

УДК 536.46

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОГО ФРОНТА ПЛАМЕНИ

Чикова С. П.

Рассматривается гидродинамическая устойчивость плоского фронта пламени в несжимаемой жидкости относительно двумерных возмущений. Учитывается зависимость возмущенной скорости распространения фронта горения как от кривизны фронта, так и от возмущений давления перед ним. Обнаружена возможность устойчивого горения по отношению к длинноволновым возмущениям, а также существование затухающих и нарастающих волновых решений и бегущих волн вдоль фронта пламени в зависимости от определяющих модель коэффициентов.

Исследование устойчивости плоского фронта пламени по отношению к двумерным возмущениям в рамках несжимаемой жидкости было начато работой Л. Д. Ландау [1], где в предположении, что скорость пламени постоянна, была показана его абсолютная неустойчивость. Учет влияния кривизны фронта на скорость распространения пламени, проведенный в работе Маркштейна [2], позволил получить устойчивость горения относительно коротковолновых возмущений и неустойчивость к длинноволновым возмущениям. В работе [3] исследовался вопрос о существовании бегущих волн на поверхности фронта пламени в случае, когда отношение плотности продуктов реакции к плотности исходной смеси стремится к нулю. Устойчивость фронта горения относительно двумерных сжимаемых возмущений рассматривалась в работах [4, 5], а относительно одномерных сжимаемых возмущений в системе поршень — пламя — ударная волна — в работе [6].

Рассмотрим процесс медленного горения горючей смеси газов. Будем считать, как и в работе Л. Д. Ландау [1], что фронт пламени является бесконечно тонким газодинамическим разрывом, перемещающимся по газу с заданной постоянной скоростью U_0 , зависящей в общем случае от состава и термодинамического состояния горючей смеси. Перейдем в систему координат, связанную с поверхностью фронта горения, при этом ось x направим по нормальной к поверхности разрыва компоненте скорости. Обозначим через p_1 давление, ρ_1 — плотность, u_1, v_1 — нормальную и тангенциальную компоненты скорости перед фронтом горения, а через p_2, ρ_2, u_2, v_2 — соответствующие параметры продуктов реакции. Для модели горения в рамках несжимаемой жидкости достаточно задать величину нормальной скорости пламени U_0 и коэффициент теплового расширения α , равный отношению плотностей продуктов реакции и исходной смеси.

Используя законы сохранения массы и импульса, найдем связь газодинамических параметров горючей смеси и продуктов реакции на поверхности разрыва

$$(1) \quad \begin{aligned} u_1 &= U_0, \quad u_2 = U_0/\alpha, \quad v_1 = v_2 = 0 \\ p_2 &= \alpha p_1, \quad p_2 = p_1 - \frac{1-\alpha}{\alpha} \rho_1 U_0^2 \end{aligned}$$

Оставаясь в рамках несжимаемой жидкости, исследуем устойчивость фронта горения по отношению к плоским двумерным периодическим возмущениям, потенциальным перед фронтом пламени и вихревым за фронтом [1]. Обозначая возмущения штрихом, имеем при $x \leq 0$

$$(2) \quad \begin{aligned} u_1'/U_0 &= A \exp(kx +iky -i\omega t) \\ v_1'/U_0 &= iA \exp(kx +iky -i\omega t) \\ \frac{p_1'}{\rho_1 U_0^2} &= -(1 + \Omega) A \exp(kx +iky -i\omega t) \end{aligned}$$

и при $x \geq 0$

$$(3) \quad \begin{aligned} u_2'/U_0 &= B \exp(-kx +iky -i\omega t) + C \exp\left(\frac{i\omega}{u_2} x +iky -i\omega t\right) \\ v_2'/U_0 &= -iB \exp(-kx +iky -i\omega t) - i\alpha\Omega C \exp\left(\frac{i\omega}{u_2} x +iky -i\omega t\right) \\ \frac{p_2'}{\rho_1 U_0^2} &= (\alpha\Omega - 1) B \exp(-kx +iky -i\omega t) \end{aligned}$$

Здесь k — волновое число, Ω — безразмерная частота

$$(4) \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \Omega = -\frac{i\omega}{kU_0}.$$

Как известно из акустики [7], рассматриваемые возмущения при действительном ω соответствуют акустическим возмущениям с частотой меньше критической частоты $\omega_* = ka\sqrt{1 - M^2}$, где a — скорость звука, а M — число Маха.

Возмущение поверхности разрыва возьмем в виде периодической по y и t волны

$$(5) \quad x = \zeta(y, t), \quad \zeta(y, t) = \frac{D}{k} \exp(iky -i\omega t)$$

Предположим, что возмущенная скорость пламени

$$(6) \quad U = U_0 \left(1 + \frac{\mu}{R} + \beta \frac{p'_{10}}{p_1} \right)$$

где μ и β — постоянные, определяемые из опыта для конкретной смеси газов и заданных термодинамических условий, p'_{10} — возмущение давления на фронте горения (при $x = 0$), R — радиус кривизны возмущенного фронта пламени. В линейном приближении

$$(7) \quad \frac{1}{R} = -\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = Dk \exp(iky -i\omega t)$$

Формула (6) учитывает зависимость скорости горения не только от возмущений поверхности пламени, как у Маркштейна [2], но и от возмущений газодинамических параметров перед фронтом (в рассматриваемом случае несжимаемой жидкости — от возмущений давления). При $\beta = 0$ предложенная модель переходит в модель Маркштейна, поэтому аналогично [2] примем, что $\mu = \mu_0 L$, где $L = \kappa/U_0$ — некоторый характерный размер, пропорциональный толщине зоны горения, κ — коэффициент температуропроводности. Значение безразмерной константы μ_0 различно у разных авторов: так, в [2] $\mu_0 \sim 1$, а в [8, 9] $\mu_0 \sim 10 \div 20$.

