Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 2, 1981

УДК 532.592

ПОСТРОЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРА ВНУТРЕННИХ ВОЛН

Секерж-Зенькович С. Я.

Рассматривается дифференциальный оператор, к исследованию которого сводятся многие задачи линейной теории волн в непрерывно статифицированной жидкости. Особенность этого оператора в том, что старшая производная по времени входит в одни члены со старшими производными по координатам. Впервые оператор такого типа встречается в уравнении, выведенном С. Л. Соболевым [1] при исследовании неустановившихся движений вращающейся жидкости. Некоторые обобщения уравнения С. Л. Соболева рассматривались в [2–4] и др.

Ниже строится с помощью теории обобщенных функций фундаментальное решение оператора внутренних волн и описывается его гидродинамический смысл. Краткое изложение полученных результатов содержится в [5].

1. Постановка задачи. Преобразование Фурье фундаментального решения. Рассмотрим следующий оператор, описывающий в линейном приближении и приближении Буссинеска процесс распространения внутренних волн в непрерывно стратифицированной жидкости:

$$\mathrm{N} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_3 + N^2\Delta_2 \tag{1.1}$$

где t — время, Δ_3 — трехмерный оператор Лапласа от пространственных координат x_1, x_2, x_3, Δ_2 — двумерный оператор Лапласа от горизонтальных координат x_1 и x_2, N — так называемая частота Брента — Вяйсяля, характеризующая распределение плотности неоднородной жидкости. Обычно предполагается, что плотность ρ_0 жидкости в невозмущенном состоянии зависит лишь от вертикальной координаты x_3; тогда, если ось x_3 направлена против ускорения силы тяжести g, то $N^2 = -g/\rho_0 d\rho_0/dx_3$. В данной работе предположено, что $N^2 = \mathrm{const} > 0$. Такой случай отвечает устойчивой экспоненциальной стратификации и близок к реализуемому в лабораторных экспериментах. Соответствующий этой стратификации оператор N будем называть оператором внутренних волн.

Построим фундаментальное решение $E\ (x, t)$ оператора внутренних волн. По определению, $E\ (x, t)$ есть [6] обобщенная функция, удовлетворяющая уравнению

$$\mathrm{N}E = \delta\ (x, t) \tag{1.2}$$

где в правой части стоит δ-функция Дирака, а $x = (x_1, x_2, x_3)$ — точка в трехмерном евклидовом пространстве R^3.

Ограничиваясь пространством $S'(R^4)$ обобщенных функций медленного роста, воспользуемся для построения $E\ (x, t)$ методом преобразования Фурье F_x по пространственным переменным x_j.

Применив F_x к уравнению (1.2), получим для образа Фурье $E^*(\xi, t)$ функции $E(x, t)$ уравнение

$$-|\xi|^2 \frac{\partial^2 E^*}{\partial t^2} - N^2(\xi_1^2 + \xi_2^2) E^* = 1(\xi)\,\delta(t), \quad |\xi| = (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)^{1/2}$$

Одним из решений этого уравнения в S' является функция

$$E^*(\xi, t) = -\frac{\theta(t)}{|\xi|^2} \frac{\sin[\nu(\xi)\,t]}{\nu(\xi)}, \quad \nu(\xi) = \frac{N\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}{|\xi|}$$

где $\theta(t)$ — единичная функция Хевисайда.

В последней формуле отождествляются локально интегрируемые функции и порождаемые ими по обычному правилу обобщенные функции.

Обобщенную функцию

$$E(x, t) = F_\xi^{-1}[E^*]$$

будем называть фундаментальным решением оператора внутренних волн.

Чтобы найти $F_\xi^{-1}[E^*]$, поступим следующим образом. Введем семейство вспомогательных функций $E_\gamma^*(\xi, t)$, содержащих положительный параметр γ и обладающих тем свойством, что $E_\gamma^*(\xi, t) \to E^*(\xi, t)$ при $\gamma \to 0$ в S'. Найдем $F_\xi^{-1}[E_\gamma^*]$, а затем вычислим искомое преобразование $F_\xi^{-1}[E^*]$ с помощью предельного перехода, используя непрерывность преобразования Фурье в пространстве S'. Построенное фундаментальное решение оказывается регулярной обобщенной функцией.

2. Введение функций $E_\gamma^*(\xi, t)$. Введем семейство функций

(2.1) $$E_\gamma^*(\xi, t) = E^*(\xi, t)\exp(-\gamma|\xi|)$$

где γ — положительный параметр.

