

УДК 536.25 + 532.135 + 532.546

## О КОНВЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЯХ ВЯЗКОПЛАСТИЧНОЙ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Любимова Т. П., Любимов Д. В.

Изучается двумерная свободная конвекция вязкопластичной жидкости в пористой среде при нагреве сбоку. Решается задача о конвекции в бесконечном вертикальном слое. Для случая произвольной плоской области формулируется вариационный принцип, позволяющий найти пороговое число Релея. Методом сеток решается задача о конвекции в прямоугольной области.

1. Рассмотрим конвективное движение в нагреваемой сбоку замкнутой области пористой среды, насыщенной вязкопластичной жидкостью. Запишем уравнения конвекции вязкопластичной жидкости в пористой среде в приближении Буссинеска в безразмерной форме

$$(1.1) \quad \nabla p - RT\gamma = F, \quad R = \frac{\rho_f g \beta \Theta k a}{\eta \chi}$$

$$\partial T / \partial t + \mathbf{v} \nabla T = \Delta T, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$(1.2) \quad \mathbf{v} = - \left( 1 - \frac{\Lambda}{|\mathbf{F}|} \right) \mathbf{F} \quad (|\mathbf{F}| > \Lambda), \quad \mathbf{v} = 0 \quad (|\mathbf{F}| \leq \Lambda); \quad \Lambda = \frac{\lambda k a}{\eta \chi}$$

На границе области ставится условие непроницаемости  $(\mathbf{v} \mathbf{n}) = 0$ , где  $\mathbf{n}$  — нормаль к поверхности, ограничивающей рассматриваемую область, и задается распределение температуры, соответствующее нагреву сбоку.

В качестве единиц длины, времени, скорости, давления, силы и температуры выбраны соответственно  $a$ ,  $(\rho c_p)_m a^2 / (\rho c_p)_f \chi$ ,  $\chi / a$ ,  $\eta \chi / k$ ,  $\eta \chi / k a$ ,  $\Theta$  ( $a$  — характерный размер области,  $\Theta$  — характерная разность температур,  $\eta$  — динамическая вязкость жидкости,  $k$  — коэффициент проницаемости).

Здесь  $p$  — конвективная добавка к давлению,  $T$  — температура, отсчитываемая от некоторого среднего значения,  $\rho_f$  — плотность жидкости,  $\beta$  — коэффициент теплового расширения жидкости,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\gamma$  — единичный вектор, направленный вертикально вверх,  $\chi = \kappa_m / (\rho c_p)_f$  — коэффициент температуропроводности,  $\kappa_m$  — коэффициент теплопроводности среды,  $c_p$  — удельная теплоемкость; величины с индексом  $f$  относятся к жидкости, с индексом  $m$  — к пористой среде, насыщенной жидкостью.

Уравнения (1.2) выражают связь между скоростью фильтрации  $\mathbf{v}$  и осредненной силой взаимодействия жидкости и скелета  $\mathbf{F}$  (закон фильтрации с предельным градиентом [1]).

Задача содержит два безразмерных параметра: число Релея  $R$  и безразмерный реологический параметр  $\Lambda$ .

2. Простейшее течение возникает в длинном вертикальном слое, границы которого поддерживаются при разных температурах. Аналогичная задача для однородной жидкости решалась в [2], где было показано, что движение имеет вид двух встречных конвективных потоков, в центральной части каждого из которых образуется зона стержневого течения. В случае пористой среды, как будет показано ниже, имеется единственная застойная зона в центральной части слоя.

Рассмотрим бесконечный вертикальный слой, границы которого  $x = \mp 1/2$  поддерживаются при постоянных разных температурах  $T = \mp 1/2$ . Предполагая, что скорость имеет только вертикальную составляющую  $v_y = v$ , а температура зависит только от  $x$ , получим из уравнения теплопроводности:  $T = x$ . Как обычно (см. [3]), можно показать, что  $dp/dy = C = \text{const}$ . Тогда из  $y$ -компоненты уравнения движения получаем

$$(2.1) \quad v = Rx - C - \Lambda, \quad v > 0; \quad v = Rx - C + \Lambda, \quad v < 0$$

Распределение скорости (2.1) удовлетворяет условию замкнутости потока лишь при  $C = 0$ .