Используя (2), (5) — (7), получим возмущение скорости пламени в виде

$$(8) \quad \frac{U'}{U_0} = [\mu_1 D - \beta_1 (1 + \Omega) A] \exp(iky - i\omega t)$$

$$\mu_1 = \mu k = 2\pi\mu_0 L / \lambda, \quad \beta_1 = \beta \rho_1 U_0^2 / p_1$$

Линеаризуя возмущенные соотношения (1) на фронте пламени, имеем следующие граничные условия при $x = 0$:

$$(9) \quad u_1' - \frac{\partial \zeta}{\partial t} - U_0' = 0, \quad p_2' - p_1' + 2 \frac{1-\alpha}{\alpha} \rho_1 U_0 \left(u_1' - \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) = 0$$

$$u_1' - \alpha u_2' - (1-\alpha) \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0, \quad v_1' - v_2' - \frac{1-\alpha}{\alpha} U_0 \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0$$

Подставляя в систему (9) возмущения (2), (3), (5) и (8), получим линейную однородную систему алгебраических уравнений относительно A, B, C, D . Приравняв нулю определитель этой системы, приходим к кубическому уравнению для Ω

$$(10) \quad a_0 \Omega^3 + a_1 \Omega^2 + a_2 \Omega + a_3 = 0$$

$$a_0 = (1-\alpha) \beta_1, \quad a_1 = \frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{\alpha} \beta_1 - (1+\alpha)$$

$$a_2 = 3 \frac{1-\alpha}{\alpha} \beta_1 - 2(1+\mu_1), \quad a_3 = \frac{1-\alpha}{\alpha} (1+\beta_1) - \frac{2}{\alpha} \mu_1$$

Из критерия Рауса — Гурвица [10] следует, что все корни уравнения (10) будут иметь отрицательные действительные части в том и только в том случае, если будет выполнена следующая система неравенств:

$$\beta_1 \left[\beta_1 - \frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)(2+\alpha)} \right] > 0$$

$$\left(\beta_1 - \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \left[\frac{(1-\alpha)(3+\alpha)}{\alpha(1+\alpha)} \beta_1 - \mu_1 - 1 \right] > 0$$

$$\beta_1 \left[\frac{1-\alpha}{2} (1+\beta_1) - \mu_1 \right] > 0$$

Графическое решение этой системы представлено незаштрихованными областями в плоскости (β_1, μ_1) на фиг. 1, где 1 — прямая

$$\mu_1 = \frac{(1-\alpha)(3+\alpha)}{\alpha(1+\alpha)} \beta_1 - 1$$

а 2 — прямая

$$\mu_1 = \frac{1-\alpha}{2} (1+\beta_1)$$

Итак, в рассматриваемой модели устойчивое горение будет наблюдаться в областях

$$(11) \quad \beta_1 < 0, \quad \mu_1 > \frac{1-\alpha}{2} (1+\beta_1)$$

$$(12) \quad \beta_1 > \frac{\alpha}{1-\alpha}, \quad \mu_1 < \frac{1-\alpha}{2} (1+\beta_1)$$

В заштрихованной области изменения параметров β_1, μ_1 существуют Ω с $\text{Re } \Omega > 0$, а на границе возможны как нейтрально устойчивые ($\text{Re } \Omega = 0$), так и затухающие решения.

В плоскости (β_1, μ_1) рассмотрим точки и прямые, соответствующие известным моделям. Так, модели Л. Д. Ландау с постоянной скоростью распространения пламени $U = U_0$ соответствует начало координат $\beta_1 = \mu_1 = 0$, которое лежит внутри найденной области неустойчивости (фиг. 1). При $\beta_1 = \mu_1 = 0$ кубическое уравнение (10) переходит в квадратное, решения которого хорошо известны [1]

$$\Omega_0 = \frac{-\alpha \pm (\alpha + \alpha^2 - \alpha^3)^{1/2}}{\alpha(1 + \alpha)}$$

Оба решения Л. Д. Ландау действительны, при этом [одно из них при $\alpha < 1$ будет положительным. Длина волны возмущения, для которого применима рассматриваемая модель плоского фронта горения, должна превышать ширину зоны горения, поэтому пламя в модели Л. Д. Ландау неустойчиво по отношению к возмущениям с длиной волны $\lambda > L$.

Модели Маркштейна соответствует прямая $\beta_1 = 0$. На фиг. 1 часть оси μ_1 , расположенная выше точки с ординатой $(1 - \alpha) / 2$, совпадает с границей устойчивости, остальная часть оси лежит внутри области неустойчивости. Уравнение (10) при $\beta_1 = 0$ имеет два корня [2]

$$(13) \quad \Omega_m = \frac{-\alpha(1 + \mu_1) \pm (\alpha + \alpha^2 - \alpha^3 + \alpha^2\mu_1^2 - 2\alpha\mu_1)^{1/2}}{\alpha(1 + \alpha)}$$

Видно, что при $\mu_1 > (1 - \alpha)/2$ $\text{Re } \Omega_m < 0$. Итак, горение в модели Маркштейна устойчиво относительно коротковолновых возмущений с длиной волны $\lambda < \lambda_m$ и неустойчиво к возмущениям с длиной волны $\lambda > \lambda_m$, где $\lambda_m = 4\pi\mu_0 L / (1 - \alpha)$. Учет влияния кривизны на скорость пламени по-прежнему приводит к неустойчивости относительно длинноволновых возмущений (возмущений с длиной волны много больше толщины фронта пламени).

