

УДК 539.3 : 534.1

## К РАСПРОСТРАНЕНИЮ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ОТ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА ВНУТРИ АНИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Осипов И. О.

Исследуется полученное в [1] решение плоской задачи распространения упругих колебаний в анизотропном полупространстве с четырьмя упругими постоянными от точечного источника типа мгновенного импульса. При помощи результатов работ [2—4] изучены особенности распространения волн в зависимости от соотношений упругих постоянных. Рассмотрен случай, когда упругие постоянные удовлетворяют условиям, при которых волновые фронты не имеют остроугольных кромок. Для однозначного определения решения построена риманова поверхность и изучено соответствие между точками этой поверхности и волновых полей. Для определения падающих и отраженных волн на одной двулистной римановой поверхности введено понятие двуслойных областей определения отраженных волн. Получены выражения фронтов первичных возмущений, распространяющихся от источника, и вторичных возмущений, отраженных от границы полупространства.

Волновые процессы в анизотропных средах подчиняются более сложным закономерностям, чем в изотропных, так как уравнения движения среды не сводятся к волновым уравнениям. В отличие от изотропных сред с двумя типами волн (чисто продольными и чисто поперечными) в анизотропных средах могут существовать три типа волн (одна квазипродольная и две квазипоперечные), распространяющихся с различными скоростями. В тех и других волнах векторы смещений имеют нормальные и касательные составляющие к фронту, скорости распространения зависят от направления. Распространение волн качественно зависит от соотношений упругих постоянных. Рассмотрение этих вопросов представляет определенную трудность, поэтому полученные в работе [1] решения до сих пор полностью не изучены.

В плоской задаче при переходе от анизотропной среды к изотропной квазипродольная волна переходит в продольную, из квазипоперечных волн одна переходит в поперечную волну  $SV$  со смещениями, находящимися в плоскости распространения волны, другая — в поперечную волну  $SH$  со смещениями, перпендикулярными той же плоскости. Эти поперечные волны в отличие от квазипоперечных распространяются с одинаковой скоростью, составляя единую поперечную волну. По аналогии с изотропной средой соответствующие квазипоперечные волны будем называть волнами типа  $SV$  и  $SH$ .

Как и в работе [1], ограничимся изучением распространения волн первого типа (квазипродольных) и волн второго типа (квазипоперечных типа  $SV$ ). Эти волны существовать раздельно не могут. Изучение волн третьего типа (квазипоперечных типа  $SH$ ) тривиально.

1. Рассмотрим упругие колебания в анизотропном полупространстве  $y \geq 0$  с четырьмя упругими постоянными, вызванные точечным источником типа мгновенного импульса, помещенным в момент  $t = 0$  в точке  $x = 0, y = y_0$ . Аналогичное движение имеем и в среде с девятью упруги-

ми постоянными, если координатные плоскости совпадают с плоскостями упругой симметрии и колебания не зависят от координаты  $z$ .

Компоненты вектора смещений квазипродольной и квазипоперечной типа  $SV$  волн определяются выражениями

$$(1.1) \quad u_z = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 U(\theta_k, \lambda_k, w_k(\zeta)), \quad v = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 V(\theta_k, \lambda_k, w_k(\zeta))$$

$$U(\theta, \lambda, w(\zeta)) = c \int_{\theta}^{\theta} \zeta \lambda w(\zeta) d\zeta$$

$$V(\theta, \lambda, w(\zeta)) = \int_{\theta}^{\theta} (a\zeta^2 + d\lambda^2 - 1) w(\zeta) d\zeta$$

Нижние пределы интегралов произвольны; в частности, в качестве этих пределов могут быть взяты точки, в которых подынтегральные выражения фиксируются [1].

Комплексные переменные  $\theta_k$  и величины  $\lambda_k$  определяются соотношениями

$$(1.2) \quad 1 - \theta_k \xi + \lambda_k (\eta - \eta_0) = 0 \quad (\xi = x/t; \eta = y/t; \eta_0 = y_0/t)$$

$$\lambda_k = \left( \frac{[(a+b) - L\theta_k^2] + (-1)^k \sqrt{Q(\theta_k)}}{2bd} \right)^{1/2} \quad (k=1; 2)$$

$$Q(\theta_k) = [(b+d) - L\theta_k^2]^2 - 4bd(1 - a\theta_k^2)(1 - d\theta_k^2)$$

$$L = ab + d^2 - c^2$$

Функции  $\lambda_k$  — ветви алгебраической функции  $\lambda$ , однозначной на римановой поверхности, вид которой зависит от соотношений упругих постоянных и изучен в [3]. Функции  $w_k$  — ветви произвольной аналитической функции  $w$ , однозначной на двулистной римановой поверхности, которые выбираются так [2, 3], чтобы вещественные части их обращались в нуль на берегах разрезов вдоль вещественных осей плоскостей римановой поверхности, где  $\lambda_k$  принимают вещественные значения.