Из (2.1) следует, что границы застойной зоны определяются выражением

$$(2.2) \quad x = \pm \Lambda/R$$

При  $R < 2\Lambda$  застойная зона занимает все сечение канала, и конвективное движение отсутствует. В области  $R > 2\Lambda$  интенсивность конвекции растет с увеличением  $R$ . Расход через половину сечения канала равен  $Q = (R - 2\Lambda)^2/(8R)$ .

Таким образом, конвективное движение в вертикальном слое пористой среды существует лишь при числах Релея, больших некоторого порогового значения

$$(2.3) \quad R_* = 2\Lambda$$

причем вблизи порога интенсивность движения растет с  $R$  по квадратичному закону, а вдали от порога — по линейному.

3. Рассмотрим более общий случай — конвективное движение вязкопластичной жидкости в пористой среде, заполняющей произвольную плоскую область  $D$ , ограниченную контуром  $\Gamma_e$ . Как и в случае плоского вертикального слоя, конвективное движение при нагреве сбоку возможно лишь при числах Релея, превышающих некоторое пороговое значение  $R_*$ . Сформулируем вариационный принцип для определения  $R_*$ . Пусть замкнутый контур  $\Gamma$  целиком лежит внутри области. Проинтегрируем уравнение движения вдоль  $\Gamma$

$$(3.1) \quad \oint_{\Gamma} F d\Gamma + R \oint_{\Gamma} \gamma T d\Gamma = 0$$

Здесь учтено, что давление — однозначная функция координат. Так как  $|\mathbf{F}| < \Lambda$  при  $R < R_*$ , получаем для первого интеграла, входящего в (3.1)

$$(3.2) \quad \left| \oint_{\Gamma} \mathbf{F} d\Gamma \right| \leq \Lambda L$$

где  $L$  — длина контура  $\Gamma$ . Воспользовавшись теоремой Стокса, преобразуем второй интеграл (3.1) в интеграл по площади  $S$ , ограниченной контуром  $\Gamma$ . Таким образом получаем неравенство (координата  $x$  направлена по горизонтали)

$$(3.3) \quad R\Sigma \leq \Lambda L, \quad \Sigma = \left| \int_S \frac{\partial T}{\partial x} ds \right|$$

Покажем, что область, в которой существует вязкопластическое течение при  $R > R_*$ , переходит в некоторый замкнутый контур  $\Gamma_0$  при  $R \rightarrow R_*$ .

Предположим обратное, что при  $R = R_*$  одновременно в целой области  $\mathbf{F} = \Lambda \mathbf{k}$ , где  $\mathbf{k}$  — единичный вектор. Применим к уравнению движения операцию  $\text{rot}$  и спроектируем получающееся уравнение на ось  $z$ . Тогда будем иметь

$$(3.4) \quad \Lambda \left( \frac{\partial k_y}{\partial x} - \frac{\partial k_x}{\partial y} \right) + R = 0$$

Введем угол  $\varphi$  между вектором  $\mathbf{k}$  и осью  $x$ . Тогда уравнение (3.4) примет вид

$$(3.5) \quad \Lambda \mathbf{k} \nabla \varphi + R = 0$$

Проинтегрируем уравнение (3.5) вдоль некоторой замкнутой линии тока. Получим ( $L$  — длина контура)

$$\Lambda \oint \frac{\partial \varphi}{\partial l} dl + RL = 0$$

Для того чтобы сила  $\mathbf{F}$  была однозначной функцией координат, необходимо

$$(3.6) \quad \oint \frac{\partial \varphi}{\partial l} dl = 2\pi n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Отсюда  $L = 2\pi (\Lambda/R) n$ , т. е. имеется дискретный набор длин  $L$ . Если область течения конечна по ширине, то, очевидно, длина  $L$  непрерывно меняется от одной линии тока к другой и не может быть дискретной. Следовательно, течение не может начинаться сразу в целой области, а осуществляется при  $R = R_*$  вдоль тонкого замкнутого контура.