В отличие от моделей Л. Д. Ландау и Маркштейна в модели (6) при $\beta_1 > \alpha / (1 - \alpha)$ из условий (12) получаем устойчивость фронта пламени к возмущениям с длиной волны $\lambda > \lambda_*$ и неустойчивость к коротковолновым возмущениям с $\lambda < \lambda_*$, где

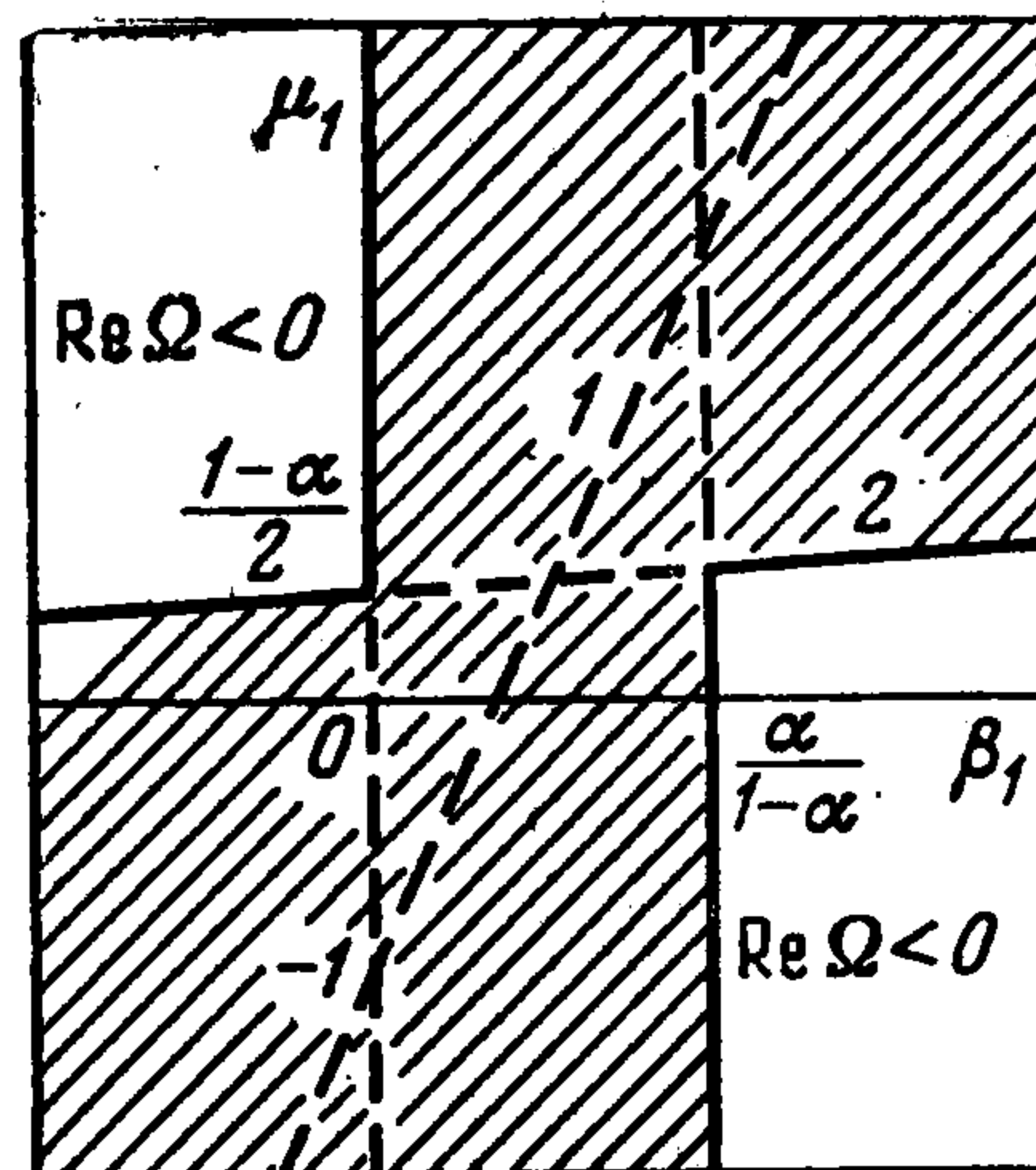
$$\lambda_* = \frac{4\pi\mu_0}{(1 - \alpha)(1 + \beta_1)} L$$

При $\beta_1 = \alpha / (1 - \alpha)$ решения уравнения (10) получаем в виде

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= -\frac{1}{\alpha}, \quad \Omega_{2,3} = \pm i \left(\frac{1 - 2\mu_1}{\alpha} \right)^{1/2}, \quad \mu_1 < \frac{1}{2} \\ \Omega_1 &= -\frac{1}{\alpha}, \quad \Omega_{2,3} = \pm \left(\frac{2\mu_1 - 1}{\alpha} \right)^{1/2}, \quad \mu_1 > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Таким образом, на границе устойчивости ($\beta_1 = \alpha / (1 - \alpha)$), $0 \leq \mu_1 \leq 1/2$, кроме затухающего решения имеем нейтрально устойчивые бегущие волны, скорость распространения которых вдоль фронта пламени равна $U_0 \sqrt{(1 - 2\mu_1) / \alpha}$. По отношению к коротковолновым возмущениям ($\lambda < 4\pi\mu_0 L$) пламя при $\beta_1 = \alpha / (1 - \alpha)$ будет неустойчиво.

Дальнейшее исследование решений кубического уравнения (10) будет связано с нахождением в плоскости (β_1, μ_1) областей, где уравнение имеет комплексные корни. Решения уравнения (10) при $\text{Im } \Omega \neq 0$ будем называть волновыми, при этом скорость распространения возмущений вдоль



Фиг. 1

фронта горения равна $U_0 \operatorname{Im} \Omega$. В зависимости от знака $\operatorname{Re} \Omega$ волновые решения будут либо затухающими ($\operatorname{Re} \Omega < 0$), либо возрастающими ($\operatorname{Re} \Omega > 0$). Возмущения, у которых $\operatorname{Re} \Omega = 0$, будем называть бегущими волнами.