Для реальных сред рассматриваемого класса анизотропии отношения упругих постоянных к плотности удовлетворяют условиям

$$(1.3) \quad a > d, \quad b > d, \quad d > 0, \quad K_1 = ab - (c-d)^2 > 0$$

$$a = C_{11}/\rho, \quad b = C_{22}/\rho, \quad d = C_{33}/\rho, \quad c = (C_{36} + C_{12})/\rho$$

Когда эти величины удовлетворяют дополнительному условию

$$(1.4) \quad K_2 = ab - (c+d)^2 < 0$$

из четырех точек разветвления внутреннего радикала  $\lambda_k$

$$(1.5) \quad \theta_i^{\circ} = \left( \frac{M \pm \sqrt{-4bdc^2N_1}}{4K_1K_2} \right)^{1/2}$$

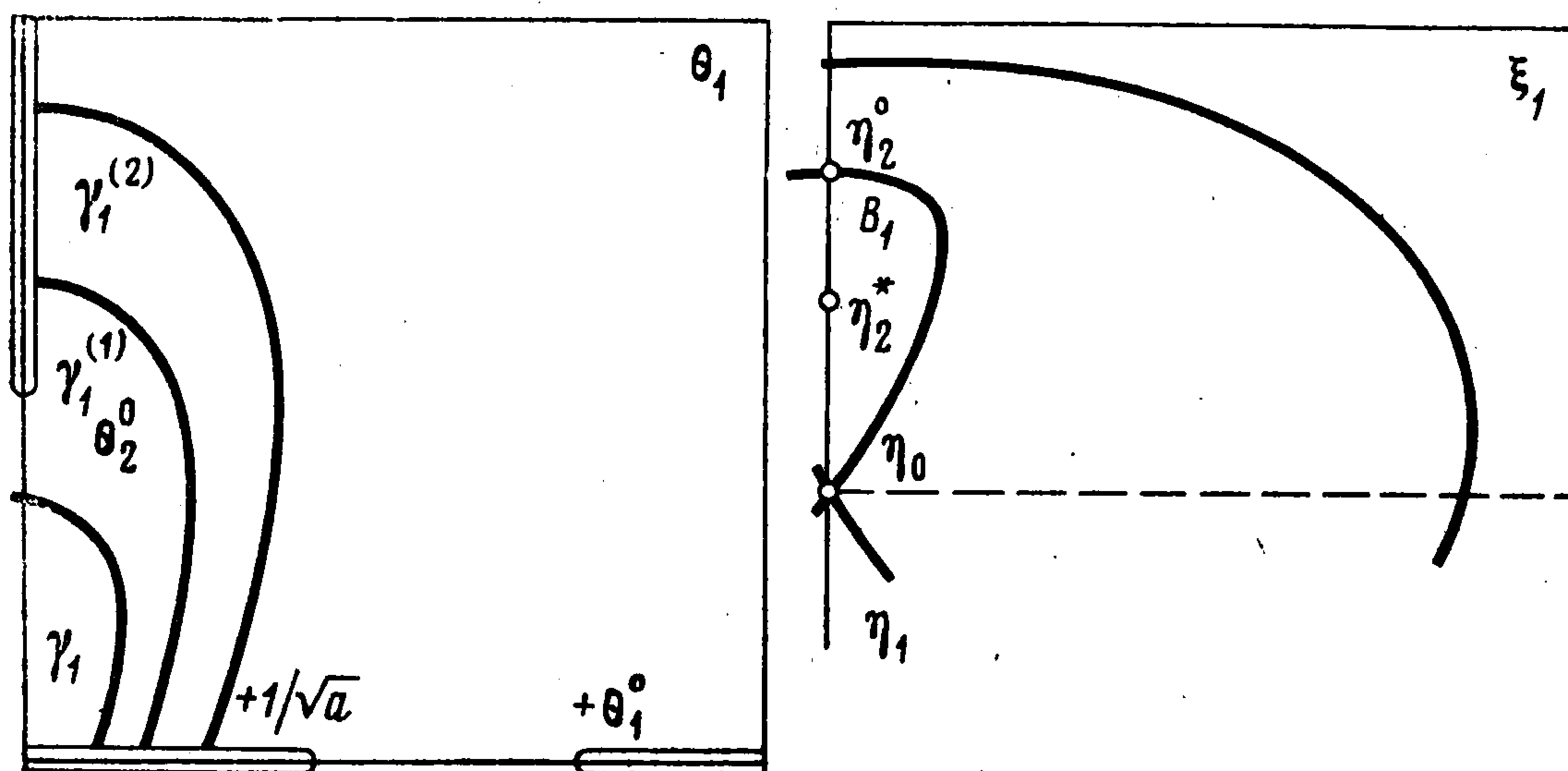
$$M = (b+d)N_1 - (b-d)(a-b)d, \quad N_1 = (a-d)(b-d) - c^2$$

две — вещественные, две — мнимые.

