

УДК 539.3

## АНТИПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ В ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Сулим Г. Т.

Предлагается методика решения задачи антиплоского сдвига двух полупространств с тонкостенным ленточным включением произвольной механической природы на границе раздела материалов. Результаты обобщаются на случай систем искривленных включений в однородном пространстве и полупространстве. В основу метода положено моделирование включений неизвестным заранее скачком касательных напряжений и перемещений. Определяется зависимость напряженного состояния среды от функций скачка и внешнего нагружения. Вводятся в рассмотрение два обобщенных коэффициента интенсивности напряжений и установлены асимптотические выражения для поля напряжений и перемещений в окрестности края включения. Строятся условия взаимодействия упругого включения со средой и рассматривается пример упругого включения на границе раздела материалов. Обсуждается влияние формы включения, варьируемой по определенной зависимости от эллиптической до прямоугольной, на концентрацию напряжений.

Задача антиплоской деформации тела с упругим дугообразным включением была ранее рассмотрена в [1]. Тематика данной работы соприкасается с исследованиями антиплоских задач для тел с разрезами [2], а ввиду известной аналогии близка к вопросам стационарной теплопроводности для тел с теплопроницаемыми трещинами [3].

1. Включение на линии раздела материалов. Пусть тонкостенное включение расположено на прямой линии раздела двух материалов, которая совпадает с осью  $Ox$  системы координат  $xOy$ . Необходимо различать комплексную переменную  $z = x + iy$  и координату  $z$ . Внешняя нагрузка определяется однородным полем касательных напряжений на бесконечности  $\tau_{yz}^\infty = \tau$ ,  $\tau_{xz}^\infty = \tau_k$ , а также силами  $Q_k$ , действующими в точках  $z_{ck} \in S_k$  ( $k = 2$  для верхней полуплоскости  $S_2$ ,  $k = 1$  для нижней полуплоскости  $S_1$ ). Включение предполагается настолько тонким, что его действие возможно моделировать некоторым скачком напряжений  $\tau_{yz}$  и перемещений  $w$  на срединной линии  $L_0'$  прослойки

$$(1.1) \quad \tau_{yz}^- - \tau_{yz}^+ = f_5(x), \quad w^- - w^+ = f_6(x) \quad (x \in L_0)$$

Здесь и в дальнейшем индексами плюс и минус отмечены предельные значения соответствующих величин на верхней и нижней кромке линии  $L_0$ , представляющей ось абсцисс;  $w = w(x, y)$  — перемещение в направлении оси  $Oz$ , штрих означает производную по аргументу,  $f_5(x) = f_6(x) = 0$  при  $x \in L_0'$ .

С учетом закона Гука

$$(1.2) \quad \tau_{yz} = \mu \partial w / \partial y, \quad \tau_{xz} = \mu \partial w / \partial x$$

где  $\mu$  — модуль сдвига материала в рассматриваемой точке, соотношениям (1.1) придадим вид

$$(1.3) \quad \tau_{yz}^- - \tau_{yz}^+ = f_5(x), \quad \tau_{xz}^- / \mu_1 - \tau_{xz}^+ / \mu_2 = f_6(x) \quad (x \in L_0)$$

В каждой из полуплоскостей для компонент напряжений и смещения  $w$  имеет место представление

$$(1.4) \quad \tau_{yz} + i\tau_{xz} = \omega'(z), \quad w = [\text{Im } \omega(z)] / \mu_k \quad (z \in S_k)$$

$$\omega'(z) = \tau + i\tau_k + iS(z) + \omega_0'(z), \quad S(z) = \sum_{k=1,2} \{Q_k [2\pi(z - z_{ck})]^{-1}\}$$

причем  $\omega_0'(z)$  — функция, голоморфная в каждой из полуплоскостей в отдельности и стремящаяся к нулю на бесконечности.

Подставляя первое из соотношений (1.4) в условия (1.3) и решая соответствующие задачи линейного сопряжения предельных значений, подобно тому, как это делается в работе [4], получим

$$(1.5) \quad \omega'(z) = ip_k t_5^\circ(z) - ct_6^\circ(z) + c_k(z), \quad c_k(z) = \tau + i[\tau_k + S(z) + n_{kl} p_k S^*(z)]$$

$$t_r^m(z) = \frac{1}{\pi} \int_{L_m'} \frac{f_r(t) dt}{t - z}, \quad S^*(z) = S_l(z) + \bar{S}_k(z)$$

$$p_k = \frac{\mu_k}{\mu_1 + \mu_2}, \quad S_k(z) = Q_k [2\pi(z - z_{ck})]^{-1}$$

$$n_{kl} = \frac{\mu_k - \mu_l}{\mu_k}, \quad c = p_k \mu_l \quad (z \in S_k; r = 5, 6; k, l = 1, 2; k \neq l)$$

а также условие  $\tau_1 \mu_2 = \tau_2 \mu_1$  для напряжений на бесконечности.

Таким образом

$$(1.6) \quad \tau_{yz}(z) + i\tau_{xz}(z) = ip_k t_5^\circ(z) - ct_6^\circ(z) + \tau_{yz}^\circ(z) + i\tau_{xz}^\circ(z)$$

причем  $\tau_{yz}^\circ(z) + i\tau_{xz}^\circ(z) \equiv c_k(z)$  — напряжения в соответствующей точке области при отсутствии включений. Применение формул Сохоцкого — Племеля позволяет определить предельные значения напряжений

$$(1.7) \quad \tau_{yz}^\pm(z) = \mp p_k f_5(x) - ct_6^\circ(x) + \tau_{yz}^{\circ\pm}(x), \quad \tau_{xz}^\pm(x) =$$

$$= \mp c f_6(x) + p_k t_5^\circ(x) + \tau_{xz}^{\circ\pm}(x)$$

Значение  $k = 2$  соответствует верхнему знаку,  $k = 1$  — нижнему.

2. Система прямолинейных включений в изотропном теле. Рассмотрим  $N + 1$  тонкостенное включение в однородной изотропной плоскости (пространстве) (фиг. 1). Внешнюю нагрузку определяют напряжения на бесконечности  $\tau_{yz0}^\infty = \tau$ ,  $\tau_{xz0}^\infty = \tau_1$  и сила  $Q_1$  в точке  $z_{c1}^\circ$  основной системы координат  $x_0 O_0 y_0$ . Срединная линия  $L_p'$   $p$ -го включения ( $p = 0, 1, \dots, N$ ) принадлежит оси абсцисс  $L_p$  локальной системы  $x_p O_p y_p$ , определяющей комплексную переменную  $z_p = x_p + iy_p$ . Координаты точки  $O_p$  в основной системе определяются значениями  $z_0 = z_{0p}$ , ось  $x_p$  образует с осью  $x_0$  угол  $\alpha_p$  ( $z_{00} = 0$ ,  $\alpha_0 = 0$ ).