Можно доказать, что в S'

(2.2) $$\lim E_\gamma^*(\xi, t) = E^*(\xi, t), \quad \gamma \to +0$$

Для каждой основной функции $\varphi(\xi, t) \in S$ и любого положительного числа C имеем

(2.3) $$|(E^*, \varphi) - (E_\gamma^*, \varphi)| \leqslant I_1 + I_2$$

$$I_1 = \left| \int\limits_{|\xi| \leqslant C} |\xi|^{-2} d\xi \int\limits_0^\infty G(\xi, t, \gamma)\, dt \right|$$

$$I_2 = \left| \int\limits_{|\xi| > C} |\xi|^{-2} d\xi \int\limits_0^\infty G(\xi, t, \gamma)\, dt \right|$$

$$G(\xi, t, \gamma) = [1 - \exp(-\gamma|\xi|)] \frac{\sin \nu(\xi)\, t}{\nu(\xi)} \varphi(\xi, t)$$

Пусть ε — произвольное положительное число. Зафиксируем $\varphi(\xi, t)$. Так как $\varphi \in S$, то можно указать такое число $C > 0$, что

$$C^{-2} \int\limits_{R^4} |t\varphi(\xi, t)|\, d\xi\, dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда

$$I_2 \leqslant C^{-2} \int\limits_{|\xi| > C} d\xi \int\limits_0^\infty \left| \frac{\sin \nu(\xi)\, t}{\nu(\xi)\, t} \right| \cdot |t\varphi(\xi, t)|\, dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Выберем теперь $\gamma_0 > 0$ так, чтобы при $\gamma \in (0, \gamma_0)$ выполнялось неравенство

$$[1 - \exp(-\gamma C)] \int\limits_{R^4} |\xi|^{-2} |t\varphi(\xi, t)|\, d\xi\, dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда при $\gamma \in (0, \gamma_0)$

$$I_1 \leqslant [1 - \exp(-\gamma_0 C)] \int\limits_{|\xi| \leqslant C} |\xi|^{-2} d\xi \int\limits_0^\infty |t\varphi(\xi, t)|\, dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

и, следовательно, с учетом (2.3) получаем

$$|(E^*, \varphi) - (E_\gamma^*, \varphi)| < \varepsilon$$

3. Функции $E_\gamma(x, t)$ и их мажоранта. Найдем обратное преобразование Фурье

$$E_\gamma(x, t) = F_\xi^{-1}[E_\gamma^*]$$

В силу абсолютной интегрируемости $E_\gamma^*(\xi, t)$ имеем

$$E_\gamma = (2\pi)^{-3} \int\limits_{R^3} E^* \exp[-\gamma|\xi| - i(x, \xi)]\, d\xi,$$

$$(x, \xi) = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3$$

Подставив вместо функции E^* ее выражение (2.1), перейдя к сферическим координатам β, φ, θ и учтя периодичность подынтегральной функции по φ, получим

$$E_\gamma = -\frac{\theta(t)}{(2\pi)^3 N} \int\limits_0^\pi \sin(Nt\sin\theta)\, d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^\infty \exp(-\beta H_1)\, d\beta$$

$$H_1 = \gamma + i(r\sin\theta\sin\varphi + x_3\cos\theta), \quad r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$$

Выполнив интегрирование по β, найдем

$$E_\gamma(x, t) = -\frac{\theta(t)}{(2\pi)^3 N} \int\limits_0^{\pi/2} \sin(Nt\sin\theta)\, d\theta \int\limits_0^{2\pi} (H_1^{-1} + H_2^{-1})\, d\varphi \tag{3.1}$$

где функция $H_2(\varphi, \theta; r, x_3)$ отличается от H_1 лишь знаком перед $x_3\cos\theta$.

Предположив, что имеет место неравенство

$$r \neq 0 \tag{3.2}$$

преобразуем формулу (3.1) двумя способами.