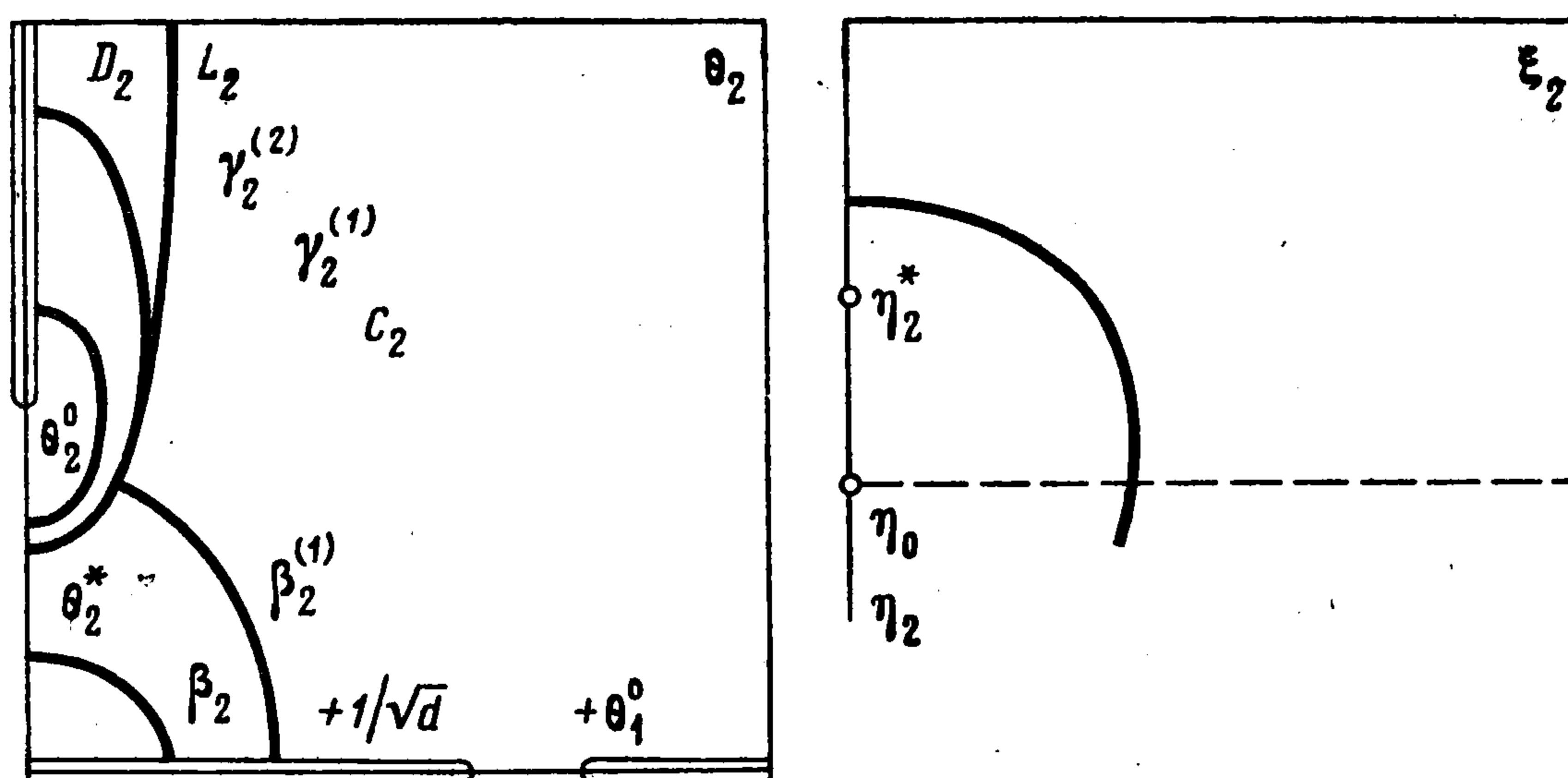
Распространение упругих волн в средах, удовлетворяющих условию (1.4), зависит от знаков величин

$$(1.6) \quad N_2 = (a-d)b - c^2, \quad N_3 = (b-d)a - c^2$$

2. Рассмотрим случай, когда  $N_2 > 0$  и  $N_3 > 0$ . Риманова поверхность согласно работе [4] имеет вид, изображенный на фиг. 1 и 2 (вид опущенных левых частей поверхностей симметричен приведенному); берега разрезов  $(\theta_i^0, \infty)$  плоскостей  $\theta_1$  и  $\theta_2$  склеены крест-накрест. Функции  $\lambda_k$  на плоскостях  $\theta_k$  зафиксированы так, чтобы они были положительны при



Фиг. 1



Фиг. 2

$\theta_k = i\beta$ , где  $\beta$  — достаточно малая положительная величина. Функции  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  принимают вещественные значения на берегах  $(-1/\sqrt{a}, +1/\sqrt{a})$  плоскости  $\theta_1$  и  $(-1/\sqrt{d}, +1/\sqrt{d})$  плоскости  $\theta_2$ ; соответственно на берегах этих разрезов вещественные части функций  $w_1$  и  $w_2$  обращаются в нуль.

Соответствие между точками плоскостей  $\theta_k$  и точками плоскости  $\xi\eta$  выражается соотношениями (1.2) и может быть установлено на основании результатов работы [4]. Будем считать, что квазипродольная волна распространяется в плоскости  $\xi_1\eta_1$  (фиг. 1), квазипоперечная — в плоскости  $\xi_2\eta_2$  (фиг. 2). В выражениях (1.2) индексы у координат точек, показывающие принадлежность плоскостям  $\xi_k\eta_k$ , не указаны.

Берегам разрезов  $(-1/\sqrt{a}, +1/\sqrt{a})$  плоскости  $\theta_1$  и  $(-1/\sqrt{d}, +1/\sqrt{d})$  плоскости  $\theta_2$  отвечают фронты квазипродольных и квазипоперечных волн с полукасательными к ним. В точках фронта квазипродоль-

ной волны и области, внешней к нему, обращаются в нуль члены решения (1.1) при  $k = 1$ ; в точках фронта квазипоперечной волны и области, внешней к нему — при  $k = 2$ . В областях плоскостей  $\xi_k \eta_k$ , внешних к фронтам волн, колебания отсутствуют.

Пока колебания (1.1) не достигают границы полупространства  $\eta_k = 0$  фронты квазипродольных и квазипоперечных волн представляют собой выпуклые замкнутые кривые [2] и могут быть выражены как огибающие прямых (1.2) при вещественных значениях  $\theta_k$  и  $\lambda_k$  в виде

$$(2.1) \quad \xi_k = -\lambda_k' / (\lambda_k - \theta_k \lambda_k'), \quad \eta_k = -1 / (\lambda_k - \theta_k \lambda_k') + \eta_0$$

Верхним берегам разрезов соответствуют верхние половины фронтов волн ( $\eta_k \leq \eta_0$ ), нижним берегам — нижние ( $\eta_k \geq \eta_0$ ).