Внешняя нагрузка при отсутствии включений определяет в основной системе потенциал

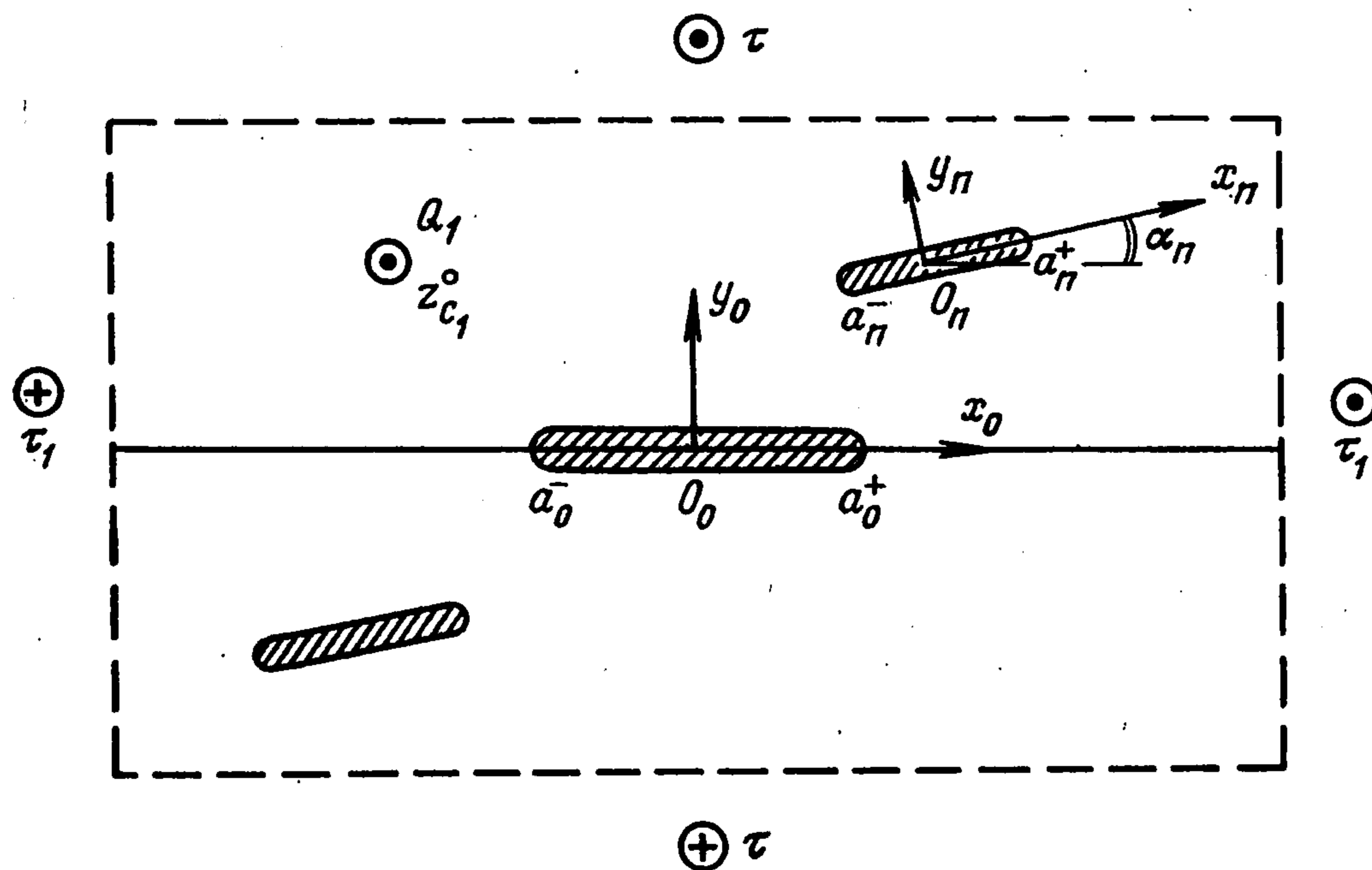
$$\omega_{00}'(z_0) = \tau + i\tau_1 + iS_0^\circ(z_0)$$

$$S_0^p(z_p) = Q_1 [2\pi(z - z_{c1}^p)]^{-1}, \quad z_{c1}^p = (z_{c1}^\circ - z_{0n}) \exp(-i\alpha_p)$$

Для одного включения вдоль линии  $L_m'$  однородной плоскости, которое определяет скачок напряжений  $f_{5m}^*(x) = f_{5m}(x) + i\mu f_{6m}(x)$  согласно (1.5), комплексный потенциал в  $m$ -й системе координат равен

$$\omega_m'(z_m) = \frac{i}{2} t_{5m}^{m*}(z_m), \quad t_{5m}^{m*}(z_m) = t_{5m}^m(z_m) + i\mu t_{6m}^m(z_m)$$

Обозначив через  $\omega_m^{p'}(z_p)$ ,  $\omega_{0p}'(z_p)$  выражения для потенциалов  $\omega_m'(z_m)$ ,  $\omega_{00}'(z_0)$  в  $p$ -й системе,  $\tau_{xzm}$ ,  $\tau_{yzm}$  — напряжения в  $m$ -й системе,



Фиг. 1

с учетом равенства  $\tau_{yz0} + i\tau_{xz0} = (\tau_{yzm} + i\tau_{xzm}) \exp(-i\alpha_m)$  можно записать [1]

$$\begin{aligned} \omega_m^{p'}(z_p) &= \omega_m'(z_m^{p'}) \exp(i\alpha_{pm}), \quad \omega_{0p}'(z_p) = iS_0^p(z_p) + \\ &+ (\tau + i\tau_1) \exp(i\alpha_p) \\ z_m^{p'} &= (Z_p - z_{0m}) \exp(-i\alpha_m), \quad Z_p = z_p \exp(i\alpha_p) + z_{0p}, \\ \alpha_{pm} &= \alpha_p - \alpha_m \end{aligned}$$

На основе принципа суперпозиции, который в этих условиях вполне применим, решение поставленной задачи в  $p$ -й системе координат определяется потенциалом

$$(2.1) \quad \omega^{p'}(z_p) = \sum_{m=0}^N \omega_m^{p'}(z_p) + \omega_{0p}'(z_p)$$