Кубическое уравнение (10) имеет: три различных действительных корня, если дискриминант уравнения меньше нуля; три действительных корня, по крайней мере два из которых совпадают, при $Q = 0$; один действительный корень и два комплексно-сопряженных при $Q > 0$, где

$$(14) \quad Q = q^2 + p^3$$

$$p = \frac{3a_0a_2 - a_1^2}{9a_0^2}, \quad q = \frac{a_1^3}{27a_0^3} - \frac{a_1a_2}{6a_0^2} + \frac{a_3}{2a_0}$$

Границу существования волновых решений определим из условия

$$(15) \quad Q = 0$$

Подставляя в (15) значения коэффициентов p , q (14) и a_i (10), получим кубическое уравнение для μ_1

$$m_0\mu_1^3 + m_1\mu_1^2 + m_2\mu_1 + m_3 = 0$$

$$m_0 = p_1^3, \quad m_1 = 3p_0p_1^2 + q_1^2$$

$$m_2 = 3p_0^2p_1 + 2q_0q_1, \quad m_3 = p_0^3 + q_0^2$$

Для выделения μ_1 в коэффициентах p , q и a_i были введены следующие обозначения:

$$a_2 = a_{20} + a_{21}\mu_1, \quad a_{20} = 3 \frac{1-\alpha}{\alpha} \beta_1 - 2, \quad a_{21} = -2$$

$$a_3 = a_{30} + a_{31}\mu_1, \quad a_{30} = \frac{1-\alpha}{\alpha} (1 + \beta_1), \quad a_{31} = -\frac{2}{\alpha}$$

$$p = p_0 + p_1\mu_1, \quad p_0 = \frac{3a_0a_{20} - a_1^2}{9a_0^2}, \quad p_1 = \frac{a_{21}}{3a_0^2}$$

$$q = q_0 + q_1\mu_1, \quad q_0 = \frac{a_1^3}{27a_0^3} - \frac{a_1a_{20}}{6a_0^2} + \frac{a_{30}}{2a_0},$$

$$q_1 = -\frac{a_1a_{21}}{6a_0^2} + \frac{a_{31}}{2a_0}$$

На фиг. 2 построена граница существования волновых решений уравнения (10) при $\alpha = 0,2$. Две ветви верхней кривой $Q = 0$ обозначены через $\mu_{11}(\beta_1)$ и $\mu_{12}(\beta_1)$, а нижняя кривая — через $\mu_{13}(\beta_1)$. Прямые 1 и 2 — те же, что и на фиг. 1. При любом α сохраняется взаимное расположение области неустойчивости и областей существования волновых решений, представленное на фиг. 2. Так, кривая $\mu_{13}(\beta_1)$ касается прямых 1 и 2, причем точка касания с прямой 2 есть $(\alpha / (1 - \alpha); 0,5)$, в чем можно убедиться подстановкой.

Обозначим через β_1^0 значение β_1 , при котором кривая $\mu_{13}(\beta_1)$ пересекает ось $\mu_1 = 0$. Видно, что значение β_1^0 близко к значению

$$\beta_1 = \frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)(3+\alpha)}$$

при котором прямая 1 пересекается с осью β_1 (фиг. 2).

Точки пересечения кривых $\mu_{11}(\beta_1)$ и $\mu_{12}(\beta_1)$ с осью $\beta_1 = 0$ найдем в результате исследования знака подкоренного выражения в решении Маркштейна (13). Получим, что при

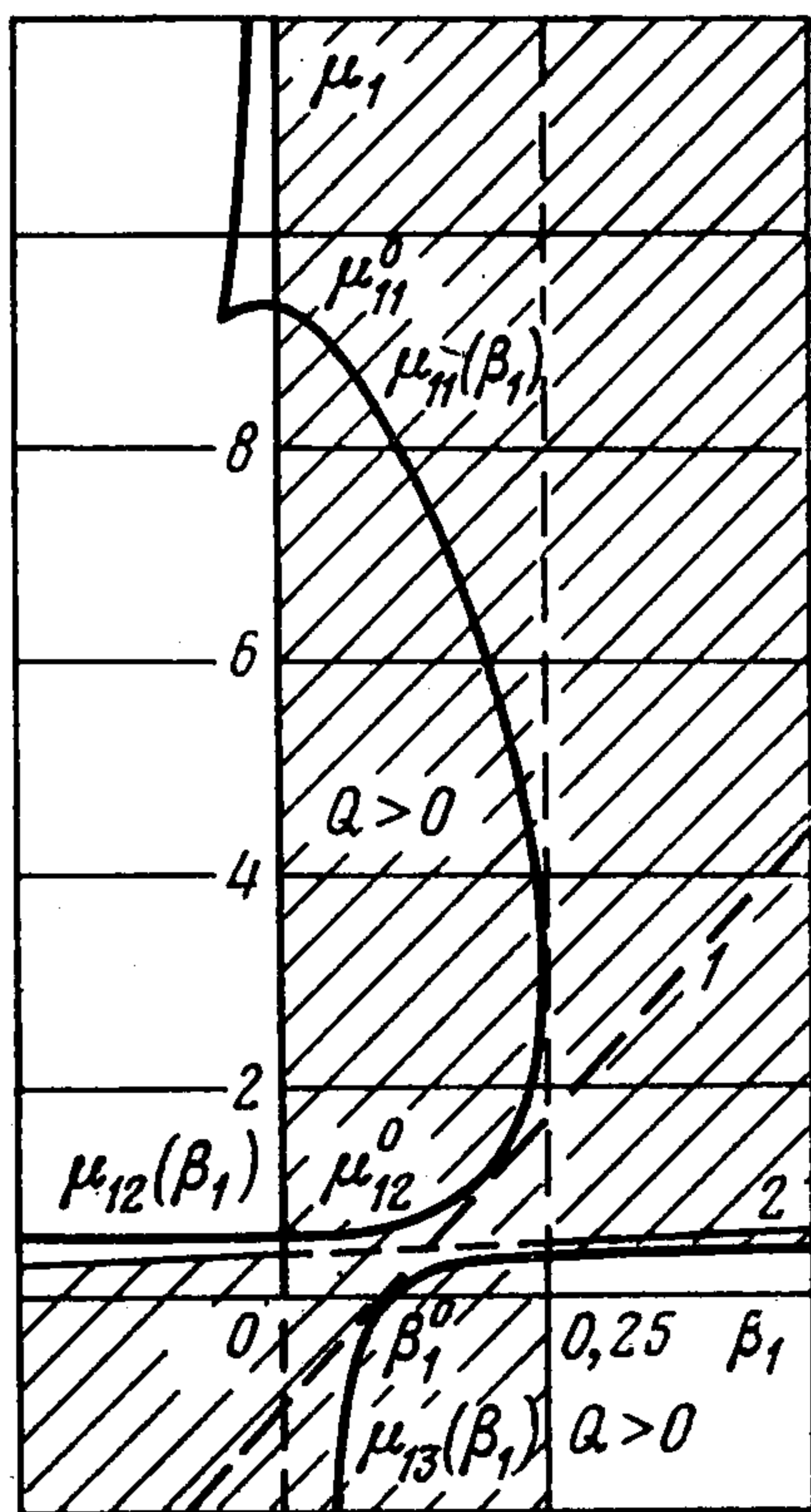
$$(16) \quad \mu_{12}^0 \leq \mu_1 \leq \mu_{11}^0, \quad \mu_{1i}^0 = \frac{1 - (-1)^i (1 - \alpha - \alpha^2 + \alpha^3)^{1/2}}{\alpha}$$

