Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 2, 1981

УДК 532.592

ВЕТРОВЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Заволженский М. В.

Изучается взаимодействие тяжелой вязкой несжимаемой жидкости с воздушными течениями в двух случаях: 1) скорость течений задана на некоторой высоте над поверхностью воды, 2) течения передают свое воздействие слою жидкости глубиной h_1 посредством постоянных касательных напряжений S', приложенных к его поверхности. В первом случае в линейной постановке получены интегральные представления формы поверхности жидкости и произведен их асимптотический анализ при малых значениях $\nu g V^{-3}$ для ограниченных интервалов изменения времени (V — масштаб скорости воздушного течения). Сделаны некоторые качественные выводы о начальных стадиях взаимодействия воздушных течений с поверхностью воды. Во втором случае при $S' h_1^2 / (\rho\nu^2) \to \infty$ изучен установившийся автоколебательный режим в слое жидкости после потери устойчивости стационарного режима с треугольным профилем скоростей. Получены достаточные условия устойчивости этого автоколебательного режима и исследованы некоторые его свойства.

Ветровые волны в идеальной жидкости моделируются на основе энергетических и статистических соображений [1]. Если учитывается вязкое трение, то поверхностные волны рассматриваются как результат приложения к жидкой поверхности касательных и нормальных напряжений; для линеаризованных уравнений Навье — Стокса такие задачи описаны в [2], а в нелинейной постановке — в работе [3]. Ниже предпринята попытка объяснить ветровые волны как результат взаимодействия поверхности воды с заданным атмосферным течением. Изучается установившийся волновой режим на поверхности жидкости, вызванный приложением к ней постоянных касательных напряжений.

1. Введем декартовы координаты x', y', z', где ось Oz' направлена против силы тяжести. Пусть до момента $t' = 0$ полупространство $z' < 0$ занимала неподвижная тяжелая вязкая несжимаемая жидкость с плотностью ρ_2 и вязкостью ν_2 («вода»), а полупространство $z' > 0$ — неподвижная тяжелая жидкость с характеристиками $\rho_1 < \rho_2$ и ν_1 («воздух»). Предположим, что при $t' > 0$ в части $z' \geqslant h'$ «атмосферы» поддерживается воздушное течение, скорость $v'(x', t')$ которого параллельна плоскости $Ox'y'$ и направлена вдоль Ox'. Высота h' течения над плоскостью $z' = 0$ зависит от состояния поверхности океана. Из экспериментов известно [1], что на высоте около 14 см над гребнем волны скорость ветра практически не возмущается поднятыми им волнами. Поэтому высота h' увеличивается с ростом амплитуды ветровых волн. Для простоты будем считать h' постоянной величиной. Под действием воздушного течения начальная форма $z' = 0$ поверхности океана изменится и примет вид $z' = \zeta'(x', t)$. В океа-

не $z' < \zeta'$ и в слое $\zeta' < z' < h'$ атмосферы появятся течения $v_x^{(2)}(x', z', t')$, $v_z^{(2)}$ и $v_x^{(1)}$, $v_z^{(1)}$ (верхний индекс единица приписывается характеристикам течения в атмосфере). Для определения ветровых возмущений $v_x^{(j)}$, $v_z^{(j)}$ и создаваемых ими гидродинамических давлений $p_1^{(j)}$ $(j = 1, 2)$ будем пользоваться системой линеаризованных уравнений Навье — Стокса, а условия сопряжения течений в океане и атмосфере выполнять не на неизвестной поверхности $z' = \zeta'$, а на плоскости $z' = 0$. Тогда в безразмерных переменных

$$x = x'\sqrt{\frac{g}{\nu_2 V}}, \quad z = z'\sqrt{\frac{g}{\nu_2 V}}, \quad t = t'\sqrt{\frac{Vg}{\nu_2}}, \quad h = h'\sqrt{\frac{g}{\nu_2 V}} \tag{1.1}$$

$$v_x^{(j)} = Vu^{(j)}, \quad v_z^{(j)} = Vw^{(j)}, \quad \zeta' = \zeta\sqrt{\frac{\nu_2 V}{g}}, \quad p_1^{(j)} = q_1^{(j)} + \rho_j g z'$$

$$q_1^{(j)} = \rho_j V^2 q^{(j)}; \quad \varepsilon = \varepsilon_2 = \sqrt{\frac{\nu_2 g}{V_3}}, \quad \varepsilon_1 = \nu\varepsilon, \quad \rho = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad \nu = \frac{\nu_1}{\nu_2}$$

$$\mu = \rho\nu, \quad v(x, t) = \frac{v'}{V}, \quad V = \max_{x', t'} |v'(x', t')|$$

система уравнений и граничных условий для определения $\mathbf{v}^{(j)} = \{u^{(j)}, w^{(j)}\}$, $q^{(j)}$ и ζ имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}^{(j)}}{\partial t} + \nabla q^{(j)} = \varepsilon_j \nabla^2 \mathbf{v}^{(j)}, \quad \nabla \mathbf{v}^{(j)} = 0; \quad \zeta = \mathbf{v}^{(j)} = 0 \ (t = 0), \quad j = 1, 2$$

$$u^{(1)} = v(x, t), \quad w^{(1)} = 0 \ (z = h); \quad u^{(2)} = w^{(2)} = 0 \quad (z = -\infty)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = w^{(1)}|_{z=+0} = w^{(2)}|_{z=-0}, \quad \left.\frac{\partial u^{(2)}}{\partial z} + \frac{\partial w^{(2)}}{\partial x}\right|_{z=-0} =$$

$$= \mu\left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial w^{(1)}}{\partial x}\right)_{z=+0}$$

$$\varepsilon(1 - \rho)\zeta = q^{(2)} - 2\varepsilon \left.\frac{\partial w^{(2)}}{\partial z}\right|_{z=-0} - \rho q^{(1)} +$$

$$+ 2\mu\varepsilon \left.\frac{\partial w^{(1)}}{\partial z}\right|_{z=+0}, \quad u^{(1)}|_{z=+0} = u^{(2)}|_{z=-0}$$