Тогда напряжения в произвольной точке плоскости равны

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \tau_{yzp}(z_p) + i\tau_{xzp}(z_p) &= \omega^{p'}(z_p) = \\ &= \frac{i}{2\pi} \sum_{m=0}^N \int_{L_m'} P_{pm}(t, z) f_{5m}^*(t) dt + \tau_{yzp}^{\circ}(z_p) + i\tau_{xzp}^{\circ}(z_p) \end{aligned}$$

$$(p = 0, 1, \dots, N)$$

причем  $\tau_{yzp}^{\circ}$ ,  $\tau_{xzp}^{\circ}$  — компоненты тензора напряжений в соответствующей точке плоскости при отсутствии включений

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \tau_{yzp}^{\circ}(z_p) + i\tau_{xzp}^{\circ}(z_p) &= iS_0^p(z_p) + (\tau + i\tau_1) \exp(i\alpha_p) \\ P_{pm}(t, z) &= (T_m - Z_p)^{-1} \exp(i\alpha_p), \quad T_m = t \exp(i\alpha_m) + z_{0m} \end{aligned}$$

Использование формул Сохоцкого — Племяля дает следующие выражения для предельных значений на линии  $L_p'$ :

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \tau_{yzp}^{\pm}(x_p) + i\tau_{xzp}^{\pm}(x_p) &= \\ &= \mp \frac{i}{2} f_{5p}^*(x_p) + \frac{i}{2\pi} \sum_{m=0}^N \int_{L_m'} P_{pm}(t, x) f_{5m}^*(t) dt + \\ &+ \tau_{yzp}^{\circ}(x_p) + i\tau_{xzp}^{\circ}(x_p) \\ P_{pm}(t, x) &= (T_m - X_p)^{-1} \exp(i\alpha_p), \quad X_p = x_p \exp(i\alpha_p) + z_{0p} \\ (p &= 0, 1, \dots, N) \end{aligned}$$

Формулы (2.2), (2.4) имеют место при любых функциях скачка. Если они неизвестны, необходимо воспользоваться условиями взаимодействия включения с матрицей

$$(2.5) \quad \Phi_p(\tau_{xzp}^{\pm}, \tau_{yzp}^{\pm}) = 0 \quad (p = 0, 1, \dots, N)$$

которые следуют из рассмотрения той или иной механической модели включений. Подстановка соотношений (2.4) в условия (2.5) приводит к системе интегральных уравнений относительно функций скачка. Эти функции, кроме того, должны удовлетворять дополнительным условиям, следующим из физических соображений, например вида

$$(2.6) \quad \int_{L_p'} f_{5p}^*(t) dt = A_p = \text{const} \quad (p = 0, 1, \dots, N)$$

К примеру, если первые  $p_1$  включений моделируют разрезы, на кромках которых заданы напряжения  $\tau_q^{\pm}(x_q)$  ( $q = 0, 1, \dots, p_1 - 1$ ), а остальные представляют жесткие включения, внедренные с натягом  $w_r^{\pm}(x_r)$  ( $r = p_1, \dots, N$ ), то такие условия взаимодействия имеют вид

$$(2.7) \quad \tau_{yzq}^{\pm}(x_q) = \tau_q^{\pm}(x_p), \quad \tau_{xzr}^{\pm}(x_r) = \mu w_r^{\pm}(x_r) \quad (x_q \in L_q', \quad x_r \in L_r')$$

а дополнительные — форму (2.6) при  $A_p = 0$ .

В частности, при  $p_1 = N + 1$ ,  $\tau_q^+ = \tau_q^-$  из (2.7), (2.4) следует  $f_{5q}(x_q) = 0$  и система интегральных уравнений для совокупности трещин продольного сдвига [2]. Если включения упругие, то можно воспользоваться соотношениями вида (6.5), (6.8). Применение иных условий взаимодействия позволяет изучать отличающиеся модели упругих включений [1] или прослоек с другими механическими свойствами: пластичных, жидких и пр.

3. Система включений в полупространстве. Пусть  $L_0' = [-\infty, \infty]$ , а другие включения расположены в нижней полуплоскости. Тогда на основе формулы обращения сингулярного интегрального уравнения [5] из соотношения (2.4), взятого при значении  $p = 0$ , следует

$$(3.1) \quad \begin{aligned} f_{50}^*(\eta) &= \frac{2i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \tau_{yz0}^{\pm} + i\tau_{xz0}^{\pm} \pm \frac{1}{2} f_{50}^* - \tau_{yz0}^{\circ} - i\tau_{xz0}^{\circ} \right] \frac{dt}{t - \eta} + \\ &+ \frac{i}{\pi} \sum_{m=1}^N \int_{L_m'} P_{0m}(t, \eta) f_{5m}^*(t) dt \end{aligned}$$

Определяя  $f_{50}(\eta)$  как действительную часть равенства (3.1), после подстановки полученного выражения в оставшиеся соотношения (2.4) при  $p = 0, 1, \dots, N$  имеем

$$(3.2) \quad \tau_{yzp}^{\pm}(x_p) + i\tau_{xzp}^{\pm}(x_p) = \mp^{1/2} f_{5p}^*(x_p) + I^+(x_p) - I_x(x_p) + \\ + \tau_{yzp}^{\circ}(x_p) + i\tau_{xzp}^{\circ}(x_p) \\ I^{\pm}(x_p) = \frac{i}{2\pi} \sum_{m=1}^N \int_{L_m'} [P_{pm}^{\mp}(t, x) f_{6m}(t) + \mu i P_{pm}^{\pm}(t, x) f_{6m}(t)] dt \\ I_a(x_p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_{p0}(t, x) [\tau_{az0}^-(t) - \tau_{az0}^{\circ}(t)] dt \\ (a = x, y, p = 1, 2, \dots, N) \\ P_{pm}^{\pm}(t, x) = P_{pm}(t, x) \pm P_{pm}^*(t, x), \quad P_{pm}^*(t, x) = \\ = (\bar{T}_m - X_p)^{-1} \exp(i\alpha_p)$$

Аналогично, определяя из (3.1) функцию  $f_{60}(\eta)$  как мнимую часть  $f_{50}^*(\eta)$ , получим

$$(3.3) \quad \tau_{yzp}^{\pm}(x_p) + i\tau_{xzp}^{\pm}(x_p) = \mp^{1/2} f_{6p}^*(x_p) + I^-(x_p) + \\ + iI_y(x_p) + \tau_{yzp}^{\circ}(x_p) + i\tau_{xzp}^{\circ}(x_p) \quad (p = 1, 2, \dots, N)$$

При выводе формул (3.1), (3.2) использованы значения интегралов:

$$(3.4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \{P_{0m}(t, \eta), P_{p0}(\eta, t)\} \frac{d\eta}{\eta - x} = \pi i \{P_{0m}(t, x), P_{p0}(x, t)\} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \{P_{0m}(t, \eta), \overline{P_{0m}(t, \eta)}\} P_{p0}(\eta, x) d\eta = \{0, -2\pi i P_{pm}^*(t, x)\}$$

Равенством (3.2) удобно пользоваться при заданных на границе полупространства перемещениях, когда  $w^-(x) \equiv \tau_{xz0}^-(x) / \mu$ , а (3.3) — применять, когда на границе известны касательные напряжения  $\tau_{yz0}^-$ . Если в (3.3), (3.2) заменить формально  $x_p$  на  $z_p$  и отбросить члены  $\mp^{1/2} f_{5p}^*(x_p)$ , то получим выражения для напряжений в произвольной точке полуплоскости.