Поскольку вектор скорости при  $R \rightarrow R_*$  направлен по касательной к  $\Gamma_0$ , равенство в (3.3) достигается лишь при  $R = R_*$  и  $\Gamma$ , совпадающем с  $\Gamma_0$ . Отсюда следует вариационный принцип для  $R_*$

$$(3.7) \quad \frac{R_*}{\Lambda} = \min_{\Gamma} \Phi, \quad \Phi = \frac{L}{\Sigma}$$

где  $\Phi$  — функционал формы контура  $\Gamma$ . При этом контур  $\Gamma$ , доставляющий минимум функционалу  $\Phi$ , совпадает с  $\Gamma_0$ .

Заметим, что вариационный принцип (3.7) тесно связан с вариационным принципом, установленным в [1].

Действительно, при числах Релея, близких к  $R_*$ , можно пренебречь искажением температурного поля из-за конвекции, а также квадратичным по скорости членом. Тогда вариационный принцип [1] принимает вид

$$(3.8) \quad \int_D (\Lambda |\mathbf{v}| - RT\gamma\nabla) ds = \min$$

При  $R < R_*$  движение невозможно, поэтому функционал может принимать лишь неотрицательные значения, причем равенство нулю достигается при  $\mathbf{v} = 0$ . Отсюда следует, что

$$(3.9) \quad R_* = \min \left\{ \int |\mathbf{v}| ds \left| \int T\gamma\nabla ds \right|^{-1} \right\}$$

Имея в виду плоскую задачу и вводя функцию тока  $\psi$  ( $v_x = \partial\psi / \partial y$ ,  $v_y = -\partial\psi / \partial x$ ), перепишем интеграл, стоящий в знаменателе, в виде

$$(3.10) \quad \int T\gamma\nabla ds = \int \frac{\partial T}{\partial x} \psi ds$$

Предположим, что движение начинается по замкнутому контуру  $\Gamma$ . Удобно в вариационном принципе (3.9) перейти от варьирования по  $\mathbf{v}$  к варьированию по форме контура  $\Gamma$ . Внутри этого контура  $\psi = q = \text{const}$ , где  $q$  — расход жидкости через сечение контура. Поскольку скорость направлена вдоль контура, интеграл, стоящий в числителе, можно записать в виде

$$(3.11) \quad \int |\mathbf{v}| ds = qL$$

где  $L$  — длина контура. Подставляя (3.10) и (3.11) в (3.9), получаем вариационный принцип, совпадающий с (3.7).

Особенно прост для исследования случай, когда условия нагрева соответствуют (в области  $R < R_*$ ) постоянному градиенту температуры. Тогда  $\partial T / \partial x = \text{const} = A$ , причем без ограничения общности можно положить  $A = 1$ . При этом, очевидно,  $\Sigma = S$ , и вариационный принцип принимает простую форму

$$(3.12) \quad R_* = \Lambda \min_{\Gamma} \frac{L}{S}$$

При подобном растяжении контура  $\Gamma$  функционал  $\Phi$  уменьшается, поэтому контур  $\Gamma_0$ , по крайней мере, касается границы области  $D$ , причем отдельные участки  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_e$  могут даже совпадать. Будем обозначать участки контура  $\Gamma_0$ , целиком лежащие в области  $D$ , через  $\Gamma_0'$ , а участки, лежащие на границе  $D$ , — через  $\Gamma_0''$ . Можно показать, что все  $\Gamma_0'$  не имеют изломов. Так как на этих участках возможны двусторонние вариации, то на них должны выполняться уравнения Эйлера, имеющие вид

$$(3.13) \quad \left( \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right)' + \Phi = 0$$

(предполагается, что контур  $\Gamma_0'$  на данном участке описывается выражением  $y = y(x)$ ). Общее решение уравнения (3.13) имеет вид:

$$(3.14) \quad (x + C_1)^2 + (y + C_2)^2 = 1/\Phi^2$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные интегрирования, которые могут быть различными для разных  $\Gamma_0'$ . Рассматривая вариацию  $\Gamma$  в области, прилегающей к какой-либо точке сопряжения  $\Gamma_0'$  и  $\Gamma_0''$ , можно показать, что это сопряжение должно быть гладким.