Аналогично, верхним полуплоскостям  $\theta_k$  отвечают верхние половины волновых полей ( $\eta_k < \eta_0$ ), нижним — нижние ( $\eta_k > \eta_0$ ). Бесконечно удаленным точкам плоскостей  $\theta_k$  соответствуют на волновых полях точки  $\xi_k = 0$ ,  $\eta_k = \eta_0$ . Отрезкам  $(\pm 1 / \sqrt{a}, \pm \infty)$  и  $(\pm 1 / \sqrt{d}, \pm \infty)$  вещественных осей плоскостей  $\theta_1$  и  $\theta_2$  отвечают отрезки  $(-\sqrt{a}, +\sqrt{a})$  и  $(-\sqrt{d}, +\sqrt{d})$ , отсекаемые фронтами волн на горизонтальных осях симметрии волновых полей  $\eta_1 = \eta_0$  и  $\eta_2 = \eta_0$ .

На берегах разрезов ( $\theta_2^\circ, i\infty$ ) плоскостей  $\theta_k$  функции  $\lambda_k$  принимают комплексные значения. Склеюке левого (правого) берега разреза плоскости  $\theta_1$  и правого (левого) берега разреза плоскости  $\theta_2$  отвечает линия в левой (правой) верхней четверти поля квазипродольной волны. Концы этих линий совпадают в точках  $\eta_1 = \eta_2^\circ = -1 / \lambda_k(\theta_2^\circ) + \eta_0$  и  $\eta_1 = \eta_0$  оси координат, образуя замкнутый контур, ограничивающий в верхней половине поля квазипродольной волны область  $B_1$ , симметричную относительно этой оси. Остальную часть верхней половины поля квазипродольной волны обозначим  $A_1$ .

На участках  $(0, \theta_2^\circ)$  положительно мнимых полуосей плоскостей  $\theta_1$  и  $\theta_2$  функции  $\lambda_k$  имеют вещественные значения, причем  $\lambda_1(\theta_2^\circ) = \lambda_2(\theta_2^\circ)$ . Участкам  $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2^\circ$  и  $0 \leq \theta_2 \leq \theta_2^*$ , где [4]

$$(2.2) \quad \theta_2^* = i [-(\sqrt{ad}M + L\sqrt{c^2[c^2 - (a-d)(b-d)]}) / (\sqrt{ad}K_1K_2)]^{1/2}$$

отвечают участки  $(\eta_0 - \sqrt{b}) \leq \eta_1 \leq \eta_2^\circ$  и  $(\eta_0 - \sqrt{d}) \leq \eta_2 \leq \eta_2^*$  осей ординат  $\eta_1$  и  $\eta_2$ , приводимые в соответствие выражениями  $\eta_k = \eta_0 - 1 / \lambda_k$ . Участку  $\theta_2^\circ \geq \theta_2 \geq \theta_2^*$  положительно мнимой полуоси плоскости  $\theta_2$  отвечает участок  $\eta_2^\circ \leq \eta_1 \leq \eta_2^*$  оси ординат  $\eta_1$ , приводимый в соответствие выражением  $\eta_1 = \eta_0 - 1 / \lambda_2$  и принадлежащий области  $B_1$ .

Участкам  $(\eta_2^*, \eta_0)$  осей  $\eta_k$ , принадлежащим верхним половинам волновых полей, отвечают в первом и втором квадрантах плоскости  $\theta_2$  линии  $L_2$ , выходящие из точки  $\theta_2^* = i\varepsilon_2^*$  к бесконечно удаленной точке и выражаемые функциями [4]

$$(2.3) \quad \theta_2 = \pm [(A + \sqrt{A^2 - B}) / (\sqrt{ad}K_1K_2)]^{1/2} + i\varepsilon_2$$

$$A = \sqrt{ad} [M - (L^2 + 4abd^2)\varepsilon_2^2]$$

$$B = K_1K_2 \{adK_1K_2\varepsilon_2^4 + 2adM\varepsilon_2^2 + N_3[(b-d)d + c^2]\}$$

при значениях  $\varepsilon_2$  в интервале  $(\varepsilon_2^*, \infty)$ . Эти линии ограничивают в верхней полуплоскости  $\theta_2$  область  $D_2$ , симметричную относительно мнимой оси; остальную часть этой полуплоскости обозначим  $C_2$ . В силу симметрии соответствие между нижними половинами волновых полей и нижними полуплоскостями римановой поверхности такое же, что и для верхних.

Области  $A_1$  поля квазипродольной волны отвечает плоскость  $\theta_1$ , приводимая в соответствие соотношением (1.2) при  $k = 1$ . Смещения в этой области выражаются членами решения (1.1), определенными на плоскости  $\theta_1$ .

Областям  $B_1$  поля квазипродольной волны отвечают области  $D_2$  на плоскости  $\theta_2$ , приводимые в соответствие соотношением (1.2) при  $k = 2$ ; смещения в этих областях выражаются членами решения (1.1) при  $k = 2$ , определенными в области  $D_2$ .

Полю квазипоперечной волны отвечает область  $C_2$  на плоскости  $\theta_2$ , приводимая в соответствие соотношением (1.2) при  $k = 2$ ; смещения выражаются членами решения (1.1) при  $k = 2$ , определенными в области  $C_2$ .

В работе [1] указанные особенности определения решения (1.1) на римановой поверхности не исследованы; предполагалось, что квазипродольные смещения выражаются членами решения (1.1), определенными на плоскости  $\theta_1$ , квазипоперечные — членами решения (1.1), определенными на плоскости  $\theta_2$ .