4. Включения криволинейной конфигурации. Полученные выше результаты естественно обобщаются на случай, когда  $L_p'$  — произвольные гладкие кривые, задаваемые параметрически уравнением  $z_0 = z_p^*(x) \equiv x_p^*(x) + iy_p^*(x)$ . Ввиду возможности рассмотрения такой линии как предела совокупности соприкасающихся прямолинейных отрезков заметим, что соотношения (2.2) сохраняются, если только положить

$$(4.1) \quad T_p = z_p^*(x), \quad \alpha_p \sim \alpha_p(t) \equiv \operatorname{arctg} [y_p^{*'}(t) / x_p^{*'}(t)] \\ f_{5p}^*(t) = \tau_{nzp}^-(t) - \tau_{nzp}^+(t) + i [\tau_{\tau zp}^-(t) - \tau_{\tau zp}^+(t)]$$

Здесь  $n, \tau$  в числе индексов определяют направление нормали и касательной в соответствующей точке  $z_p^*(t)$  линии  $L_p'$ . Формула (2.4) в

этом случае преобразуется к виду

$$(4.2) \quad \tau_{nzp}^{\pm}(x) + i\tau_{\tau zp}^{\pm}(x) = \mp \frac{1}{2} f_{5p}^*(x) + \frac{i}{2\pi} \sum_{m=0}^N \int_{L'_m} P_{pm}(t, x) \times \\ \times f_{5m}^*(t) dt + \tau_{nzp}^{\circ}(x) + i\tau_{\tau zp}^{\circ}(x) \quad (p = 0, 1, \dots, N)$$

причем  $X_p = z_p^*(x)$ ,  $\alpha_p \sim \alpha_p(x)$ ,  $x$  — значение натурального параметра на дуге. Подобным образом видоизменяются выражения (3.2) и (3.3).

Условия взаимодействия включения с матрицей для криволинейных включений следует, аналогично (2.4), представлять в форме  $\Psi_p(\tau_{nzp}^{\pm}, \tau_{\tau zp}^{\pm}) = 0$  ( $p = 0, 1, \dots, N$ ). Из выражения (4.2) и условия  $\tau_{nzp}^{\pm} = 0$  ( $p = 0, 1, \dots, N$ ) с учетом аналогии [3] следует система сингулярных интегральных уравнений антиплоской задачи для системы криволинейных щелей [6]. Использование упрощенных условий взаимодействия (условия (11) [3]) позволяет получить результаты [1] для упругого дугообразного включения.

**5. Асимптотические выражения.** Если функции скачка у торцов  $p$ -го включения имеют корневую особенность (использование условий (2.7) или (6.5), (6.8) приводит именно к такому случаю), на основе формулы [5]

$$(5.1) \quad t_{5p}^{p*}(z) = \mp p_{5p}^{\pm} r^{-1/2} \exp(-i\theta/2) + O(1), \quad p_{5p}^{\pm} = \lim_{s_p \rightarrow 0} [V s_p f_{5p}^*(x)]$$

а также соотношений (2.1), (2.2), (1.4) следуют асимптотические выражения

$$(5.2) \quad \begin{Bmatrix} \tau_{yzp} \\ \tau_{xzp} \end{Bmatrix} = \frac{k_3^{1p}}{\sqrt{2r}} \begin{Bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} \end{Bmatrix} + \frac{k_3^{2p}}{\sqrt{2r}} \begin{Bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{Bmatrix} + O(1)$$

$$(5.3) \quad \begin{Bmatrix} \tau_{rzp} \\ \tau_{\theta zp} \end{Bmatrix} = \frac{k_3^{1p}}{\sqrt{2r}} \begin{Bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{Bmatrix} + \frac{k_3^{2p}}{\sqrt{2r}} \begin{Bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} \end{Bmatrix} + O(1)$$

$$(5.4) \quad w = \frac{\sqrt{2r}}{\mu} \left[ k_3^{1p} \sin \frac{\theta}{2} + k_3^{2p} \cos \frac{\theta}{2} \right] + O(r^{3/2})$$

Здесь

$$(5.5) \quad k_3^{2p} - ik_3^{1p} = \mp p_{5p}^{\pm} / \sqrt{2}$$

$\tau_{rzp}$ ,  $\tau_{\theta zp}$  — компоненты касательных напряжений в локальной полярной системе координат у конца  $p$ -го включения,  $s_p$  — расстояние от точки  $z_p^*(x)$  на линии  $L'_p$  до ее конца  $a_p^{\pm}$ , причем в (5.1), (5.5) выбирается верхний знак, если рассматривается правый торец этого включения, и нижний, если левый;  $k_3^{2p}$ ,  $k_3^{1p}$  — обобщенные коэффициенты интенсивности напряжений при антиплоской деформации (жесткая и гибкая части распределения напряжений по терминологии [7]). Выражения (5.2), (5.4) совпадают с полученными в [7] для остроконечных упругих включений произвольной формы, в частности гипоциклоидальной и гипотрохоидальной.

Формулы (5.3), (5.4) имеют место и для включений гладкой криволинейной формы. Для использования в этом случае соотношения (5.2) не-

обходимо ось  $x_p$  локальной системы координат ориентировать вдоль направления касательной в соответствующем конце линии  $L_p'$ .

6. Условия взаимодействия упругого включения с матрицей. Рассмотрим включение малой толщины  $2h(x)$ , ось симметрии которого — отрезок  $L_0' = [a_0^-, a_0^+]$ . Вдоль  $L_0^{k'}$  включение контактирует с областями  $S_k$ , которые при необходимости можно представить в виде полуплоскостей с модулем сдвига  $\mu_k$  соответственно ( $k = 1, 2$ ) (фиг. 2).