на поверхности фронта пламени возможны затухающие волновые решения с

$$(17) \quad \text{Re } \Omega_m = -\frac{1 + \mu_1}{1 + \alpha} < 0$$

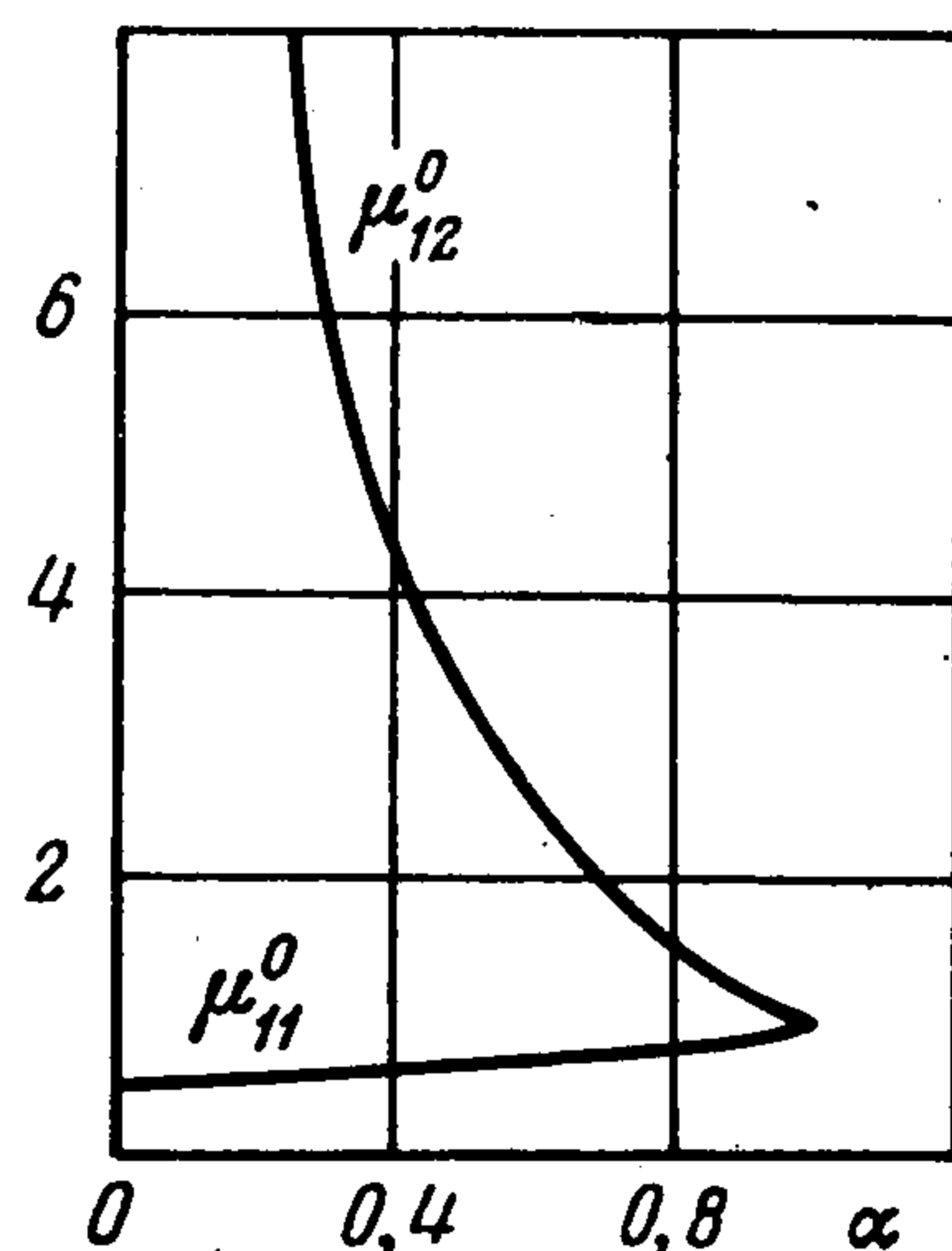
перемещающиеся вдоль оси y со скоростью.

$$(18) \quad V = U_0 \text{Im } \Omega_m = U_0 \frac{[1 - \alpha - \alpha^2 + \alpha^3 - (\alpha\mu_1 - 1)^2]^{1/2}}{\alpha(1 + \alpha)}$$