При изображении волновой картины на плоскостях  $\xi_k \eta_k$  волновые поля от мгновенного импульса, приложенного в точке  $\xi_k = 0$ ,  $\eta_k = \eta_0$ , представляются областями, ограниченными замкнутыми кривыми (2.1), которые перемещаются с течением времени к границе полупространства  $\eta_k = 0$ , не претерпевая геометрических изменений вплоть до достижения границы. Центральные точки волновых полей движутся вдоль осей  $\eta_k$ , асимптотически приближаясь к границе полупространства. Прямые  $\eta_k = \eta_0$  делят волновые поля на две части; точки одной из них, для которой  $\eta_k = \eta_0$ , не встретят границу полупространства, точки другой, для которой  $\eta_k \geq \eta_0$ , с течением времени достигнут ее.

3. В момент времени  $t = y_0 / \sqrt{b}$  поле квазипродольных возмущений дойдет до границы полупространства, возбуждая два типа отраженных волн.

При  $\lambda_1(\theta_2^\circ)y_0 > t > y_0 / \sqrt{b}$ , когда  $\sqrt{b} > \eta_0 > 1 / \lambda_1(\theta_2^\circ)$ , до границы доходят квазипродольные возмущения  $A_1$ , характеризуемые первыми членами решения (1.1):

$$(3.1) \quad \begin{aligned} u_1 &= \operatorname{Re} U(\theta_1, \lambda_1, w_1(\zeta)) \\ v_1 &= \operatorname{Re} V(\theta_1, \lambda_1, w_1(\zeta)) \end{aligned}$$

Переменная  $\theta_1$  определяется соотношением

$$(3.2) \quad 1 - \theta_1 \xi_1 + \lambda_1(\eta_1 - \eta_0) = 0$$

Отраженные квазипродольные и квазипоперечные возмущения выражаются функциями

$$(3.3) \quad u_{11} = \operatorname{Re} U\left(\theta_{11}, \lambda_1, \frac{R_1(\zeta) w_1(\zeta)}{R(\zeta)(\lambda_1 - \lambda_2)}\right)$$

$$\begin{aligned} v_{11} &= \operatorname{Re} V \left( \theta_{11}, \lambda_1, \frac{R_1(\zeta) w_1(\zeta)}{R_1(\zeta)(\lambda_1 - \lambda_2)} \right) \\ u_{12} &= \operatorname{Re} U \left( \theta_{12}, \lambda_2, \frac{A(\zeta; \lambda_1) w_1(\zeta)}{R(\zeta)(\lambda_1 - \lambda_2)} \right) \\ v_{12} &= \operatorname{Re} V \left( \theta_{12}, \lambda_2, \frac{A(\zeta; \lambda_1) w_1(\zeta)}{R(\zeta)(\lambda_1 - \lambda_2)} \right) \end{aligned}$$

Переменные  $\theta_{11}$  и  $\theta_{12}$  определяются соотношениями

$$(3.4) \quad \begin{aligned} 1 - \theta_{11}\xi_{11} - \lambda_1(\eta_{11} + \eta_0) &= 0, & 1 - \theta_{12}\xi_{12} - \lambda_2\eta_{12} - \lambda_1\eta_0 &= \\ &= 0 \end{aligned}$$

Отметим, что в работе [1] в выражениях (19), соответствующих выражениям (3.4), допущены опечатки — в правой части выражения (23) потерял множитель  $\lambda_1 W_1(\theta) / (\lambda_1 - \lambda_2)$ .

Участку границы полупространства, которого достигли квазипродольные возмущения (3.1), соотношение (3.2) ставит в соответствие на верхней полуплоскости  $\theta_1$  отрезок  $\gamma_1$ , который расположен симметрично относительно мнимой оси, пересекает последнюю в точке  $\theta_1 < \theta_2^\circ$  и подходит концами к точкам верхнего берега разреза  $(-1/\sqrt{a}, +1/\sqrt{a})$ . Область, ограниченную отрезком  $\gamma_1$  и участком верхнего берега разреза, обозначим  $D_1$ . Точкам области  $D_1$  отвечают точки поля падающей квазипродольной волны, прошедшие границу полупространства, участку верхнего берега разреза между концевыми точками отрезка  $\gamma_1$  — участок фронта падающей волны, прошедшей границу. Решение (3.1) в точках области  $D_1$  теряет физический смысл. В рассматриваемый момент времени падающие волны выражаются функциями (1.1), определенными на части римановой поверхности, не содержащей область  $D_1$ .

Каждой точке падающего волнового поля, прошедшей границу полупространства, на полях квазипродольной и квазипоперечной отраженных волн соответствует по точке, которым соотношения (3.4) ставят в соответствие комплексные точки  $\theta_{11}$  и  $\theta_{12}$ . Точки  $\theta_{11}$  и  $\theta_{12}$  заполняют те же области на комплексной плоскости, что и точки  $\theta_1$ , отвечающие точкам поля падающей волны, прошедшим границу полупространства. На границе полупространства  $\theta_1 = \theta_{11} = \theta_{12}$ . Можно считать, что при прохождении точками падающего волнового поля границы полупространства соответствующие им точки  $\theta_1$  расщепляются на  $\theta_{11}$  и  $\theta_{12}$ , образуя на верхней полуплоскости  $\theta_1$  двуслойную область  $D_1$ . Точкам  $\theta_{11}$  одного слоя соотношение (3.4) ставит в соответствие точки поля квазипродольной отраженной волны, точкам  $\theta_{12}$  другого слоя соотношение (3.4) ставит в соответствие точки поля квазипоперечной отраженной волны. В рассматриваемые моменты времени квазипродольные и квазипоперечные отраженные волны выражаются функциями (3.3), определенными в двуслойной области  $D_1$ , которая с течением времени расширяется.