Используя условия равновесия  $\partial\tau_{yzb}/\partial y + \partial\tau_{xzb}/\partial x = 0$  и интегрируя его сначала по  $y$  в пределах от  $-h$  до  $h$ , а затем по  $x$  от  $a_0^-$  до  $x$ , получим

$$(6.1) \quad \tau_{xz}^c(x) \equiv \frac{1}{2h(x)} \int_{-h}^h \tau_{xzb} dy = \tau_{xz}^c(a_0^-) - \frac{1}{2h(x)} \int_{a_0^-}^x (\tau_{yzb}^2 - \tau_{yzb}^1) dt$$

где индекс  $b$  означает величины, относящиеся к включению, индексы  $k =$

$= 1, 2$  — значение функций на линии  $L_0^{k'}$ . С другой стороны, принимая во внимание малую толщину включения и (1.2), имеем

$$(6.2) \quad \tau_{xz}^c(x) \approx \frac{1}{2} (\tau_{xzb}^2 + \tau_{xzb}^1) = \frac{1}{2} \mu_b \partial/\partial x \times (w_b^2 + w_b^1)$$

Условия идеального механического контакта включения с матрицей можно представить в виде

$$(6.3) \quad w = w_b, \quad \tau_{yz} \equiv \mu_k \frac{\partial w}{\partial y} = \tau_{yzb} \equiv \mu_b \frac{\partial w_b}{\partial y} \text{ на } L_0^{k'} \quad (k = 1, 2)$$

Здесь и далее в этом параграфе  $w$  — поле перемещений в матрице,  $w_0$  — соответствующие перемещения при отсутствии включений, удовлетворяющие условию

$$(6.4) \quad w_0^+ = w_0^-, \quad \mu_2 \partial w_0^+ / \partial y = \mu_1 \partial w_0^- / \partial y$$

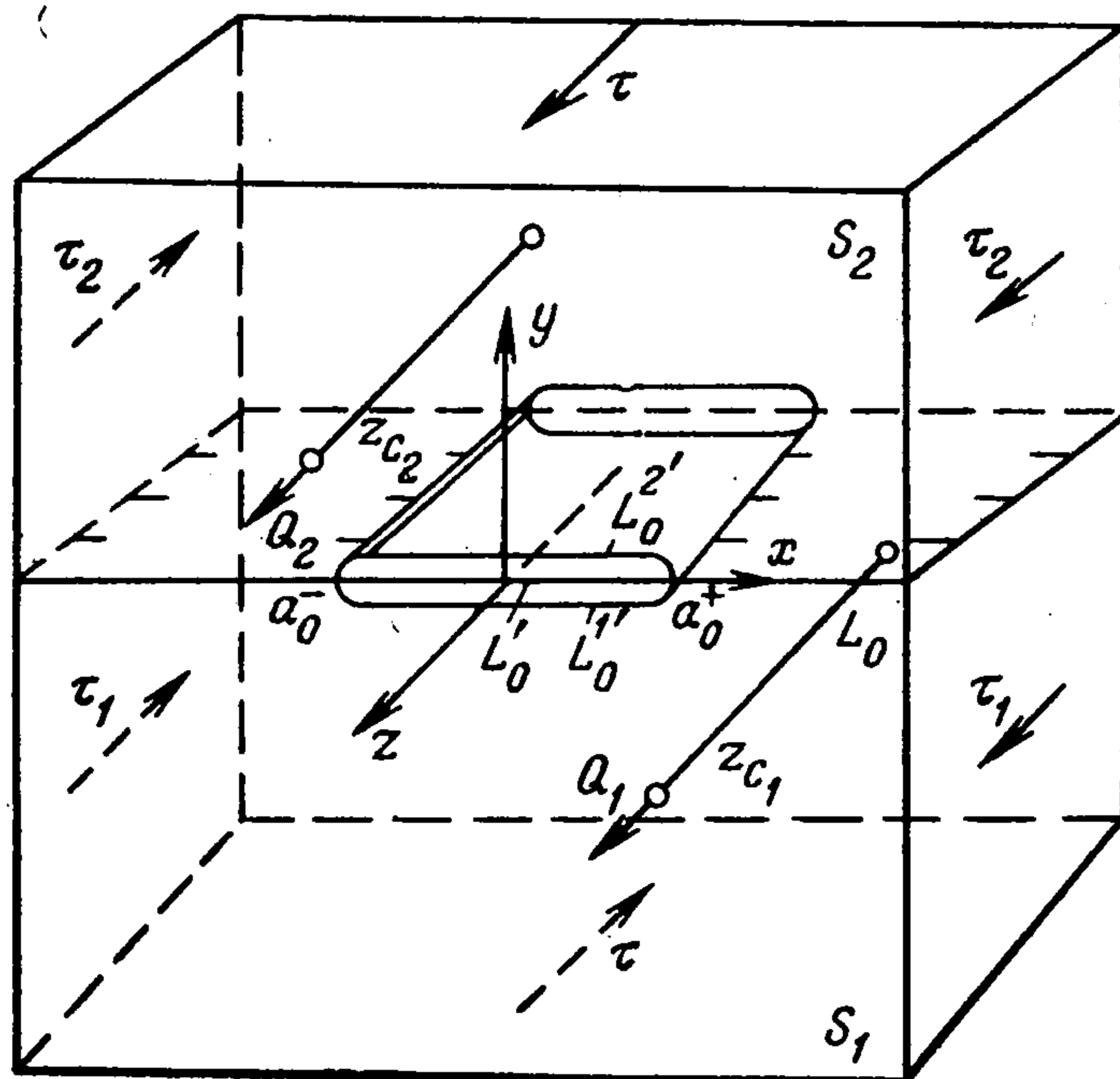
Принимая во внимание приближенное равенство  $w(x \pm ih) \approx w^\pm(x) \pm h \partial w_0(x \pm ih) / \partial y$ , а также условия (6.3), (6.4) и малость величины  $h$ , получим

$$(6.5) \quad \tau_{yz}^+ + \tau_{yz}^- \approx \tau_{yz}(x + ih) + \tau_{yz}(x - ih) = \mu_b [(w^+ - w^-) / h + \tau_{yz}^0(x + ih) / \mu_2 + \tau_{yz}^0(x - ih) / \mu_1]$$

$$(6.6) \quad w^+ - w^- = \int_{a_0^-}^x \left( \frac{\tau_{xz}^+}{\mu_2} - \frac{\tau_{xz}^-}{\mu_1} \right) dt + w_-^* \quad (w_-^* = \text{const})$$

Если принять, что  $w(x \pm ih) \approx w^\pm(x)$ , то будет иметь место более простое выражение

$$(6.7) \quad \tau_{yz}^+ + \tau_{yz}^- = \mu_b (w^+ - w^-) / h$$



Фиг. 2

На основе условий контакта (6.3) и формул (6.1), (6.2) имеем

$$(6.8) \quad \mu_b (w^{+'} + w^{-'}) = 2\tau_{xz}^c (a_0^-) - \frac{1}{h(x)} \int_{a_0^-}^x (\tau_{yz}^+ - \tau_{yz}^-) dt$$

Соотношения (6.8) и (6.5) либо (6.7) составляют условия взаимодействия включения с матрицей. Отметим, что при подстановке в эти условия в ходе построения разрешающей системы интегральных уравнений задачи выражений (1.7), (2.4), (3.2) либо (3.3) для  $\tau_{yz}^{\pm}$ ,  $\tau_{xz}^{\pm}$  более целесообразно заменить  $\tau_{yz}^{\circ}(x)$ ,  $\tau_{xz}^{\circ}(x)$  на  $\tau_{yz}^{\circ}(x \pm ih)$ ,  $\tau_{xz}^{\circ}(x \pm ih)$ .