Для решения этой задачи применим преобразования Лапласа — Карсона по t и Фурье по x. Для обозначений изображений по Лапласу — Карсону используем черту, а по Фурье — прописную букву, соответствующую оригиналу. Опуская промежуточные выкладки, выпишем выражение для изображения поверхности раздела жидкостей $\bar{Z}$, справедливое при малых значениях параметров ρ и ε

$$\bar{Z} = \frac{i\rho s \bar{V} \operatorname{sgn}\omega \exp\left(-h\sqrt{\omega^2 + \frac{s}{\nu\varepsilon}}\right)}{[2\varepsilon\omega^2(1 - \mu) + s]^2 + |\omega|\varepsilon}[1 + O(\delta)], \quad s \not\to 0 \tag{1.2}$$

$$\delta = \max(\rho^2, \rho\sqrt{\varepsilon}, \varepsilon^2), \quad \operatorname{Re}\sqrt{s} > 0$$

$$\bar{V} = \frac{s}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty v(x, t)\, e^{-st - i\omega x}\, dx$$

Ограничение $s \not\to 0$ появилось из-за того, что в (1.2) опущены члены порядка $O(\exp(\pm|\omega h|))$ по сравнению с $O(\exp(\pm h\sqrt{\omega^2 + s/(\nu\varepsilon)}))$. Такое упрощение справедливо при малых ε, но не верно при $s \to 0$. Поэтому нижеследующие результаты теряют силу при $t \to \infty$.

Обращая (1.2) [4] и опуская $O(\delta)$, получим выражение для формы поверхности раздела жидких сред, справедливое при условии, что величиной порядка $O(\delta)$ можно пренебречь в сравнении с единицей

$$\zeta = \frac{\rho}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega, t-\tau) e^{i\omega x} K(\omega, \tau)\, d\omega\, d\tau \tag{1.3}$$

$$K(\omega, t) = \frac{1}{4\sqrt{|\omega|\varepsilon}} \sum_{n=1}^{2} (-1)^{n+1} \exp(s_n t) \times$$

$$\times \left\{ \exp\left(-h\sqrt{\omega^2 + \frac{s_n}{\nu\varepsilon}}\right) \operatorname{erfc}\left[\frac{h}{2\sqrt{\nu\varepsilon t}} - \sqrt{(\nu\varepsilon\omega^2 + s_n)t}\right] + \right.$$

$$\left. + \exp\left(h\sqrt{\omega^2 + \frac{s_n}{\nu\varepsilon}}\right) \operatorname{erfc}\left[\frac{h}{2\sqrt{\nu\varepsilon t}} + \sqrt{(\nu\varepsilon\omega^2 + s_n)t}\right]\right\} \operatorname{sgn}\omega$$

$$s_n = -2\varepsilon\omega^2(1-\mu) - i(-1)^n \sqrt{|\omega|\varepsilon}.$$

Используя малость ε, формулы (1.3) можно упростить с помощью асимптотических формул для функции $\operatorname{erfc} z$ при $|z| \to \infty$ [5]. Согласно этим формулам основной вклад в асимптотическое выражение (1.3) при $\varepsilon \to 0$ дают те значения аргумента функций erfc, которые лежат в левой полуплоскости. Эти значения определяются при решении неравенства

$$\operatorname{Re}\left[\frac{h}{2\sqrt{\nu\varepsilon t}} - \sqrt{(\nu\varepsilon\omega^2 + s_n)t}\right] < 0$$

относительно ω. При этом оказывается, что если

$$|\omega| > \omega_0(t) = \frac{h}{2\varepsilon t\sqrt{\nu k}} + O(\varepsilon), \quad k = \nu - 2(1-\mu) \tag{1.4}$$

то с ошибкой $O(\varepsilon^{3/4})$ в сравнении с единицей

$$\zeta = \frac{i\rho}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \int_{|\omega| > \omega_0(\tau)} V(\omega, t-\tau) K(\omega, \tau, x)\, d\omega\, d\tau \tag{1.5}$$

$$K(\omega, t, x) = \frac{\operatorname{sgn}\omega}{\sqrt{\varepsilon|\omega|}} \exp\left[-2\omega^2\varepsilon(1-\mu)t + i\omega x - h\left(\frac{|\omega|}{4\nu^2\varepsilon}\right)^{1/4}\right] \times$$

$$\times \sin\left[t\sqrt{|\omega|\varepsilon} - h\left(\frac{|\omega|}{4\nu^2\varepsilon}\right)^{1/4}\right]; \quad \int_{|\omega| > \omega_0} = \int_{-\infty}^{-\omega_0} + \int_{\omega_0}^{\infty}$$

Если атмосферный ветер, отсутствующий в начальный момент $t' = 0$, быстро достигает значения $v'(x')$ и далее по времени остается постоянным, то формулу (1.5) можно упростить. Пренебрегая изменением функции v' от 0 до $v'(x')$ на малом отрезке времени, получим

$$\zeta = \frac{i\rho}{\sqrt{2\pi}} \int_{|\omega| > \omega_0(t)} V(\omega) K(\omega, t, x)\, d\omega \tag{1.6}$$

Выделяя в изображении Фурье $V(\omega)$ осциллирующую часть и включая ее в ядро $K(\omega, t, x)$, сведем определение формы свободной поверхности ζ

при постоянном по времени ветре к исследованию интегралов вида

$$(1.7)\qquad S(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\omega_0(t)}^{\infty}\frac{f(\omega)}{\sqrt{\omega\varepsilon}}E(\omega,t)\times$$
$$\times\exp\left[i\left(\omega x+t\sqrt{\omega\varepsilon}-h\left(\frac{\omega}{4\nu^2\varepsilon}\right)^{1/4}\right)\right]d\omega$$
$$E(\omega,t)=\exp\left[-2\omega^2\varepsilon(1-\mu)t-h\left(\frac{\omega}{4\nu^2\varepsilon}\right)^{1/4}\right]$$

в которых функция $f(\omega)$ не носит осцилляционного характера.