Таким образом, контур  $\Gamma_0$  состоит из отдельных участков границы области  $D$  и дуг окружностей радиуса  $r = 1/\Phi$ , вписанных в границу  $D$ .

Рассмотрим подробнее случай прямоугольной области

$$(3.15) \quad x \in [-1/2, 1/2], \quad y \in [-l/2, l/2]$$

(за единицу длины принято основание прямоугольника, ось  $y$  направлена по вертикали). В этом случае при фиксированном  $r$  указанное разбиение можно провести единственным образом, после чего функционал  $\Phi$  становится функцией  $r$ . Окончательно  $r$  находится либо из условия самосоглашения  $\Phi_m = 1/r$ , либо из условия минимума  $d\Phi/dr = 0$ . В обоих случаях получается, конечно, один и тот же результат для порогового значения числа Релея

$$(3.16) \quad R_* = \Phi_m \Lambda, \quad \Phi_m = 1/r = [l + 1 + \sqrt{(l-1)^2 + \pi l}]/l$$

Приведем значения  $\Phi_m$  для ряда конкретных случаев. Квадратной области ( $l = 1$ ) соответствует  $\Phi_m \approx 3,77$ ; в случае  $l = 5$  получаем  $\Phi_m \approx 2,58$ . В пределе  $l \rightarrow \infty$  имеем  $\Phi_m \rightarrow 2$  и  $R_* = 2\Lambda$ , что совпадает с формулой (2.3), полученной выше для вертикального слоя.

4. Перейдем к численному исследованию конечно-амплитудного конвективного движения вязкопластической жидкости в пористой среде. Будем рассматривать конвективное движение в прямоугольной области (3.15). На границах области заданы условия непроницаемости для скорости и распределение температуры, соответствующее нагреву сбоку.

Модель (1.2) неудобна для численного исследования, так как при этом необходимо искать решения отдельно в застойных зонах и зонах вязкопластического течения, причем сшивание решений должно производиться на неизвестных заранее границах раздела зон. По этой причине будем пользоваться регуляризованной моделью

$$(4.1) \quad \mathbf{F} = - \left( 1 + \frac{\Lambda}{\varepsilon + |\mathbf{v}|} \right) \mathbf{v}$$

При использовании этой модели застойные зоны, строго говоря, отсутствуют. Однако при достаточно малых значениях параметра регуляризации  $\varepsilon$  закон (4.1) близок к закону фильтрации с предельным градиентом. В случае использования закона (4.1) о застойных зонах можно говорить лишь условно, в том смысле, что скорость фильтрации в этих зонах мала по сравнению со скоростью в остальной части области. В качестве критерия, выделяющего застойные зоны, можно принять

$$(4.2) \quad |\mathbf{F}| < \Lambda$$

Запишем уравнения конвекции в переменных функции тока  $\psi$  и температуры  $T$

$$(4.3) \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} + R \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \Delta T$$

$$F_x = -\zeta \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad F_y = \zeta \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \zeta = 1 + \Lambda \left[ \varepsilon + \sqrt{\left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2} \right]^{-1}$$

## Граничные условия

$$(4.4) \quad \psi|_{\Gamma_e} = 0, \quad T\left(-\frac{1}{2}, y\right) = -\frac{1}{2}, \quad T\left(\frac{1}{2}, y\right) = \frac{1}{2},$$

$$T\left(x, -\frac{l}{2}\right) = T\left(x, \frac{l}{2}\right) = x$$

Задача (4.3), (4.4) решалась методом конечных разностей. Стационарные решения получались по методу установления с использованием явной конечно-разностной схемы. Все пространственные производные, входящие в уравнения, аппроксимировались центральными разностями.