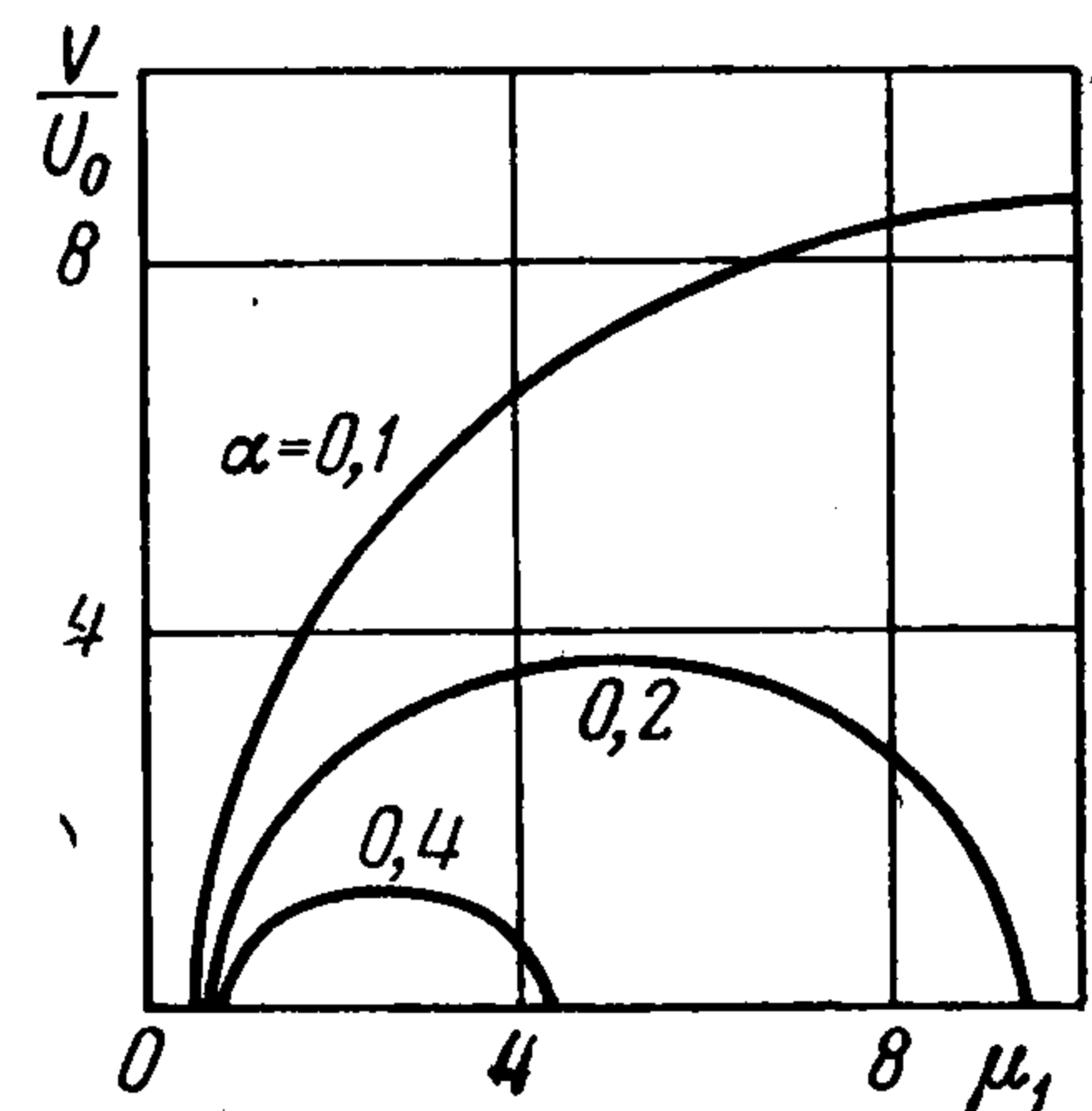


Фиг. 2

На фиг. 3 показаны значения μ_{1i}^0 — границы волновых решений в модели Маркштейна — в зависимости от α , а на фиг. 4 — значение приведенной скорости распространения волновых возмущений $V/U_0 = \text{Im } \Omega_m$ от



Фиг. 3



Фиг. 4

величины μ_1 , обратно пропорциональной длине волны. Из условий (16) следует, что волновые решения в модели Маркштейна возможны только для достаточно коротковолновых возмущений

$$2\pi\mu_0 L / \mu_{11}^0 \leq \lambda \leq 2\pi\mu_0 L / \mu_{12}^0$$

Рассмотрим при $\beta_1 = 0$ предельный случай $\alpha \rightarrow 0$. Из условий (16) получим границу существования волновых решений

$$(19) \quad \mu_1 > 1/2$$

а из (17) и (18) — действительную часть и главный член скорости перемещения волновых возмущений вдоль фронта пламени