**7. Пример.** Более подробно рассмотрим случай прямолинейного упругого включения вдоль отрезка  $L_0' = [-a, a]$  — линии раздела материалов. Подстановка (1.7) в условия (6.5), (6.8) с учетом сделанного в конце п. 6 замечания приводит к системе уравнений

$$(7.1) \quad \begin{aligned} t_6^{\circ}(x) + \beta_6 f_5(x) - \frac{\alpha_6}{h(x)} \int_{-a}^x f_6(t) dt &= F_6(x) \\ t_5^{\circ}(x) + \beta_5 f_6(x) - \frac{\alpha_5}{h(x)} \int_{-a}^x f_5(t) dt &= F_5(x) \end{aligned} \quad (|x| \leq a)$$

при дополнительных условиях

$$(7.2) \quad \int_{-a}^a f_5(t) dt = \int_{-a}^a f_6(t) dt = 0$$

Здесь

$$(7.3) \quad \begin{aligned} \beta_5 &= n_{21}\mu_2 / 2, \quad \beta_6 = n_{21} / (2\mu_1), \quad \alpha_5 = \mu_b / (2p_2\mu_1), \quad \alpha_6 = \mu_2 / (2p_2\mu_b) \\ F_5(x) &= \mu_2 [2\tau_{xz}^c(-a) / \mu_b - \tau_{xz}^{\circ}(x + ih) / \mu_2 - \\ &\quad - \tau_{xz}^{\circ}(x - ih) / \mu_1] / (2p_2) \\ F_6(x) &= [\mu_{b2}\tau_{yz}^{\circ}(x + ih) + \mu_{b1}\tau_{yz}^{\circ}(x - ih) - \mu_b w_{-}^{+'}] / (2c), \quad \mu_{bk} = \\ &= (\mu_k - \mu_b) / \mu_k \end{aligned}$$

Величины  $w_{-}^{+'}$  и  $\tau_{xz}^c(-a)$  приходится определять из априорных формул.

При  $h \rightarrow 0$  и  $\mu_b = 0$  либо  $\mu_b = \infty$  из (7.1) следуют результаты для трещины и абсолютно жесткой пленки на линии раздела материалов соответственно

$$(7.4) \quad f_5(x) = 0, \quad t_6^{\circ}(x) = \tau_{yz}^{\circ}(x) / c \equiv \Phi_6(x) \quad (\text{необходимо } \tau_{xz}^c(-a) = 0)$$

$$(7.5) \quad f_6(x) = 0, \quad t_5^{\circ}(x) = -\tau_{xz}^{\circ+}(x) / p_2 \equiv \Phi_5(x) \quad (\text{необходимо } w_{-}^{+'} = 0)$$

Решение интегральных уравнений (7.4), (7.5) представлено в [5], и при отсутствии сосредоточенных сил имеем:

для трещины

$$f_5(x) = 0, \quad f_6(x) = \tau x / [cX(x)], \quad \tau_{yz}^{\pm} = 0, \quad \tau_{xz}^{\pm} = \mp \tau x / X(x), \quad w^{\pm} = \pm \tau X(x) / \mu_k$$

$$k_3^1 = \tau \sqrt{a}, \quad k_3^2 = 0 \quad (|x| \leq a)$$

для абсолютно жесткой пленки

$$f_5(x) = -2\tau_1 x / X(x), \quad f_6(x) = 0, \quad \tau_{yz}^{\pm} = \pm \tau_1 x / X(x), \quad \tau_{xz}^{\pm} = 0, \quad w^{\pm} = 0$$

$$k_3^1 = 0, \quad k_3^2 = \tau_1 \sqrt{a} \quad (|x| \leq a)$$

Для реального абсолютно жесткого включения с отличной от нуля толщиной следует принять  $\mu_b = \infty$ ,  $w_* = 0$  и тогда (7.1) преобразуется к виду

$$(7.6) \quad \int_{-a}^x f_6(t) dt = -h(x) \left[ \frac{\tau_{yz}^{\circ}(x+ih)}{\mu_2} + \frac{\tau_{yz}^{\circ}(x-ih)}{\mu_1} \right], \quad (|x| \leq a)$$

$$t_5^{\circ}(x) + \beta_5 f_6(x) = -\frac{\mu_2}{2p_2} \left[ \frac{\tau_{xz}^{\circ}(x+ih)}{\mu_2} + \frac{\tau_{xz}^{\circ}(x-ih)}{\mu_1} \right].$$

Можно показать, что ввиду (7.6) скачок перемещений  $w(x+ih) - w(x-ih)$  на кромках жесткого включения в рамках приближений п. 6 равен нулю.

Если материалы полуплоскостей и включения идентичны ( $\mu_1 = \mu_2 = \mu_b$ ), то (7.1) дает  $f_5(x) = f_6(x) = 0$ , что приводит к решению для однородной плоскости (пространства).

Представленные другими авторами [1, 3] подходы к решению задач антиплоского сдвига тел с упругими включениями не позволяют получить столь точного решения задачи в двух последних случаях.