Фронты квазипродольной и квазипоперечной отраженных волн выражаются как огибающие прямых (3.4) при вещественных значениях  $\theta_{11}$ ,  $\theta_{12}$  и  $\lambda_k$  в виде

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \xi_{11} &= -\lambda_1' / (\lambda_1 - \theta_{11}\lambda_1'), & \eta_{11} &= 1 / (\lambda_1 - \theta_{11}\lambda_1') - \eta_0 \\ \xi_{12} &= -\lambda_2'\eta_{12} - \lambda_1'\eta_0, & \eta_{12} &= [1 - (\lambda_1 - \theta_{12}\lambda_1')\eta_0] / (\lambda_2 - \theta_{12}\lambda_2') \end{aligned}$$

и определяются участком верхнего берега разреза  $(-1/\sqrt{a}, +1/\sqrt{a})$ , заключенным между концами отрезка  $\gamma_1$ .

В момент времени  $t = \lambda_2 (\theta_2^\circ) y_0$  до границы полупространства доходят квазипродольные возмущения области  $B_1$ , выражаемые вторыми членами решения (1.1), определенными в области  $D_2$  плоскости  $\theta_2$ :

$$(3.6) \quad u_1^* = \operatorname{Re} U(\theta_2, \lambda_2, w_2(\zeta)), \quad v_1^* = \operatorname{Re} V(\theta_2, \lambda_2, w_2(\zeta))$$

Переменная  $\theta_2$  определяется соотношением

$$(3.7) \quad 1 - \theta_2 \xi_1 + \lambda_2 (\eta_1 - \eta_0) = 0$$

Отраженные квазипродольные и квазипоперечные возмущения, вызываемые возмущениями (3.6), выражаются функциями

$$(3.8) \quad \begin{aligned} u_{11}^* &= \operatorname{Re} U\left(\theta_{21}, \lambda_2 \frac{R_1(\zeta) w_2(\zeta)}{R(\zeta)(\lambda_2 - \lambda_1)}\right) \\ v_{11}^* &= \operatorname{Re} V\left(\theta_{21}, \lambda_2 \frac{R_1(\zeta) w_2(\zeta)}{R(\zeta)(\lambda_2 - \lambda_1)}\right) \\ u_{12}^* &= \operatorname{Re} U\left(\theta_{22}, \lambda_1 \frac{A(\zeta; \lambda_2) w_2(\zeta)}{R(\zeta)(\lambda_2 - \lambda_1)}\right) \\ v_{12}^* &= \operatorname{Re} V\left(\theta_{22}, \lambda_1 \frac{A(\zeta; \lambda_2) w_2(\zeta)}{R(\zeta)(\lambda_2 - \lambda_1)}\right) \end{aligned}$$

Переменные  $\theta_{21}$  и  $\theta_{22}$  определяются соотношениями

$$(3.9) \quad \begin{aligned} 1 - \theta_{21} \xi_{11}^* - \lambda_2 (\eta_{11}^* + \eta_0) &= 0 \\ 1 - \theta_{22} \xi_{12}^* - \lambda_1 \eta_{12}^* - \lambda_2 \eta_0 &= 0 \end{aligned}$$

Функции (3.8) имеют такой же вид, как и решение (32) в работе [1], однако последнее выражает квазипоперечные и квазипродольные отраженные возмущения, возбуждаемые квазипоперечной падающей волной. Заметим, что в работе [1] в выражении для  $V_4$  допущена опечатка: в подынтегральной функции опущен множитель  $R_1(\zeta)/R(\zeta)$ .

При  $\lambda_2 (\theta_2^*) y_0 > t > \lambda_2 (\theta_2^\circ) y_0$ , когда  $1/\lambda_2 (\theta_2^\circ) > \eta_0 > 1/\lambda_2 (\theta_2^*)$ , часть области  $B_1$  падающего квазипродольного волнового поля пройдет границу полупространства, а точка  $\eta_2^*$  этой области еще не достигнет границы.

Участкам границы полупространства, с которыми контактируют квазипродольные возмущения области  $A_1$ , соотношение (3.2) ставит в соответствие отрезки  $\gamma_1^{(1)}$  на верхней полуплоскости  $\theta_1$ , идущие от берегов разреза  $(+\theta_2^\circ, \infty)$  к верхнему берегу разреза  $(-1/\sqrt{a}, +1/\sqrt{a})$  и расположенные симметрично относительно мнимой оси. Области  $D_1^{(1)}$ , ограниченной отрезками  $\gamma_1^{(1)}$  и участком верхнего берега разреза, отвечают точки области  $A_1$ , прошедшие границу полупространства.

Точкам  $\theta_{11}$  и  $\theta_{12}$  двуслойной области  $D_1^{(1)}$  соотношения (3.4) ставят в соответствие точки областей  $A_{11}$  и  $A_{12}$  квазипродольных и квазипоперечных отраженных возмущений, выражаемых функциями (3.3).

Участку границы полупространства, которого достигли квазипродольные возмущения области  $B_1$ , выражаемые функциями (3.6), соотношение (3.7) ставит в соответствие линию  $\gamma_2^{(1)}$  в области  $D_2$  на верхней полуплоскости  $\theta_2$ , которая является продолжением отрезка  $\gamma_1^{(1)}$  в плоскости

$\theta_1$ . Области  $D_2^{(1)}$ , ограниченной линией  $\gamma_2^{(1)}$ , отвечают точки области  $B_1$ , прошедшие границу полупространства.

Точкам  $\theta_{21}$  и  $\theta_{22}$  двуслойной области  $D_2^{(1)}$  соотношения (3.9) ставят в соответствие точки областей  $A_{11}^*$  и  $A_{12}^*$  квазипродольных и квазипоперечных отраженных возмущений, выражаемых функциями (3.8).