Действуя первым способом, заменим интегрирование по φ интегрированием по окружности $|z| = 1$ на плоскости комплексного переменного z. Тогда

$$E_\gamma = \frac{\theta(t)\, i}{4\pi^3 N r} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin(Nt\sin\theta)}{\sin\theta}\, d\theta \int\limits_{|z|=1} (Z_0^{-1} + Z_1^{-1})\, dz$$

$$Z_j(z; \varkappa, \gamma') = z^2 + 2[\gamma' + i(-1)^j \varkappa] z - 1; \quad j = 0, 1$$

$$\gamma' = \frac{\gamma}{r\sin\theta}, \quad \varkappa = \frac{x_3}{r}\operatorname{ctg}\theta$$

Вычислив внутренний интеграл с помощью теории вычетов, получим

$$E_\gamma = -\frac{\theta(t)}{2\pi^2 Nr}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(Nt\sin\theta)}{\sin\theta}\left(\frac{1}{z_0-z_2}+\frac{1}{z_1-z_3}\right)d\theta \tag{3.3}$$

Здесь z_0, z_2 и z_1, z_3 — пары корней уравнений

$$Z_0(z, \varkappa, \gamma') = 0, \quad Z_1(z; \varkappa, \gamma') = 0$$

соответственно, причем $|z_0| < 1$ и $|z_1| < 1$.

Введем обозначения

$$A = 1 + \gamma'^2 - \varkappa^2, \; B = 2\varkappa\gamma'$$

Тогда для корней z_0 и z_1 находим выражения

$$z_j = -\gamma' - i(-1)^j\varkappa + (A^2+B^2)^{1/4}\exp\left\{\frac{i}{2}(-1)^j\times\right.$$
$$\left.\times\left[\operatorname{arctg}\frac{B}{A}+\frac{\pi}{2}(1-\operatorname{sgn}A)\right]\right\}$$

и аналогичные выражения с обратным знаком лишь перед членом с $(A^2 + B^2)^{1/4}$ находим для корней z_2 и z_3.

Подставив эти выражения для корней z_j в (3.3) и перейдя к интегрированию по $u = \sin\theta$, получим после простых преобразований

$$E_\gamma(x,t) = -\frac{\sqrt{2}\theta(t)}{4\pi^2 N|x|}\int_0^1 H(u)\sin Ntu\,\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \tag{3.4}$$

$$H(u) = P^{-1}(P+K)^{1/2}, \; K(u) = u^2 + (\gamma^2 - x_3^2)\,/\,|x|^2$$

$$P(u) = (K^2 + L^2)^{1/2}, \; L(u) = 2\gamma x_3 |x|^{-2}\sqrt{1-u^2}$$

Преобразуем теперь формулу (3.1) другим способом. Заменив переменную интегрирования φ переменной $\tau = \sin\varphi$, имеем

$$E_\gamma(x,t) = -\frac{i\theta(t)}{4\pi^3 Nr}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(Nt\sin\theta)}{\sin\theta}d\theta\times \tag{3.5}$$
$$\times\int_{-1}^{1}[(\tau-\varkappa+i\gamma')^{-1}+(\tau+\varkappa+i\gamma')^{-1}]\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}$$

Из этой формулы с учетом неравенства

$$|\tau \mp \varkappa + i\gamma'| \geqslant \gamma'$$

заключаем что

$$|E_\gamma(x, t)| \leqslant (8\pi N\gamma)^{-1}, \; r \neq 0, \; \gamma \neq 0$$

т. е. $E_\gamma(x, t)$ являются при условии (3.2) и $\gamma \neq 0$ ограниченными локально интегрируемыми функциями.

Преобразуем формулу (3.5). Выполнив в ней интегрирование по τ, например, с помощью теории вычетов, получим окончательно

$$E_\gamma(x,t) = \frac{\theta(t)}{4\pi^2 Nr}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(Nt\sin\theta)}{\sin\theta}\{[1-(\varkappa-i\gamma')^2]^{1/2}+ \tag{3.6}$$
$$+[1-(-\varkappa-i\gamma')^2]^{1/2}\}\,d\theta$$

Здесь ветвь корня $\sqrt{1-\omega^2}$ выбрана следующим образом: на плоскости ω проведен разрез между точками $\omega=-1$ и $\omega=1$ и считается, что

$$\sqrt{1-\omega^2}=\sqrt{2} \quad \text{при } \omega=i$$

Можно доказать, что функции $E_\gamma(x, t)$ имеют локально интегрируемую мажоранту.