Расчеты производились для  $l = 1$  и  $l = 5$  при значениях реологических параметров  $(\Lambda, \varepsilon)$ : (2,5; 0,1), (2,5; 0,05). Число Релея варьировалось в интервале от 0 до 200. Основные вычисления были проведены на равномерной сетке с шагом 1/15 (для случая  $l = 5$ ) и 1/20 (для  $l = 1$ ).

Кроме полей функции тока и температуры в ходе расчетов определялись интегральные характеристики течения — экстремальное значение функции тока  $\psi_m$  и безразмерный тепловой поток  $N$

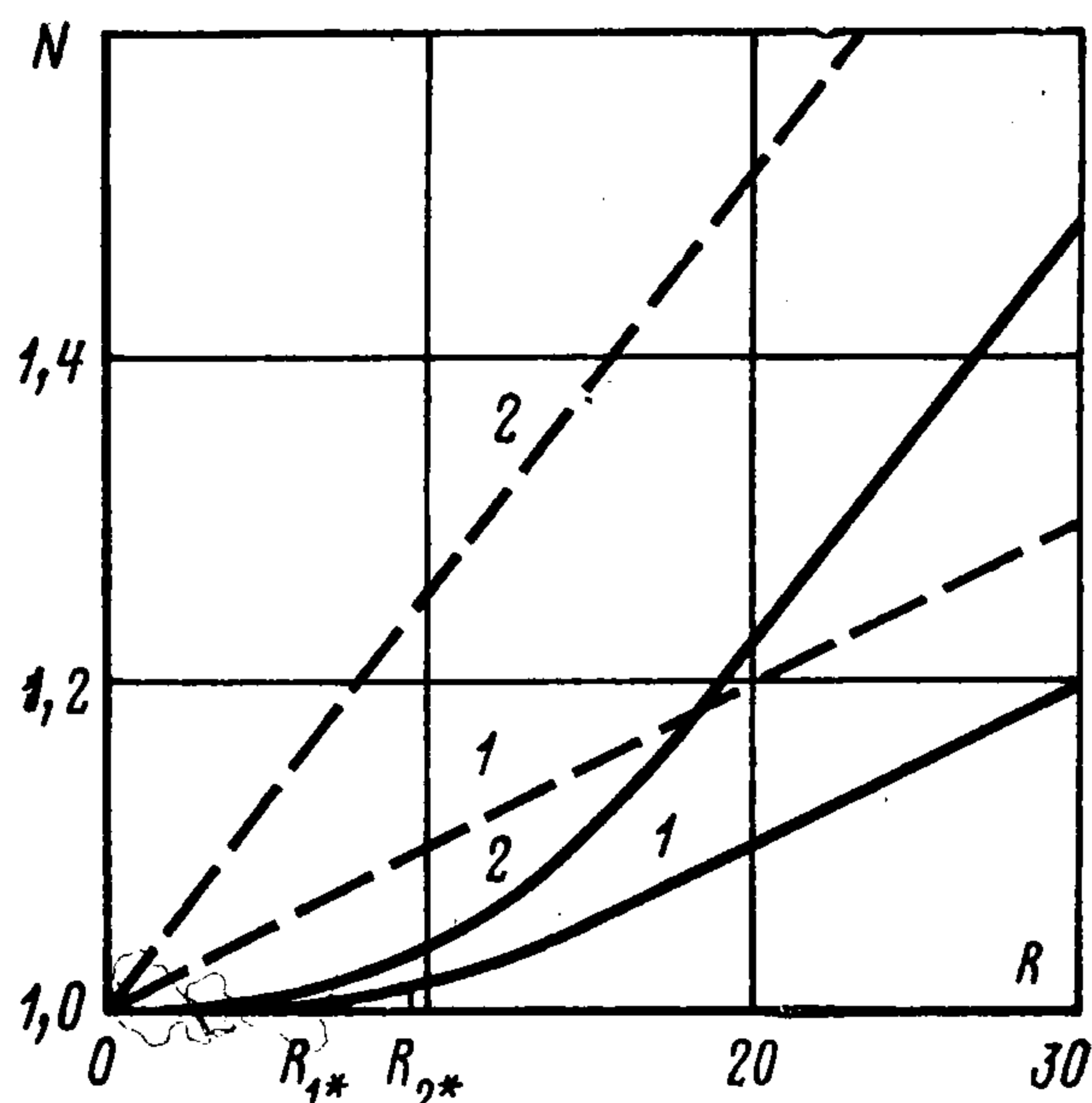
$$(4.5) \quad N = \frac{1}{2l} \oint_{\Gamma_e} \left| \frac{\partial T}{\partial n} \right| dl$$

(безразмерный поток нормирован таким образом, что теплопроводному режиму соответствует  $N = 1$ ).