При равенстве механических характеристик материалов полуплоскостей ( $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ ) имеем  $\beta_5 = \beta_6 = 0$  и уравнения (7.1) значительно упрощаются. Тогда решение (7.1), (7.2) для  $h(x) = h_0 [1 - (x/a)^2]^{1/(2q)}$  ( $h_0 = \text{const}$ ,  $q \geq 1$ ) ищется в виде ряда полиномов Чебышева первого рода с выделенной корневой особенностью

$$(7.7) \quad f_r(x) = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} \sum_{p=1}^{\infty} A_p^r T_p(x/a) \quad (r = 5, 6; |x| \leq a)$$

Для определения коэффициентов разложения  $A_p^r$  при помощи процедуры метода ортогональных полиномов [8] построена система линейных алгебраических уравнений

$$(7.8) \quad \frac{\pi}{2} A_{k+1}^r + \alpha_{0r} \sum_{p=1}^{\infty} A_p^r H_{pk}^q = f_k^r \quad (k = 0, 1, \dots)$$

$$H_{pk}^q = \frac{\pi \Gamma(2\sigma)}{p^{4\sigma}} \sum_{j=0,1}^{\infty} \frac{\sin(p_j \pi) (-1)^j}{\Gamma(1 + \sigma + p_j) \Gamma(\sigma - p_j)},$$

$$f_k^r = \int_{-1}^1 F_r(at) \sqrt{1-t^2} U_k(t) dt$$

$$\alpha_{0r} = \alpha_r / h_0, \quad \sigma = 1 - 1/(2q), \quad 2p_j = k + (-1)^j p$$

Отметим, что для включения эллиптического ( $q = 1$ ) и прямоугольного профиля ( $q = \infty$ )

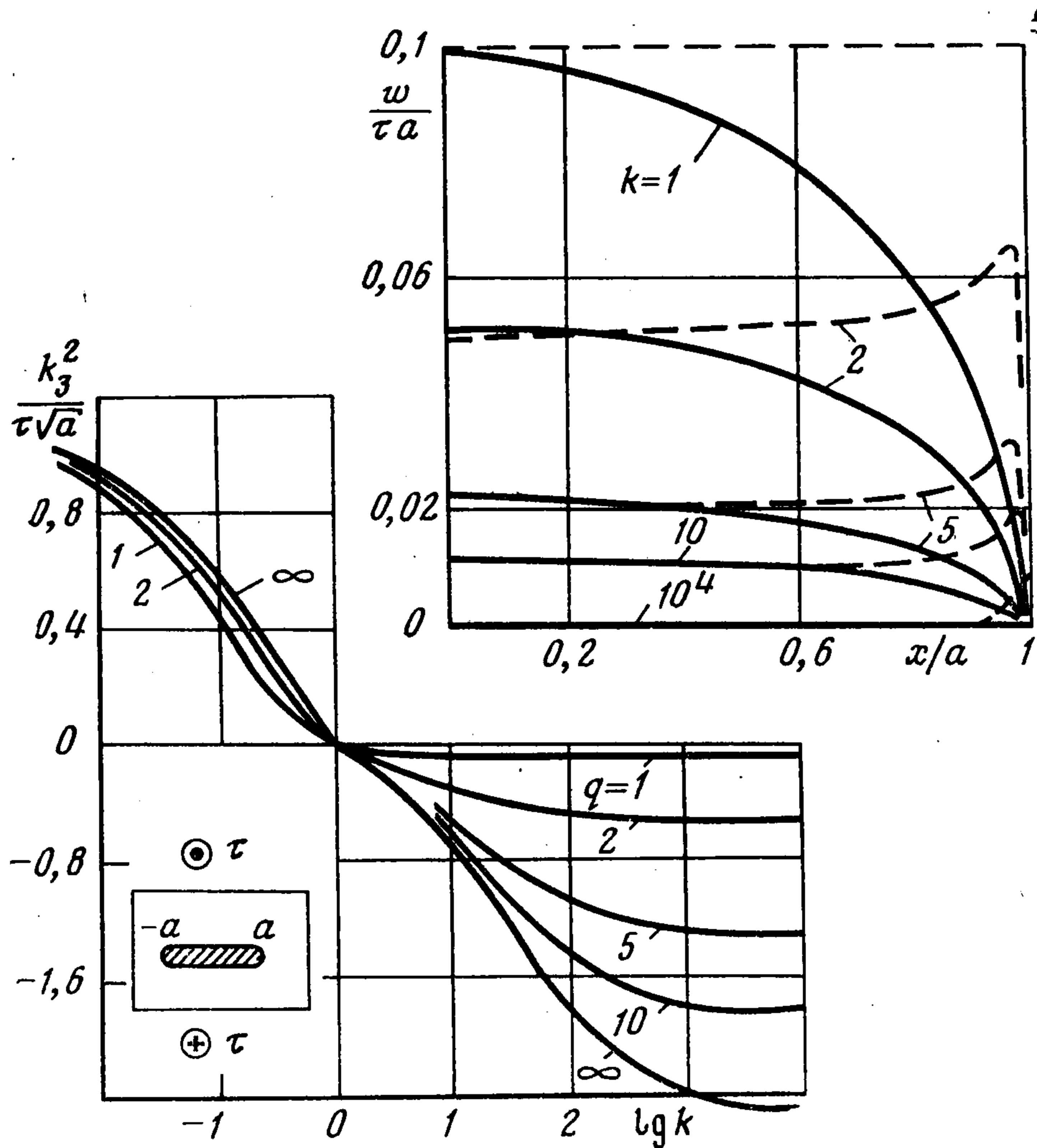
$$H_{pk}^1 = \frac{\pi}{2p} \delta_{p, k+1}, \quad H_{pk}^{\infty} = -\frac{4(k+1) \sin^2(p_0 \pi)}{[(k+2)^2 - p^2][k^2 - p^2]}$$

Следовательно, при  $q = 1$  решение системы (7.8) записывается в явном виде  $A_p^r = 2p f_{p-1}^r / [\pi(p + \alpha_0)]$ . Если, к тому же, отсутствуют сосредоточенные силы, то  $F_r(x) = F_r = \text{const}$  и тогда

$$A_p^r = F_r \delta_{p,1} / (p + \alpha_0), \quad f_r(x) = a F_r / [(1 + \alpha_0) \sqrt{a^2 - x^2}]$$

Обобщенные коэффициенты интенсивности напряжений можно представить суммой

$$k_3^2 - ik_3^1 = \mp \frac{\sqrt{a}}{2} \sum_{p=1}^{\infty} (\pm 1)^p (A_p^5 + i\mu A_p^6)$$