Показатель осциллирующей экспоненты содержит большой параметр $\varepsilon^{-1/4}$, поэтому для оценки интеграла можно применить метод стационарной фазы. В результате имеем:

1°. При

$$(1.8)\qquad x_0=\frac{4\nu t^3\varepsilon^2}{h^2}\ll x<\left(\frac{k\varepsilon^2t^3h}{128}\sqrt{\frac{k}{\nu}}\right)^{1/4}$$
$$t\ll\frac{h}{2}\left(\frac{1}{4\nu\varepsilon^2}\sqrt{\frac{k}{\nu}}\right)^{1/3}$$
$$S=\frac{2}{\sqrt{3x\varepsilon}}f\left(\frac{\xi_0^4}{\varepsilon}\right)E\exp\left[i\left(t\xi_0^2-\frac{h\xi_0}{\sqrt{2\nu\varepsilon}}+\frac{x}{\varepsilon}\xi_0^4+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$\xi_0=\left(\frac{\varepsilon h^2}{32\nu x^2}\right)^{1/6},\quad E=\exp\left[-\frac{1-\mu}{32\nu}\left(\frac{g^2t'^3}{4\nu_1y^8}\right)^{1/3}-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{gh'^3}{16\nu_1^2y}\right)^{1/3}\right],\quad y=\frac{x'}{h'}$$

Здесь ограничения на x и t вытекают (с учетом (1.4)) из неравенства $\xi_0>(\varepsilon\,\omega_0(t))^{1/4}$, которое означает, что стационарная точка принадлежит интервалу интегрирования.

2°. При $|x|\ll x_0$, $t<t_0$

$$(1.9)\qquad S=\frac{4\xi_0}{\varepsilon\sqrt{2t}}f\left(\frac{\xi_0^4}{\varepsilon}\right)E\exp\left[i\left(t\xi_0^2-\frac{h\xi_0}{\sqrt{2\nu\varepsilon}}+\frac{x}{\varepsilon}\xi_0^4+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$\xi_0=\frac{h}{2t\sqrt{2\nu\varepsilon}},\quad E=\exp\left[-\frac{(1-\mu)\nu_2h'^8}{2^{11}g^2t'^7\nu_1^4}-\frac{h'^2}{4\nu_1t'}\right]$$

3°. Из ограничений (1.8) и (1.9) следует, что при $|x|\to\infty$, $t\not\to\infty$ стационарная точка фазовой функции интеграла (1.7) не попадает в интервал интегрирования. Поэтому при $|x|\to\infty$, $t\not\to\infty$ асимптотику интеграла (1.7) нужно строить интегрированием по частям. Получим

$$(1.10)\qquad S=\frac{i}{x\sqrt{2\pi\omega_0\varepsilon}}f(\omega_0)E\exp\left[i\left(\omega_0x+t\sqrt{\omega_0\varepsilon}-h\left(\frac{\omega_0}{4\nu^2\varepsilon}\right)^{1/4}\right)\right]$$
$$E=\exp\left[-\frac{(1-\mu)h'^2}{2k\nu_1t'}-\left(\frac{gh'^5}{8\nu_1^2t'\sqrt{k\nu_1\nu_2}}\right)^{1/2}\right],\quad x\gg1,\ t\not\to\infty$$

4°. Если $|x|\to\infty$, $t\to\infty$, то в фазовой функции интеграла (1.7) можно пренебречь последним слагаемым. Тогда метод стационарной фазы дает

$$(1.11)\qquad 1\ll x<t\varepsilon\left(\frac{t\sqrt{\nu k}}{2h}\right)^{1/2},\quad t\gg1$$
$$S(-x,t)=\sqrt{\frac{2}{\varepsilon x}}f(\eta_0)E\exp\left[-i\left(x\eta_0+\frac{h}{2}\sqrt{\frac{t}{\nu x}}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$\eta_0=\frac{t^2\varepsilon}{4x^2},\quad E=\exp\left[-\frac{(1-\mu)\nu_2gt'^5}{8x'^4}-\frac{h'}{2}\left(\frac{gt'}{\nu_1|x'|}\right)^{1/2}\right]$$

В случаях 1°, 2° и 4°, если x выпадает из соответствующего интервала, то S асимптотически равно нулю. При этом интегрирование по частям и метод стационарной фазы приводят к одинаковой погрешности: формулы (1.8) — (1.11) верны при условии, что величиной $O(\varepsilon^{3/4})$ можно пренебречь по сравнению с единицей. Заметим, что случай 4° при $|x| \to \infty$, $t \to \infty$ описывает поведение интеграла (1.7), но не выражения для формы поверхности раздела жидких сред, так как формулы (1.6), (1.7) построены на основе (1.2) — выражения, не справедливого при $s = 0$ (т. е. $t = \infty$). Тем не менее выражение (1.11) стоит рассмотреть потому, что оно при некоторых условиях ($\mu \to 0$, $h \to 0$) переходит в известное из теории движения жидкости под действием напряжений на ее поверхности [6, 7].