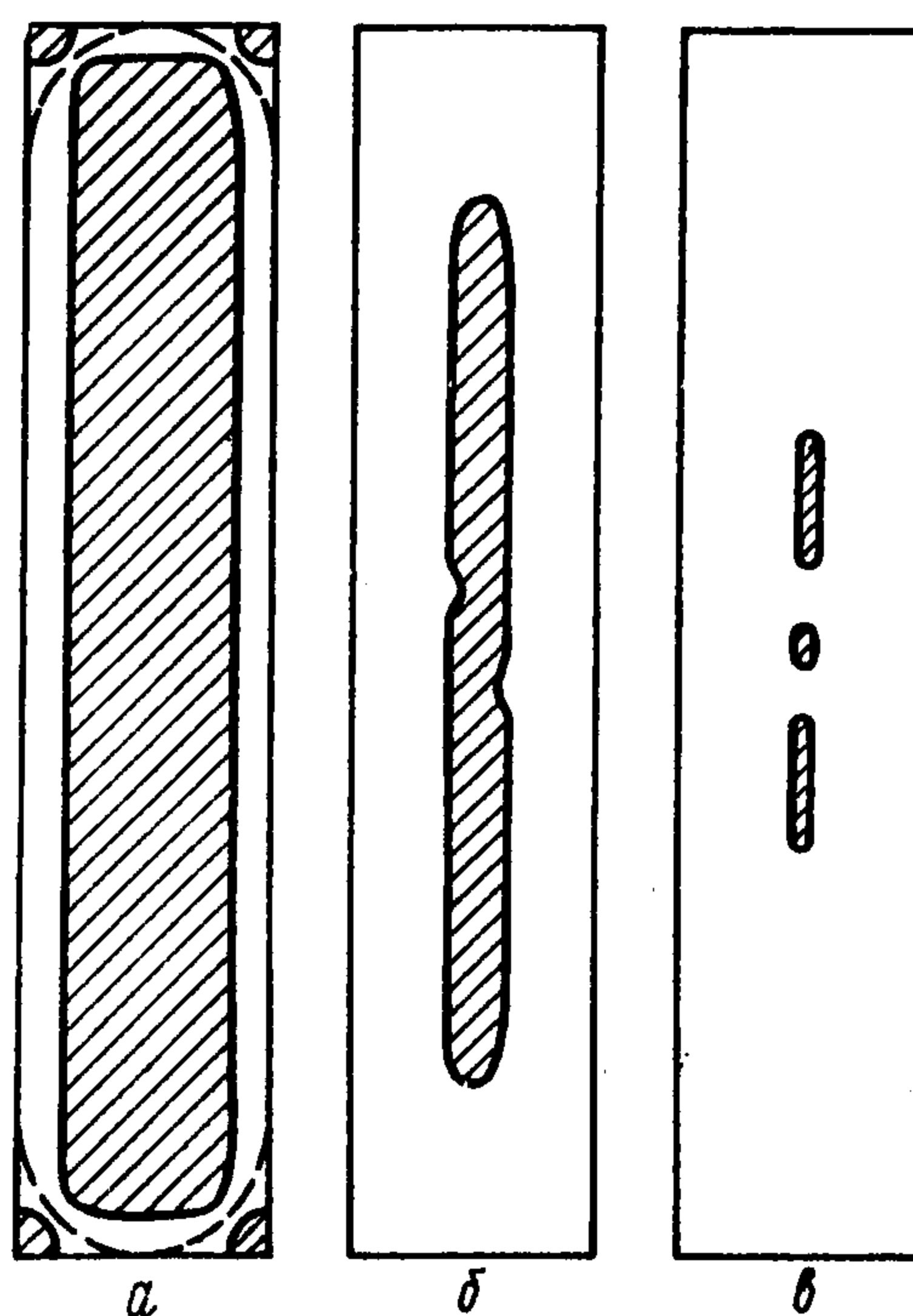
На фиг. 1 показаны полученные численно зависимости безразмерного теплового потока от числа Релея при значениях реологических параметров  $\Lambda = 2,5$ ;  $\varepsilon = 0,1$  для прямоугольной области с  $l = 5$  и квадратной области  $l = 1$  (кривые 1 и 2 соответственно). На оси  $R$  отмечены пороговые значения числа Релея  $R_{1*}$  и  $R_{2*}$ , полученные по формуле (3.16) соответственно для  $l = 5$  и  $l = 1$ . Для сравнения на фиг. 1 приведены также зависимости  $N(R)$  для ньютоновской жидкости ( $\Lambda = 0$ ) при  $l = 5$  и  $l = 1$  — штриховые линии 1 и 2 соответственно. Видно, что в области  $R \sim R_*$  происходит резкое нарастание интенсивности конвекции (наличие слабой конвекции при  $R < R_*$  связано с использованием регуляризованной модели (4.1) вместо модели с предельным градиентом (1.2)). При высоких числах Релея движение, как и в ньютоновской жидкости<sup>1</sup>, приобретает пограничный характер. Образуется замкнутый пограничный слой и относительно неподвижное ядро с вертикальным градиентом температуры; зависимость теплового потока от числа Релея становится степенной.

