сер. А, 1977, № 4.
4. Ананьев И. В., Бабешко В. А., Динамические контактные задачи для штампов с относительно малым радиусом.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 6.
5. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974.
6. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979.
7. Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.
8. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974.
9. Александров В. М., Белоконь А. В. Асимптотическое решение одного класса интегральных уравнений и его применение к контактным задачам для цилиндрических упругих тел.— ПММ, 1967, т. 31, вып. 4.
10. Александров В. М., Чебаков М. И. Смешанные задачи механики сплошных сред, связанные с интегральными преобразованиями Ханкеля и Мелера — Фока.— ПММ, 1972, т. 36, вып. 3.

Москва, Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию  
3.1.1980