На противоположных берегах разрезов  $(+\theta_2^\circ, \infty)$  плоскостей  $\theta_1$  и  $\theta_2$  функции  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  принимают одинаковые значения. Участкам этих берегов разрезов, заключенным между точками  $\theta_2^\circ$  и концами линий  $\gamma_1^{(1)}$  и  $\gamma_2^{(1)}$ , первые соотношения (3.4) и (3.9) ставят в соответствие границу между областями  $A_{11}$  и  $A_{11}^*$  поля квазипродольной отраженной волны, вторые соотношения (3.4) и (3.9) — границу между областями  $A_{12}$  и  $A_{12}^*$  поля квазипоперечной отраженной волны.

Если  $t > \lambda_2(\theta_2^*)y_0$ , то  $1/\lambda_2(\theta_2^*) > \eta_0$  и точка  $\eta_2^*$  области  $B_1$  поля квазипродольной падающей волны пройдет границу полупространства. Как и в предыдущем случае, отраженные волны описываются функциями (3.3) и (3.8), однако область  $D_1^{(1)}$  на плоскости  $\theta_1$  будет ограничена линиями  $\gamma_1^{(2)}$ , а область  $D_2^{(1)}$  на плоскости  $\theta_2$  — линиями  $\gamma_2^{(2)}$  и участком линии  $L_2$ , заключенным между линиями  $\gamma_2^{(2)}$ .

4. В момент времени  $t = y_0 / \sqrt{d}$  до границы полупространства доходят квазипоперечные возмущения, выражаемые вторыми членами решения (1.1), определенными в области  $C_2$  плоскости  $\theta_2$ :

$$(4.1) \quad \begin{aligned} u_2 &= \operatorname{Re} U(\theta_2, \lambda_2, w_2(\zeta)) \\ v_2 &= \operatorname{Re} V(\theta_2, \lambda_2, w_2(\zeta)) \end{aligned}$$

Переменная  $\theta_2$  определяется соотношением

$$(4.2) \quad 1 - \theta_2 \xi_2 + \lambda_2(\eta_2 - \eta_0) = 0$$

Отраженные квазипродольные и квазипоперечные возмущения, вызываемые возмущениями (4.1), выражаются функциями

$$(4.3) \quad \begin{aligned} u_{21} &= \operatorname{Re} U\left(\theta_{21}, \lambda_1, \frac{A(\zeta; \lambda_2) w_2(\zeta)}{R(\zeta)(\lambda_2 - \lambda_1)}\right) \\ v_{21} &= \operatorname{Re} V\left(\theta_{21}, \lambda_1, \frac{A(\zeta; \lambda_2) w_2(\zeta)}{R(\zeta)(\lambda_2 - \lambda_1)}\right) \\ u_{22} &= \operatorname{Re} U\left(\theta_{22}, \lambda_2, \frac{R_1(\zeta) w_2(\zeta)}{R(\zeta)(\lambda_2 - \lambda_1)}\right) \\ v_{22} &= \operatorname{Re} V\left(\theta_{22}, \lambda_2, \frac{R_1(\zeta) w_2(\zeta)}{R(\zeta)(\lambda_2 - \lambda_1)}\right) \end{aligned}$$

Переменные  $\theta_{21}$  и  $\theta_{22}$  определяются соотношениями

$$(4.4) \quad \begin{aligned} 1 - \theta_{21} \xi_{21} - \lambda_1 \eta_{21} - \lambda_2 \eta_0 &= 0 \\ 1 - \theta_{22} \xi_{22} - \lambda_2(\eta_{22} + \eta_0) &= 0 \end{aligned}$$

При  $\lambda_2(\theta_2^*)y_0 > t > y_0 / \sqrt{d}$ , когда  $\sqrt{d} > \eta_0 > 1/\lambda_2(\theta_2^*)$ , часть поля падающей квазипоперечной волны пройдет границу полупространства, точка  $\eta_2^*$  этого поля не достигнет границы.

Участку границы полупространства, которого достигли возмущения (4.1), соотношение (4.2) ставит в соответствие в области  $C_2$  верхней полуплоскости  $\theta_2$  линию  $\beta_2$ , пересекающую мнимую ось внутри участка  $(0,$

$\theta_2^*$ ). При  $t = \lambda_2 (\theta_2^*) y_0$  точка  $\eta_2^*$  поля квазипоперечных возмущений достигает границы полупространства, линия  $\beta_2$  пересекает мнимую ось в точке  $\theta_2^*$ .

Области  $C_2^{(1)}$ , ограниченной линией  $\beta_2$  и участком верхнего берега разреза  $(-1/\sqrt{d}, +1/\sqrt{d})$ , отвечает часть поля падающей квазипоперечной волны, прошедшей границу полупространства.

При  $t > \lambda_2 (\theta_2^*) y_0$ , когда  $1/\lambda_2 (\theta_2^*) > \eta_0$ , точка  $\eta_2^*$  поля квазипоперечной падающей волны пройдет границу полупространства. Участку границы полупространства, которого достигли квазипоперечные возмущения, соотношение (4.2) ставит в соответствие в области  $C_2$  верхней полуплоскости  $\theta_2$  линии  $\beta_2^{(1)}$ , идущие от верхнего берега разреза  $(-1/\sqrt{d}, +1/\sqrt{d})$  к линии  $L_2$  и расположенные симметрично относительно мнимой оси. Участку линии  $L_2$ , заключенному между концами линий  $\beta_2^{(1)}$ , отвечают на оси  $\eta_2$  точки  $\eta_2 \geq \eta_2^*$  поля квазипоперечной волны, прошедшие границу полупространства. В отличие от предыдущего случая область  $C_2^{(1)}$  ограничена линиями  $\beta_2^{(1)}$  и участками линии  $L_2$  и верхнего берега разреза  $(-1/\sqrt{d}, +1/\sqrt{d})$ .