На фиг. 2а, б, в показано расположение застойных зон для  $l = 5$  при  $R = 10, 20, 50$  соответственно (застойные зоны заштрихованы). Расчеты показали, что при малых числах Релея вся область является застойной зоной. При  $R \sim R_*$  возникает узкая зона вязкопластического течения, примыкающая на отдельных своих участках к стенкам полости (фиг. 2, а). На той же фигуре показана форма контура  $\Gamma_0$ , полученная из вариационно-

<sup>1</sup> Власюк М. П., Полежаев В. И. Естественная конвекция и перенос тепла в пронизанных пористых материалах. Препринт Ин-та проблем механики АН СССР, 1975, № 77.



Фиг. 1

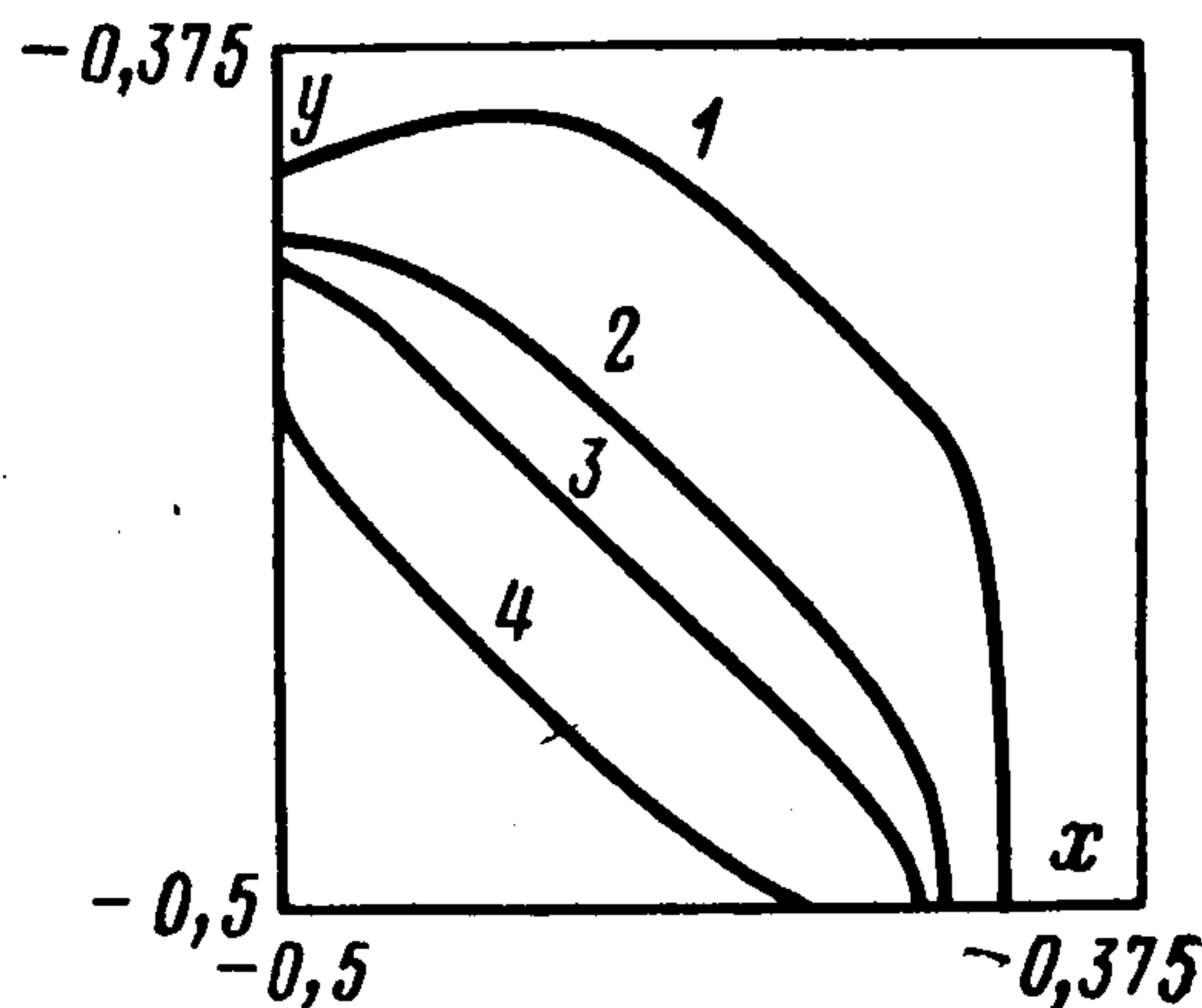


Фиг. 2

го принципа (3.12) (штриховая кривая). Видно, что форма контура  $\Gamma_0$  и форма зоны вязкопластического течения, полученная в численном счете, при  $R \gtrsim R_*$  близки. Отличие заключается в том, что в численном счете граница угловой застойной зоны обращена выпуклостью к центру области, что, по-видимому, связано с использованием регуляризованной модели фильтрации.

При увеличении числа Рейля центральная застойная зона постепенно уменьшается в размерах (фиг. 2, б, в).