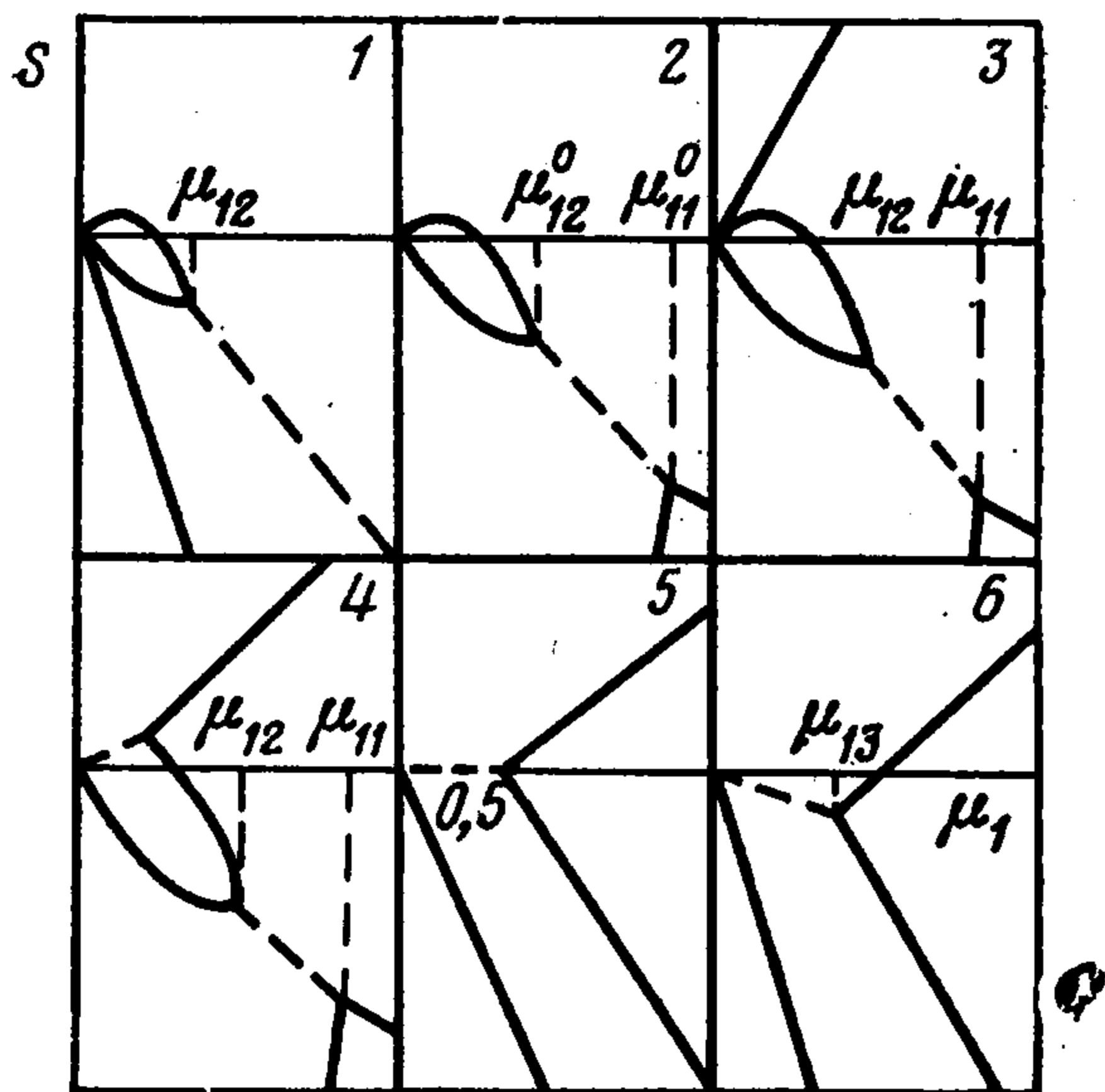
$$(20) \quad \text{Re } \Omega_m = -(1 + \mu_1) < 0, \quad V = U_0 \alpha^{-1/2} (2\mu_1 - 1)^{1/2}$$

В работе [3] в случае предельно малого значения α ($\alpha \rightarrow 0$) были получены соотношение (19) и первое соотношение (20), но при рассмотрении бегущих ($\text{Re } \Omega = 0$) волн вдоль фронта пламени, тогда как из второго соотношения (20) следует, что волновые возмущения в модели Маркштейна при $\alpha \rightarrow 0$ должны затухать.

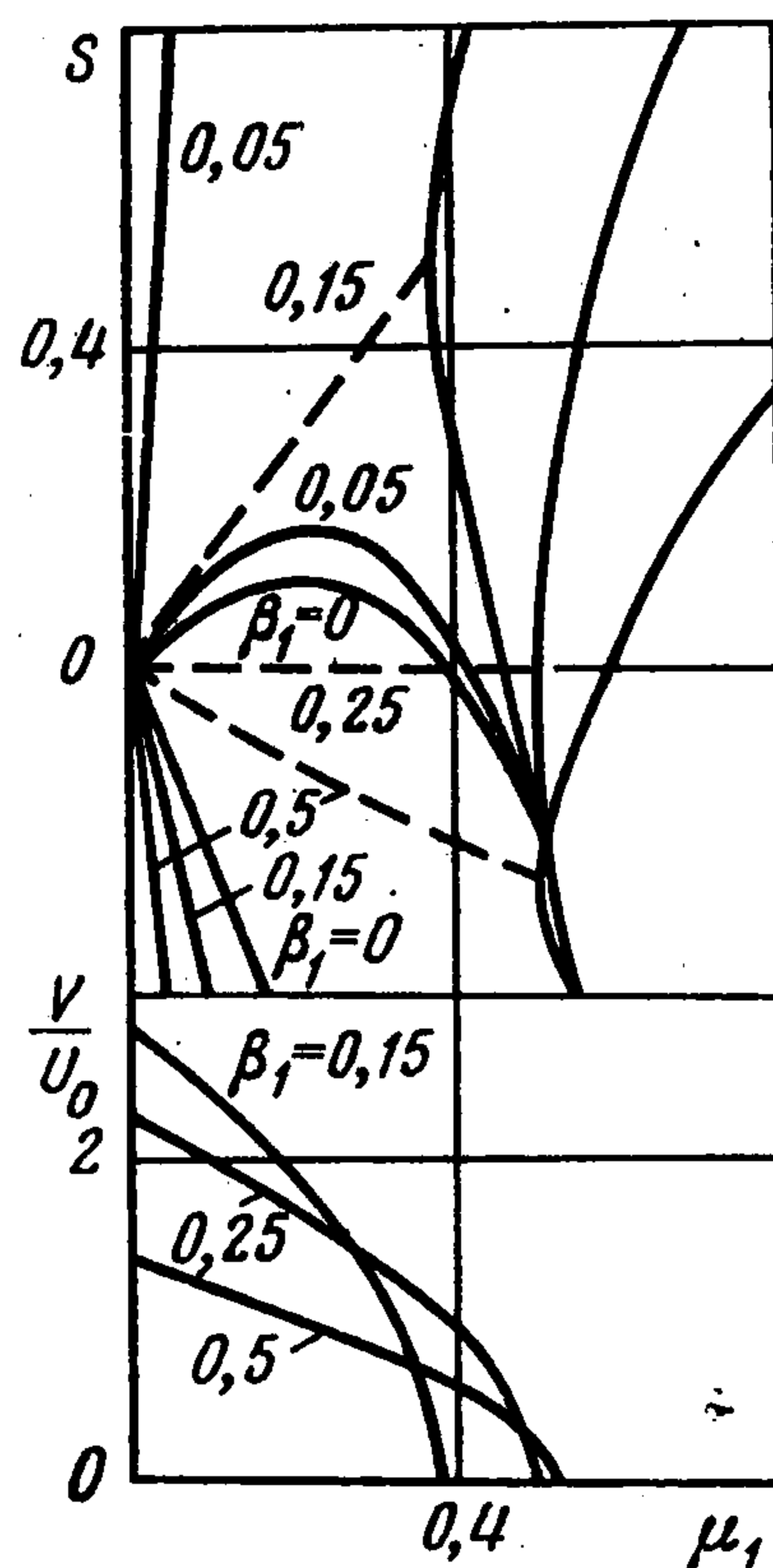
Вернемся к исследованию общего случая. Рост возмущений зависит от показателя экспоненты