5°. Осталось рассмотреть случай $|x| \not\to \infty$, $t \to \infty$, когда формула (1.6) для постоянных ветровых течений в атмосфере перестает быть справедливой, так как приводит к противоречивому результату о прекращении движения жидкости. Для определения состояния жидкости в окрестности рассматриваемого постоянного течения $v(x)$ в атмосфере при $t \to \infty$ вернемся к исходной краевой задаче и будем решать ее в установившемся случае, полагая $\partial/\partial t = 0$. В результате получим точное выражение для формы поверхности раздела жидких сред для постоянного по времени воздушного течения

$$\zeta(x) = -\frac{2\mu h}{\pi(1-\rho)} \int_{-\infty}^{\infty} v(\xi) K(x-\xi)\, d\xi$$

$$K(x) = \int_0^{\infty} \frac{\omega^2 (\operatorname{sh} \omega h + \mu \operatorname{ch} \omega h) \sin \omega x d\omega}{\operatorname{ch} 2\omega h + \mu \operatorname{sh} 2\omega h - 2\omega^2 h^2 - 4\mu\omega h - 1}$$

При взаимодействии воды с воздухом при 20° С и нормальном атмосферном давлении $\mu = 0{,}018$. Поэтому в выражении для ядра $K(x)$ можно опустить члены с коэффициентом μ. Дальнейшие упрощения связаны с использованием параметра h. Если $h \ll 1$ (ветер непосредственно у поверхности воды), то в знаменателе интеграла $K(x)$ можно убрать $2\omega^2 h^2$. Тогда

$$\zeta = -\frac{\pi^2 \mu}{4h^2(1-\rho)} \int_{-\infty}^{\infty} v(x-\xi) \operatorname{sh} \frac{\pi\xi}{2h} ch^{-3} \frac{\pi\xi}{2h}\, d\xi, \quad h \ll 1 \tag{1.12}$$

Эта формула верна с точностью $O(\max(\mu, h^2))$.

Если $h \gg 1$ (высокий ветер над поверхностью воды), то в знаменателе интеграла $K(x)$ можно убрать $2\omega^2 h^2 + 1$, а гиперболические функции заменить показательными. Тогда

$$\zeta = \frac{\mu h}{\pi(1-\rho)} \int_{-\infty}^{\infty} v(x-\xi) \xi (\xi^2 - 3h^2)(\xi^2 + h^2)^{-3}\, d\xi, \quad h \gg 1 \tag{1.13}$$

Формула верна с точностью $O(\max(\mu, h^{-1}))$.

В формулах (1.8)—(1.11) декремент затухания E приведен в размерных переменных (1.1). Анализ этого декремента и ограничений на x и t, при которых справедливы соотношения (1.8)—(1.11), приводит к таким выводам. Первая, начальная ($t \ll t_0$) и вторая ($t < t_0$) стадии образования волн кратковременны. При высоком ветре в несколько десятков метров начальная стадия длится секунды, а вторая — несколько минут. При низком ветре эти сроки сокращаются. Тем не менее формулы (1.8) и (1.9) интересны для понимания механизма образования волн. Они качественно различны. Например, в начальной стадии время тормозит, а во второй — стимулирует развитие волнового процесса. Вязкость воды в начальной стадии задерживает образование волн. Вязкость воздуха поддерживает волнообразование во все время взаимодействия ветра с океаном. Интересно влияние гравитации на амплитуду образуемых волн. В начальной стадии ($t \ll t_0$) гравитация препятствует возникновению волн. Во второй стадии их образования, при $t < t_0$, гравитация, наоборот, увеличивает амплитуду волн. В стадиях распространения (1.10) ($x \gg 1$) и затухания (1.11) ($x \to \infty$, $t \to \infty$) гравитация вновь уменьшает амплитуду. Сводка влияния различных характеристик волнового процесса на декремент затухания волн дана ниже (плюс означает усиление, минус — ослабление, нуль — отсутствие влияния)

Период		$t \ll t_0$	$t < t_0$	$t > t_0$	$t \to \infty$
Время		—	+	+	—
Расстояние от источника		+	0	—	+
Высота ветра		—	—	—	—
Гравитация		—	+	—	—
Вязкость:	воды	—	—	+	—
	воздуха	+	+	+	+
Плотность:	воды	—	—	—	—
	воздуха	+	+	+	+

2. Формулы (1.8)—(1.11) справедливы для ограниченных значений t'. Наблюдения показывают, что стационарное течение (1.12), (1.13) при $t' \to \infty$ в жидкости не реализуется. Возможно, что оно неустойчиво. Ниже делается попытка найти установившийся волновой режим в слое $-h_1 < z' < \zeta'$ жидкости постоянной глубины h_1, вызванный постоянными напряжениями S' по касательным к возмущенной жидкой поверхности $z' = \zeta'$ в направлении Ox'. Начало прямоугольной декартовой системы координат x', z' лежит на невозмущенной жидкой поверхности $z' = 0$, а ось Oz' направлена против силы тяжести. При $z' = -h_1$ скорость жидкости равна нулю, при $z' = \zeta'$ выполняются динамические и кинематические условия на поверхности. Для определения скорости $\mathbf{v} = \{v_x, v_z\}$, разности $p' - p_*$ между гидродинамическим и атмосферным давлениями (как функций x', z', t') и формы поверхности $z' = \zeta'(x', t')$ имеем систему уравнений Навье — Стокса и краевых условий