Фиг. 3

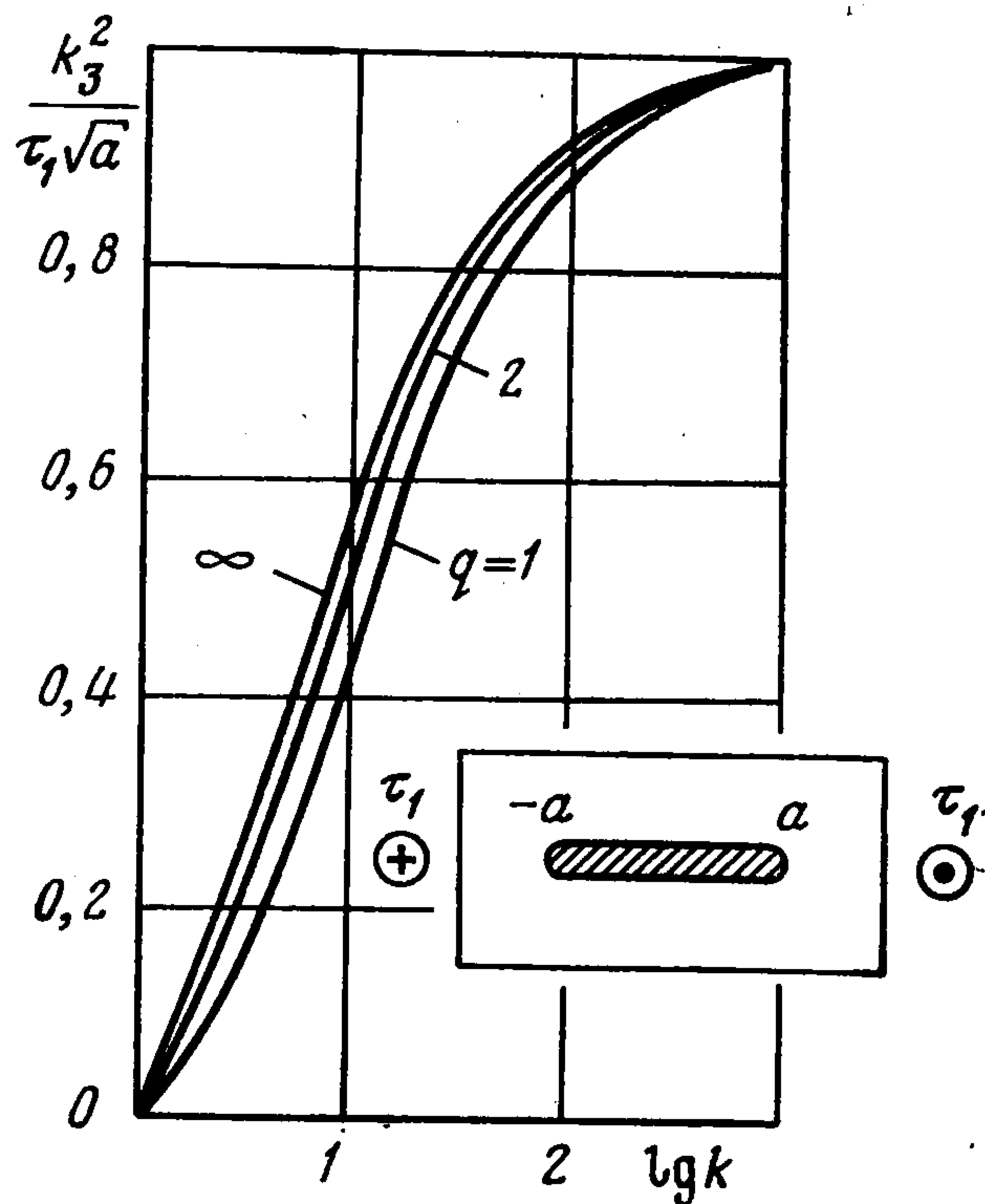
Осуществлено численное исследование зависимости обобщенных коэффициентов интенсивности напряжений от параметров  $k$  и  $q$  при действии напряжений на бесконечности. В расчетах было принято

$$k = \mu_b / \mu, \quad a/h_0 = 10, \quad w_{-z}^* = 0, \quad \tau_{xz}(-a) = \tau_{xz}^0(-a) / \max(1, k^{-1})$$

Для обеспечения точности вычислений в 1% оказалось достаточным ограничиться не более чем 25 первыми отличными от нуля (для рассматриваемой нагрузки  $A_{2p}^r = 0, p = 1, 2, \dots$ ) коэффициентами разложения (7.7). Сходимость процесса вычислений обоснована результатами работы [9].

На [фиг. 3 представлена зависимость  $k_3^1$  ( $k_3^2 = 0$ ) от параметров  $k$  и  $q$  при  $\tau_1 = 0$ . Перемещение верхней кромки включения иллюстрирует верхняя часть фиг. 3, где сплошными линиями нанесены результаты, полученные при  $q = 1$ , а штриховой — для  $q = 10^4$ . Вычисления подтвердили стремление  $w$  к нулю при увеличении  $k$ . Оказалось, что  $k_3^1$  для относительно податливых включений зависит от формы включения незначительно, однако для больших  $k$  эффект формы проявляется довольно значительно. В то же время согласно [1, 3] при таком внешнем нагружении и  $k = \infty$  соответствующий коэффициент  $k_3^1 = 0$ .

На фиг. 4 изображено изменение  $k_3^2$  ( $k_3^1 = 0$ ) при  $\tau = 0$ . Этот коэффициент слабо зависит от формы включения и практически ра-



Фиг. 4

вен нулю при  $k < 1$ . Расчеты показали, что предположение  $\tau_{xz}^c(-a) = 0$  [1] приводит для  $k = 1$  к физически нереальному, отличному от нуля значению  $k_3^2/(\tau/\sqrt{a}) = 0,0909$  для эллиптического и  $0,247$  для прямоугольного включения, что составляет соответственно 9 и 25% от его максимального значения.

Результаты, представленные в данной работе, непосредственно переносятся [3] на соответствующие задачи стационарной теплопроводности теплоизолированной пластинки с теплопроводящими включениями.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Френчко Ю. С., Ткач М. Д. Антиплоская деформация тела с тонким дугообразным включением. В кн.: Физико-механические поля в деформируемых средах. Киев: Наукова думка, 1978, с. 81.
2. Панасюк В. В., Саверук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 443 с.
3. Кит Г. С. Об аналогии между продольным сдвигом и стационарной теплопроводностью тел с включениями и трещинами. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, № 4, с. 336.
4. Грилицкий Д. В., Сулим Г. Т. Периодическая задача для упругой плоскости с тонкостенными включениями. — ПММ, 1975, т. 39, вып. 3, с. 520.
5. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
6. Кит Г. С. Плоская задача термоупругости для тела с трещинами. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1969, № 5, с. 427.
7. Бережницкий Л. Т., Панасюк В. В., Садивский В. М. Продольный сдвиг изотропного тела с остроконечным упругим включением. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, № 5, с. 413.
8. Морарь Г. А., Попов Г. Я. К контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением. — ПММ, 1970, т. 34, вып. 3, с. 412.
9. Сулим Г. Т. Регулярность некоторых систем линейных алгебраических уравнений. — Вестн. Львовск. ун-та. Сер. механ.-матем., 1975, вып. 10, с. 76.

Львов

Поступила в редакцию  
25.1.1980