Решение (4.1) в точках области  $C_2^{(1)}$  теряет физический смысл. Точкам  $\theta_{21}$  и  $\theta_{22}$  двуслойной области  $C_2^{(1)}$  соотношения (4.4) ставят в соответствие точки полей квазипродольных и квазипоперечных отраженных волн, выражаемых функциями (4.3).

Коэффициенты при  $w_2(\zeta)$  в выражениях (4.3) содержат функцию  $\lambda_1$ , которая в интервале  $(-1/\sqrt{a}, +1/\sqrt{a})$  имеет вещественные значения, в интервалах  $(\pm 1/\sqrt{a}, \pm 1/\sqrt{d})$  — мнимые.

Если точки участка границы двуслойной области  $C_2^{(1)}$ , принадлежащего верхнему берегу разреза  $(-1/\sqrt{d}, +1/\sqrt{d})$ , удовлетворяют условию  $-1/\sqrt{a} \leq \theta_{2i} \leq +1/\sqrt{a}$ , коэффициенты при  $w_2(\zeta)$  принимают вещественные значения, а решения (4.3) обращаются в нуль.

Фронты квазипродольных и квазипоперечных отраженных волн совпадают с огибающими прямых (4.4) и на участке границы двуслойной области  $C_2^{(1)}$ , принадлежащем верхнему берегу разреза, выражаются функциями

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \xi_{21} &= -\lambda_1' \eta_{21} - \lambda_2' \eta_0, \quad \eta_{21} = [1 - (\lambda_2 - \theta_{21} \lambda_2') \eta_0] / (\lambda_1 - \theta_{21} \lambda_1') \\ \xi_{22} &= -\lambda_2' / (\lambda_2 - \theta_{22} \lambda_2'), \quad \eta_{22} = 1 / (\lambda_2 - \theta_{22} \lambda_2') - \eta_0 \end{aligned}$$

Когда участок границы области  $C_2^{(1)}$ , принадлежащий верхнему берегу разреза, перекроет интервал  $(-1/\sqrt{a}, +1/\sqrt{a})$ , выходя за его границы, в точках  $\theta_{21}$  и  $\theta_{22}$  интервалов  $(\pm 1/\sqrt{a}, \pm 1/\sqrt{d})$  коэффициенты при  $w_2(\zeta)$  принимают комплексные значения, а решения (4.3) не обращаются в нуль.

В точках  $\theta_{21}$  первое соотношение (4.4) распадается на два уравнения

$$(4.6) \quad 1 - \theta_{21} \xi_{21} - \lambda_2 \eta_0 = 0, \quad \eta_{21} = 0$$

т. е. отраженные квазипродольные возмущения распространяются вдоль границы полупространства, не проникая вглубь.

Участки огибающей прямой, выражаемой вторым соотношением (4.4), для значений  $\theta_{22}$  из интервала  $(\pm 1/\sqrt{a}, \pm 1/\sqrt{d})$  не совпадают с фронтом

отраженных квазипоперечных возмущений, так как на них значения третьего и четвертого выражений (4.3) отличны от нуля. Чтобы удовлетворить граничным условиям, продолжим решение, выражаемое третьей и четвертой функциями (4.3), вдоль полукасательных к участкам огибающей прямой (4.4) при значениях  $\theta_{22}$  из интервалов  $(\pm 1/\sqrt{a}, \pm 1/\sqrt{d})$ .

Эти участки огибающей с плоскостью  $\eta_2 = 0$  и полукасательными, соответствующими значениям  $\theta_{22} = \pm 1/\sqrt{a}$ , ограничивают область прямых возмущений. Точки фронта квазипоперечной волны (4.1), соответствующие значениям  $\theta_2$  в интервале  $(\pm 1/\sqrt{a}, \pm 1/\sqrt{d})$ , достигнув границы полупространства, вызывают отраженные квазипродольные возмущения, которые, распространяясь вдоль границы быстрее квазипоперечной волны, возбуждают в свою очередь квазипоперечную волну, опережающую квазипоперечную волну, отраженную по обычному закону.

В этом случае фронт отраженной квазипоперечной волны определяется вторыми выражениями (4.5) в интервале  $-1/\sqrt{a} \leq \theta_{22} \leq +1/\sqrt{a}$  и двумя полукасательными, соответствующими значениям  $\theta_{22} = \pm 1/\sqrt{a}$ , фронт отраженной квазипродольной волны — первыми выражениями (4.5) в интервале  $-1/\sqrt{a} \leq \theta_{21} \leq +1/\sqrt{a}$ .

В заключение отметим, что в отличие от распространения волн в изотропной среде волновой процесс в анизотропном полупространстве необходимо рассматривать как единый сложный процесс, состоящий из первичных квазипродольных и квазипоперечных возмущений, распространяющихся от источника, и вторичных квазипродольных и квазипоперечных возмущений, отраженных от границы полупространства.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Свекло В. А. Упругие колебания анизотропного тела. — Уч. зап. ЛГУ. Сер. матем. наук, 1949, вып. 17.
2. Осипов И. О. К плоской задаче распространения упругих колебаний в анизотропной среде от точечного источника. — ПММ, 1969, т. 33, вып. 3, с. 548.
3. Осипов И. О. К плоской задаче о точечном источнике колебаний типа мгновенного импульса внутри анизотропной среды. Сб. Распространение упругих и упруго-пластических волн. Ташкент: ФАН, 1969.
4. Осипов И. О. О волновых полях и остроугольных кромках на волновых фронтах в анизотропной среде от точечного источника. — ПММ, 1972, т. 36, вып. 5, с. 927.

Петрозаводск

Поступила в редакцию  
20.11.1980