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t'} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + \frac{1}{\rho}\nabla q' = \nu\nabla^2\mathbf{v}, \quad \nabla\mathbf{v} = 0, \quad q' = p' - p_* + \rho g z' \tag{2.1}$$

$$p_{nn} = -p_*, \quad p_{ns} = S', \quad \frac{\partial \zeta'}{\partial t'} + v_x \frac{\partial \zeta'}{\partial x'} = v_z \tag{2.2}$$

$$\mathbf{v} = 0 \quad (z' = -h_1)$$

Решение этой задачи ищем в виде волны, характеризуемой действительным волновым числом ω' (или длиной $\lambda' = 2\pi/\omega'$) и фазовой скоростью

c', подлежащими определению. Для этого положим

$$\text{(2.3)} \qquad \mathrm{v}(x', z', t') = \mathrm{v}(\omega'(x' - c't'), z'), \quad q' = q'(x, z')$$

$$\zeta' = \zeta'(x), \quad x = \omega'(x' - c't'), \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$$

Соотношения (2.1)—(2.3) запишем в безразмерных переменных

$$\text{(2.4)} \qquad z = \frac{z' + h_1}{h_1}, \quad c' = \frac{\nu c}{h_1} S, \quad \omega' = \frac{\omega}{h_1}, \quad \zeta = \varepsilon^2 h_1 \zeta$$

$$q' = \varepsilon \frac{\rho \nu^2}{h_1^2} q, \quad v_x = \frac{\nu\varepsilon}{h_1}\left(\frac{S}{\varepsilon} z + u\right), \quad v_z = \frac{\nu\varepsilon}{h_1} w$$

$$\varepsilon = \frac{\nu^3}{g h_1^3}, \quad S = \frac{S' h_1^2}{\rho \nu^2}, \quad \sigma = \frac{S'}{\rho g h_1}$$

В этих переменных задача (2.1)—(2.3) имеет точное решение $u = w = q = \zeta = 0$ при любых ω и c. Оно соответствует сдвиговому течению с треугольным профилем скоростей и невозмущенной поверхностью жидкости. Ищем такие действительные ω и c, при которых задача (2.1)—(2.3) имеет решение, отличное от этого стационарного. Расшифруем динамические условия (2.2), разложив их (при $z = 1 + \varepsilon^2\zeta$) в ряды по степеням $\varepsilon^2\zeta$, и будем искать решение в виде рядов по положительным степеням ε. Это приводит к рекуррентной последовательности линейных граничных задач для коэффициентов рядов. Для нулевых членов рядов получается однородная спектральная задача, исследованием которой и ограничимся. Ее решение имеет вид

$$\text{(2.5)} \qquad (u, w, q, \zeta) = a\,[(u_1(z), w_1(z), q_1(z), 1)\, e^{ix} + (\bar{u}_1(z), \bar{w}_1(z), \bar{q}_1(z), 1)\, e^{-ix}]$$

С помощью известных в теории ветвления методов [8] амплитуду $2a > 0$ можно выразить через поправки на ω и c из анализа условий разрешимости неоднородных задач для следующих коэффициентов рядов по ε. Оставляя эту связь в стороне, отметим только, что из результатов [8, 9] при достаточно малых ε вытекает существование автоколебательного режима (2.5), а также сходимость рядов по ε. Коэффициенты в (2.5) выражаются через w_1 из линеаризованных на решении $u = w = q = 0$ уравнений Навье — Стокса в переменных (2.4)

$$\text{(2.6)} \qquad u_1 = \frac{i w_1'}{\omega}, \quad q_1 = \frac{1}{\omega^2}\{w_1''' - [\omega^2 + i\omega S(z - c)]\, w_1' + i\omega S w_1\}$$

Функция w_1 удовлетворяет уравнению и, вместе с выраженной по (2.6) через w_1 функцией q_1, граничным условиям

$$\text{(2.7)} \qquad \left[\frac{d^2}{dz^2} - \omega^2 - i\omega S(z - c)\right]\left(\frac{d^2}{dz^2} - \omega^2\right) w_1 = 0$$

$$w_1 = w_1' = 0 \ (z = 0); \quad w_1'' + \omega^2 w_1 = 0$$

$$w_1 = -\sigma \frac{i\omega(c - 1)}{1 - 2i\sigma\omega}(q_1 - 2w_1') \quad (z = 1)$$

Замена ω на $(-\omega)$ означает переход к комплексному сопряжению. При этом формулы (2.5) не меняются. Значит, достаточно найти $\omega > 0$. Тогда все волновые числа в нулевом приближении будут иметь вид $\pm\omega$.

Решение задачи (2.7) ищем в виде ряда по положительным степеням параметра σ. Ограничимся определением нулевого члена этого ряда, пренебрегая величиной $O(\sigma)$ в сравнении с единицей. Для этого члена из (2.7) получим такие уравнения и условия:

$$w_1 = \frac{1}{\omega}\int_0^z W(x)\,\mathrm{sh}(\omega(z-x))\,dx \tag{2.8}$$

$$W'' - [\omega^2 + i\omega S(z-c)]W = 0 \tag{2.9}$$

$$W(1) = 0, \quad \int_0^1 W(x)\,\mathrm{sh}(\omega(1-x))\,dx = 0 \tag{2.10}$$

Фундаментальная система решений однородного уравнения, соответствующего (2.9), выражается через функции Бесселя с индексами $\pm\,^1/_3$

$$\varphi_1(z) = \varphi_1(z, \omega, c) = \xi J_{-1/3}(\beta_1), \quad \varphi_2(z) = \varphi_2(z, \omega, c) = \xi J_{1/3}(\beta_1) \tag{2.11}$$
$$\beta_1 = \beta_1(z) = \frac{2\xi^3}{3\omega S}, \quad \xi = [\omega^2 + i\omega S(z-c)]^{1/2}$$

У $\sqrt{z}$ зафиксирована та ветвь, мнимая часть которой положительна при $z \in [0, \infty)$. Если $z \geqslant 0$, то под $\sqrt{z}$ понимается его арифметическое значение.