$$-i (\text{Im } \omega)t = \mu_1 (\text{Re } \Omega) U_0 t / (\mu_0 L)$$

поэтому введем параметр $S = \mu_1 \text{Re } \Omega$, характеризующий возрастание ($S > 0$) или убывание ($S < 0$) возмущений за время прохождения фронтом расстояния, пропорционального толщине зоны горения.



Фиг. 5



Фиг. 6

На фиг. 5 схематически показано поведение параметра S при изменении параметра β_1 от величины μ_1 , обратно пропорциональной длине волны. Сплошные линии соответствуют $\text{Im } \Omega = 0$, а штриховые — $\text{Im } \Omega \neq 0$.

При $-1 < \beta_1 < 0$ (фиг. 5, 1) имеем возрастающее решение в области длинных волн и затухающие волновые решения в области коротких волн. Когда $\beta_1 = 0$ (фиг. 5, 2), получаем только два решения — решения Маркштейна. При $0 < \beta_1 \leq \beta_1^0$ (фиг. 5, 3) рассматриваемая модель становится неустойчивой к возмущениям с любой длиной волны. В случае $\beta_1 > \beta_1^0$ в диапазоне длинных волн ($\mu_1 < \mu_{13}$) появляются волновые решения, причем последние будут возрастающими при $\beta_1^0 < \beta_1 < \alpha / (1 - \alpha)$, нейтрально устойчивыми при $\beta_1 = \alpha / (1 - \alpha)$ и затухающими при $\beta_1 > \alpha / (1 - \alpha)$ (фиг. 5, 4 — 6).

При $\beta_1^0 < \beta_1 < \alpha / (1 - \alpha)$ на поверхности фронта пламени имеем перемещающиеся вдоль оси y и возрастающие со временем волновые возмущения, нелинейное взаимодействие которых может привести к некоторой характерной форме стоячей волны. Эту стоячую волну можно отождествить с ячеистой структурой пламени, наблюдаемой в опытах [2].

Предположим, что в результате нелинейного анализа определено значение μ_1^* , соответствующее найденному результирующему возмущению, тогда длина волны это-

го возмущения или размер ячейки будет равна $\lambda^* = 2\mu_0 L / \mu_1^*$. Проведем следующую оценку. Пусть $\mu_1^* \approx 0,25$, тогда при $\mu_0 \sim 1$, $L \sim 3 \cdot 10^{-2}$ см получим $\lambda^* \sim 1$ см, т. е. размер ячейки, близкий к экспериментальному [2, 11]. Отметим, что размер ячейки, полученный ранее из модели Маркштейна по значению μ_1 , при котором S имеет максимум (фиг. 5, 2), того же порядка, а именно $8\mu_0 L / (1 - \alpha)$ (при $\mu_1 = (1 - \alpha) / 4$).

В случае $\beta_1 = \alpha / (1 - \alpha)$ на фронте пламени возникают бегущие волны с длиной волны $\lambda > 4\mu_0 L$, перемещающиеся вдоль фронта горения со скоростью $V = U_0 [(1 - 2\mu_1) / \alpha]^{1/2}$. При $\beta_1 > \alpha / (1 - \alpha)$ (фиг. 5, 6) получаем результат, встречающийся в эксперименте [12, 13], а именно устойчивость фронта горения относительно длинноволновых возмущений и неустойчивость к коротковолновым.

На фиг. 6 для $\alpha = 0,2$ показаны зависимости параметра S и скорости распространения волновых возмущений вдоль фронта пламени от μ_1 при разных β_1 .

Отметим, что учет зависимости скорости горения от возмущений давления перед фронтом пламени позволил получить устойчивость фронта пламени к длинноволновым возмущениям, а также области существования волновых решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 3. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1944. 624 с.
2. Маркштейн Дж. Г., Генош Г., Патнем А. А. Нестационарное распространение пламени. М.: Мир, 1968. 437 с.
3. Либрович В. Б. О бегущих волнах на поверхности пламени, рассматриваемой как гидродинамический разрыв. — Физика горения и взрыва, 1973, т. 9, № 5, с. 635.
4. Плешанов А. С. О неустойчивости фронта пламени в сжимаемой идеальной среде. — Физика горения и взрыва, 1975, т. 11, № 4, с. 665.
5. Лазарев П. П., Плешанов А. С. К общему анализу неустойчивости фронта пламени в сжимаемой идеальной среде. — Физика горения и взрыва, 1978, т. 14, № 4, с. 3.
6. Чикова С. П. Устойчивость фронта пламени в канале. Тр. Ин-та механики МГУ, 1976, № 44, с. 128.
7. Скучик Е. Основы акустики. Т. 1. М.: Мир, 1976. 520 с.
8. Баренблатт Г. И., Зельдович Я. В., Истратов А. Г. О диффузионно-тепловой устойчивости ламинарного пламени. — ПМТФ, 1962, № 4, с. 21.
9. Истратов А. Г., Либрович В. Б. О влиянии процессов переноса на устойчивость плоского фронта пламени. — ПММ, 1966, т. 30, вып. 3, с. 451.
10. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.
11. Основы газовой динамики. Под ред. Эмонса Г. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 702 с.
12. Щелкин К. И., Трошин Я. К. Газодинамика горения. М.: Изд-во АН СССР, 1963, 255 с.
13. Щелкин К. И. Теория горения и детонации. — В кн.: Механика в СССР за 50 лет. Т. 2. М.: Наука, 1970. 343 с.