Для выяснения влияния на форму границы угловой застойной зоны шага сетки и значения параметра регуляризации  $\varepsilon$  были проведены расчеты для фиксированных значений геометрического [параметра  $l = 1$ , числа Рейля  $R = 12$  и реологического параметра  $\Lambda = 2,5$  при  $h = 1/40$ ,  $\varepsilon = 0,025 \div 10^{-5}$ . На фиг. 3 изображены границы угловой застойной зоны при  $\varepsilon = 0,025$ ,  $0,025/2$ ,  $0,025/4$ ,  $0,025/32$  (кривые 1—4 соответственно). Видно, что при уменьшении параметра регуляризации, т. е. при приближении к закону фильтрации с предельным градиентом граница [угловой застойной зоны, обращенная выпуклостью к центру области, сменяется границей, обращенной выпуклостью внутрь застойной зоны, что согласуется с результатами, полученными из вариационного принципа.



Фиг. 3

Авторы благодарят Гершуни Г. З. за обсуждение работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бернадинер М. Г., Ентов В. М. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. М.: Наука, 1975. 199 с.
2. Yang Wen-Jei, Yeh Hsu-Chien. Free convection flow of Bingham plastic between two vertical plates. — Trans. ASME. Ser. C. J. Heat Transfer, 1965, v. 87, No. 2, p. 319.
3. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.

Пермь

Поступила в редакцию  
9.IV.1980