Непосредственное вычисление вронскиана функций (2.11) дает

$$\varphi_1\varphi_2' - \varphi_2\varphi_1' = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} i\omega S \tag{2.12}$$

Общее решение однородного уравнения (2.9)

$$W = A\varphi_1(z, \omega, c) + B\varphi_2(z, \omega, c) \tag{2.13}$$

Для определения постоянных A и B введем (2.13) в (2.10)

$$A\varphi_1(1, \omega, c) + B\varphi_2(1, \omega, c) = 0 \tag{2.14}$$
$$AJ^{(1)}(1, \omega, c) + BJ^{(2)}(1, \omega, c) = 0$$

$$J^{(j)}(z) = J^{(j)}(z, \omega, c) = \int_0^z \varphi_j(x, \omega, c)\,\mathrm{sh}(\omega(z-x))\,dx, \quad j = 1, 2 \tag{2.15}$$

Условие разрешимости однородной системы (2.14) дает комплексное уравнение

$$J^{(2)}(1, \omega, c)\,\varphi_1(1, \omega, c) = J^{(1)}(1, \omega, c)\,\varphi_2(1, \omega, c) \tag{2.16}$$

для определения действительных волнового числа ω и фазовой скорости c в нулевом приближении.

Выпишем интегральные представления коэффициентов выражения (2.5). Из (2.8), (2.13), (2.15) и (2.16) находим

$$u_1 = \frac{i}{\omega^2}[AJ^{(1)\prime}(z) + BJ^{(2)\prime}(z)], \quad \zeta_1 = 1 \tag{2.17}$$
$$w_1 = \frac{A}{\omega}J^{(1)}(z) + \frac{B}{\omega}J^{(2)}(z), \quad q_1 = AQ_1(z) + BQ_2(z)$$
$$Q_j(z) = \frac{1}{\omega^2}\{\varphi_j(z) - iS[(z-c)J^{(j)\prime}(z) - J^{(j)}(z)]\}, \quad j = 1, 2$$

Для определения A и B имеем соотношения (2.14), (2.16)

(2.18) $$B = -\frac{\varphi_1(1)}{\varphi_2(1)} A$$

и динамическое условие $p_{nn} = -p_*$ на поверхности $z' = \zeta'$, которое в переменных (2.4) с точностью $O(\sigma)$ дает $\zeta = q + 2\omega\, \partial u/\partial x$ $(z = 1)$. Вводя сюда величины (2.5), учитывая (2.17) и то, что $\zeta_1 = 1$, получим второе соотношение между A и B, которое упрощается с помощью (2.8), (2.12) и (2.16)

(2.19) $$A = \left\{-\frac{3iS\sqrt{3}}{2\pi\omega\varphi_2(1)} - \left[\frac{2}{\omega} + \frac{iS(1-c)}{\omega^2}\right]\left[J^{(1)\prime}(1) - \frac{\varphi_1(1)}{\varphi_2(1)} J^{(2)\prime}(1)\right]\right\}^{-1}$$

3. Анализ решений уравнения частот (2.16) проведем при $S \gg 1$. Положим

(3.1) $$\omega = S\alpha, \ \xi = S\eta, \ \beta_1 = S\beta, \ \beta = \beta(z) = \frac{2\eta^3}{3\alpha}$$
$$\eta = \eta(z) = \sqrt{\alpha^2 + i\alpha(z - c)}$$

и применим к (2.11) асимптотические формулы для функций Бесселя при больших значениях аргумента. Тогда можно положить

(3.2) $$\varphi_1(z) = \frac{C}{\sqrt{\eta(z)}} \cos S\beta(z), \ \varphi_2(z) = \frac{C}{\sqrt{\eta(z)}} \sin S\beta(z), \ C = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\alpha S}$$

Постоянная C подобрана так, чтобы вронскиан системы функций (3.2) при $S \to \infty$ совпадал с выражением (2.17).

Подставляя (3.2) в (2.15) получим интегралы, которые вычисляются асимптотически при $S \to \infty$

(3.3) $$J^{(1)}(1) = -\frac{C}{S}\left[\frac{\eta_0 \sin S\beta_0 + i\alpha \cos S\beta_0}{2\alpha c\sqrt{\eta_0}} e^{\alpha S} + \frac{i \cos S\beta_1}{(1-c)\sqrt{\eta_1}}\right]$$
$$J^{(2)}(1) = \frac{C}{S}\left[\frac{\eta_0 \cos S\beta_0 - i\alpha \sin S\beta_0}{2\alpha c\sqrt{\eta_0}} e^{\alpha S} - \frac{i \sin S\beta_1}{(1-c)\sqrt{\eta_1}}\right]$$
$$\eta_0 = \eta(0), \ \eta_1 = \eta(1), \ \beta_0 = \beta(0), \ \beta_1 = \beta(1), \ S \to \infty$$

Подставляя (3.2) и (3.3) в (2.16), получим уравнение частот

(3.4) $$\operatorname{ctg} \frac{2S(\eta_0^3 - \eta_1^3)}{3\alpha} = \frac{i\alpha}{\eta_0}$$

из которого следует, что

(3.5) $$\eta_0^3 - \eta_1^3 = \alpha\mu_k - \frac{3\alpha}{2S} \operatorname{arctg} \frac{i\alpha}{\eta_0}, \ \mu_k = \frac{3\pi(2k+1)}{4S}, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Положим

$$X = (\alpha, c), \quad \pi(X) = \eta_0^3 - \eta_1^3 - \alpha\mu_k, \quad R(X) = \frac{3\alpha}{2} \operatorname{arctg} \frac{i\alpha}{\eta_0}$$

Тогда (3.5) сводится к уравнению

(3.6) $$\pi(X) + S^{-1}R(X) = 0$$

Такие уравнения изучены в работе [10]. Полученные там результаты позволяют установить, что если функции $\pi(X)$ и $R(X)$ имеют по α и c

производные первого и второго порядков, причем в точке X_0, где $\pi(X_0) = 0$ первые производные π по α и c одновременно не равны нулю, то при достаточно больших S решение уравнения (3.6) близко к решению уравнения $\pi(X) = 0$ и может быть получено методом Ньютона — Канторовича с начальным приближением X_0. Существование нужных производных обеспечивается тем, что функция $\operatorname{arctg}(i\alpha/\eta_0)$ аналитична по своему аргументу, так как $|i\alpha/\eta_0| < 1$ при $c \neq 0$. Функция $\pi(X)$ также имеет ограниченные производные по α и c в любой конечной области изменения этих переменных, не содержащей точку $\alpha = c = 0$. Поэтому при достаточно больших S вместо (3.6) имеем уравнение

$$\eta_0^3 - \eta_1^3 - \alpha\mu_k = 0, \quad \eta_0 = \sqrt{\alpha^2 - i\alpha c}, \quad \eta_1 = \sqrt{\eta_0^2 + i\alpha} \tag{3.7}$$

причем решение исходного уравнения (3.6) отличается от решений уравнения (3.7) на $O(1/S)$ при $S \to \infty$.

Для решения уравнения (3.7) положим

$$\eta_0 = {}^1/_2 e^{i\pi/4}\sqrt{\alpha}\,(x - x^{-1}) \tag{3.8}$$

Тогда из (3.7)

$$3px^4 - x^3 + p = 0, \quad p = \frac{\sqrt{\alpha}}{4\mu_k} e^{-\pi i/4} \tag{3.9}$$

К этому уравнению нужно присоединить соотношение $\eta_0^2 = \alpha^2 - i\alpha c$, из которого в силу (3.8) следует

$$\alpha = -{}^1/_4 \operatorname{Im}(x^2 + x^{-2}), \quad c = {}^1/_2 - {}^1/_4 \operatorname{Re}(x^2 + x^{-2}) \tag{3.10}$$

и неравенство $\operatorname{Im}\eta_0 > 0$, фиксирующее ветвь корня и нужное для устранения посторонних корней. Для переменной x оно имеет вид

$$\operatorname{Im}[(x^{-1} - x)e^{i\pi/4}] < 0 \tag{3.11}$$

Ограничим исследование системы (3.9)—(3.11) тремя случаями:

1°. $\mu_k \to 0$. В этом случае число p в (3.9) — большой параметр. Уравнение (3.9) имеет корни

$$x_n = 3^{-1/4}\exp\left(\frac{2n+1}{4}\pi i\right) + O(p^{-1}), \quad n = 0, 1, 2, 3 \tag{3.12}$$

Для определения n используем условие (3.11), из которого с учетом (3.12) заключаем, что $\cos(\pi n/2 - \pi/3) > 0$. Следовательно, $n = 0$ и 1. Вводя (3.12) при этих n в (3.10) и отбрасывая отрицательные значения α, получим

$$\alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad c = \frac{1}{2}, \quad |\mu_k| \ll 1 \tag{3.13}$$

2°. $\mu_k \to -\infty$. В этом случае p^{-1} — большой параметр и

$$\alpha = \sqrt{-\mu_k/2}, \; c = {}^1/_2, \; \mu_k \to -\infty \tag{3.14}$$

3°. $\mu_k \to \infty$. Система (3.9)—(3.11) не имеет действительных по α решений.

Упростим еще выражения (2.18) и (2.19) с помощью соотношений (3.2), (3.3), аналогичных выражений для производных $J^{(j)}(z)$ при $z = 1$ и уравнения частот (3.5). Получим

$$A=\frac{S\alpha\sin S\beta_1}{4C\sqrt{\eta_1}},\quad B=-\frac{S\alpha\cos S\beta_1}{4C\sqrt{\eta_1}} \tag{3.15}$$

4. Вопрос о поле скоростей и гидродинамическом давлении по всей глубине жидкости оставим в стороне, ограничившись определением горизонтальной скорости на поверхности жидкости и гидродинамического давления на грунт. Для этого из (2.17), (3.3), (3.2) и (3.15) находим

$$u_1(1)=-\frac{i}{2\alpha S},\quad q_1(0)=-\frac{i}{4\alpha S}\left(\frac{2\alpha-i}{2\alpha+i}\right)^{1/4} \tag{4.1}$$

Теперь из формул (2.3)—(2.5), (3.13), (3.14) и (4.1) вытекает, что форма поверхности жидкости

$$\zeta'=a'\cos x,\quad x=\frac{2\pi}{\lambda'}(x'-c't') \tag{4.2}$$

(a' — размерный аналог амплитуды $2a$ в (2.5)).

Горизонтальная скорость жидкости на поверхности

$$v_x(x',\zeta')=\frac{S'}{\mu}(h_1+\zeta')+\frac{g\lambda'a'}{4\pi\nu}\sin x \tag{4.3}$$

Гидродинамическое давление на грунт

$$p'(x',-h_1)=p_*+\rho g h_1+\frac{\rho g\lambda'a'}{8\pi h_1}\psi(x) \tag{4.4}$$

$$\psi(x)=\begin{cases}\sin x, & \mu_k\to-\infty\\ \cos(x+\pi/3), & |\mu_k|\ll 1\end{cases}$$

Фазовая скорость, период и длина волн

$$c'=\frac{S'h_1}{2\mu},\quad T'=\frac{\lambda'}{c'} \tag{4.5}$$

$$\lambda'=\frac{2\pi\rho\nu^2}{S'h_1\alpha}=\frac{\pi\nu}{c'\alpha}=\begin{cases}(\pi\nu/c')\sqrt{-2/\mu_k}, & \mu_k\to-\infty \quad \text{(а)}\\ 2\pi\nu\sqrt{3}/c', & |\mu_k|\ll 1 \quad \text{(б)}\end{cases}$$

$$\mu_k=\frac{3\pi\rho\nu^2(2k+1)}{4S'h_1^2}=\frac{3\pi\nu(2k+1)}{8c'h_1},\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots$$

Следующие результаты вытекают из формул (4.2) — (4.5).

Течение распадается на две системы волн, определяемых длинами (а) и (б) в (4.5). Волны типа (б) практически не различаются по длине и периоду. Количество этих волн ограничено. Их число k определяется условием $|2k+1|\ll 4S'h_1^2/(3\pi\rho\nu^2)$. Таким образом эти волны, особенно на мелкой воде, существуют не всегда. Максимальное давление на грунт в случае волн (б) отстает от гребня волны по фазе $\pi/3$.

Волны типа (а) различаются по периоду и длине. Их число бесконечно. Они представляют собой однопараметрическое семейство волн, распространяющихся в направлении действия касательных напряжений. В отличие от волн типа (б) волны (а) существуют при любых k. При $k\to-\infty$ длина и период волн (а) уменьшаются. В этом случае волны (а) представляют собой обычную рябь на поверхности воды.

Отметим еще следующие общие свойства волн (а) и (б).

Фазовая скорость всех волн, вызванных касательными напряжениями на поверхности жидкости, одинакова.

Возмущенная скорость на скате, перед гребнем волны, направлена в сторону воздействия касательных напряжений на поверхность; за гребнем волны, на подъеме, направление скорости противоположно.

Увеличение напряжений S' оказывает сглаживающее воздействие на поверхность жидкости, так как способствует уменьшению длины волн и их периода и увеличению фазовой скорости. Увеличение глубины жидкости также уменьшает длину и период и увеличивает фазовую скорость волн. Рост вязкости, наоборот, увеличивает длину и период и уменьшает фазовую скорость. Точно так же влияет на волны и плотность жидкости. Последний факт согласуется с наблюдениями. Известно, что резкое уменьшение плотности волнующейся воды при покрытии жидким маслом ведет к ослаблению колебаний на поверхности. Интересной особенностью волн является то, что их длина, период и фазовая скорость не зависят от ускорения силы тяжести g.

Полученные результаты справедливы при одновременном выполнении трех условий: $\varepsilon \ll 1$, $\sigma \ll 1$, $S \gg 1$, которые в силу (2.4) эквивалентны требованию, чтобы глубина жидкости

$$h_1 \gg \max \left(S' / (\rho g),\ \sqrt{\rho \nu^2 / S'},\ \sqrt[3]{\nu^2 / g}\right)$$

Условие $S \gg 1$ говорит о том, что автоколебания (2.5) исследуются в закритическом режиме. Вопрос об устойчивости этого режима сводится к исследованию при $S \to \infty$ знака мнимой части комплексных корней c дисперсионного уравнения (2.16) при заданном действительном ω или $\alpha = \omega / S$. Из (3.7) и (3.8) находим c в зависимости от α и x: $c = {}^1/_2 - i\alpha - (x^2 + x^{-2}) / 4$. Вводя это выражение в волновую функцию $\exp(i\omega(x - ct))$, получим, что автоколебания устойчивы при $\mathrm{Re}(-ic) \leqslant 0$. Следовательно, условие устойчивости имеет вид $\mathrm{Im}[-i\alpha - (x^2 + x^{-2}) / 4] \leqslant 0$. Отсюда, в силу (3.16) имеем $\alpha \geqslant \alpha_0$, где α_0 определено в (3.13) ($\mu_k \to 0$) и в (3.14) ($\mu_k \to -\infty$). Этот результат в размерных переменных (2.4) говорит о том, что автоколебания (2.5) устойчивы, если волновое число ω' удовлетворяет условиям

$$\omega' \geqslant \frac{S' h_1^3}{2\rho\nu^2 \sqrt{3}}, \quad \mu_k \to 0$$

$$\omega' \geqslant \frac{S' h_1^3}{\rho\nu^2} \sqrt{-\frac{\mu_k}{2}}, \quad \mu_k \to -\infty$$

Отсюда следует, что увеличение глубины и интенсивности напряжений на поверхности жидкости, а также уменьшение ее плотности и вязкости сужают диапазон волновых чисел, при которых автоколебания (2.5) при $S \to \infty$ устойчивы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Титов Л. Ф.* Ветровые волны. Л.: Гидрометеоиздат, 1969. 294 с.
2. *Черкесов Л. В.* Гидродинамика поверхностных и внутренних волн. Киев: Наукова думка, 1976. 364 с.
3. *Шкадов В. Я.* К образованию волн на поверхности вязкой жидкости под действием касательного напряжения.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 3, с. 133.
4. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Справочник по операционному исчислению. М.: Высшая школа, 1965. 466 с.
5. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. М.: Гостехиздат, 1953. 380 с.
6. *Потетюнко Э. Н., Срубщик Л. С.* Асимптотический анализ волновых движений вязкой жидкости со свободной границей.— ПММ, 1970, т. 34, вып. 5, с. 826.
7. *Заволженский М. В., Терсков А. Х.* Осесимметричные волны на поверхности вязкой жидкости.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 2, с. 274.
8. *Юдович В. И.* Возникновение автоколебаний в жидкости.— ПММ, 1971, т. 35, вып. 4, с. 638.
9. *Юдович В. И.* Исследование автоколебаний сплошной среды, возникающих при потере устойчивости стационарного режима.— ПММ, 1972, т. 36, вып. 3, с. 450.
10. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
2.XI.1979