Предположим сначала, что $\gamma \geqslant |x_3|$. Тогда, учитывая, что

$$|(a+ib)^{1/2}| \geqslant |a|^{1/2}$$

при вещественных a и b, имеем из (3.6)

$$|E_\gamma(x, t)| \leqslant \frac{t}{2\pi^2 r} \int_0^{\pi/2} |1-\varkappa^2+\gamma'^2|^{-1/2} d\theta =$$

$$=\frac{t}{2\pi^2} \int_0^{\pi/2} (|x|^2 \sin^2\theta+\gamma^2-x_3^2)^{-1/2} \sin\theta\, d\theta \leqslant \frac{t}{4\pi|x|}$$

Пусть теперь $\gamma<|x_3|$. Разобьем промежуток интегрирования по θ в формулах (3.5) и (3.6) на сумму трех промежутков $[l_j, l_{j+1}]$, где $j=0,1,2$; $l_0=0$, $l_3=\pi/2$, $l_1=\arcsin m_1$, $l_2=\arcsin m_2$

$m_1=\sqrt{x_3^2-\gamma^2}/|x|$, $m_2=|x_3|/|x|$ и соответственно интегралы представим как сумму трех интегралов J_1, J_2 и J_3. Оценим каждый из них.

При оценке интегралов J_1 и J_3 используем представление (3.6). Имеем

$$|J_1| \leqslant \frac{t}{2\pi^2} \int_0^{l_1} (x_3^2-\gamma^2-|x|^2\sin^2\theta)^{-1/2} \sin\theta\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{t}{2\pi^2|x|}(1-m_1^2)^{-1/2} \int_0^{m_1} \frac{u\, du}{\sqrt{m_1^2-u^2}}=\frac{t}{2\pi^2 r} m_1 \leqslant \frac{t}{2\pi^2 r}$$

$$|J_3| \leqslant \frac{t}{2\pi^2} \int_{l_2}^{\pi/2} |x_3^2-\gamma^2-|x|^2\sin^2\theta|^{-1/2} \sin\theta\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{t}{2\pi^2|x|} \int_{m_2}^{1} [(u^2-m_2)(1-u^2)]^{-1/2} u\, du=\frac{t}{4\pi|x|}$$

При оценке интеграла J_2 воспользуемся представлением (3.5); тогда

$$|J_2| \leqslant \frac{t}{4\pi^3 r} \int_{l_1}^{l_2} d\theta \int_{-1}^{1} \frac{2r\sin\theta}{\gamma} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=$$

$$=\frac{t}{2\pi^2\gamma}[(1-m_1^2)^{1/2}-(1-m_2^2)^{1/2}] \leqslant \frac{t}{2\pi^2|x|}$$

Из выведенных оценок получаем следующую мажорантную оценку для функций $E_\gamma(x, t)$:

$$|E_\gamma(x, t)| \leqslant Ct/r, \quad C=\text{const} \tag{3.7}$$

справедливую при всех $\gamma>0$ и всех x, удовлетворяющих условию (3.2).

4. Предельный переход в S' при $\gamma \to +0$. Докажем, что искомое фундаментальное решение оператора N, являющееся пределом функций

$E_\gamma(x, t)$ при $\gamma \to +0$ в пространстве S', может быть представлено формулой

$$(4.1)\qquad E(x,t) = -\frac{\theta(t)}{2\pi^2 N|x|}\int\limits_{|x_3|/|x|}^{1}[(u^2 - x_3^2/|x|^2)(1-u^2)]^{-1/2}\sin Ntu\,du$$

Для этого достаточно доказать, что последовательность функций $E_\gamma(x, t)$ сходится к функции $E(x, t)$ почти всюду при $\gamma \to +0$.

В самом деле, если указанная сходимость имеет место, то, учитывая наличие у функций $E_\gamma(x, t)$ локально интегрируемой мажоранты, можно при любой основной функции $\varphi(x, t) \in S$ применить теорему Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла, согласно которой

$$\lim_{\gamma\to+0}\int\limits_{R^4} E_\gamma(x,t)\,\varphi(x,t)\,dx\,dt = \int\limits_{R^4} E(x,t)\,\varphi(x,t)\,dx\,dt$$

Последнее равенство в силу локальной интегрируемости функций $E_\gamma(x, t)$ и $E(x, t)$ как раз и означает, что функция $E(x, t)$ является пределом функций $E_\gamma(x, t)$ при $\gamma \to +0$ в пространстве S'.

Итак, докажем сходимость почти всюду $E_\gamma(x, t)$ к $E(x, t)$. Будем считать x и t фиксированными, причем $rx_3 \neq 0$ и будем рассматривать лишь значения γ, меньшие $|x_3|/\sqrt{2}$.

Оценим $|E_\gamma(x, t) - E(x, t)|$. Воспользовавшись представлением (3.4), имеем

$$(4.2)\qquad |E_\gamma - E| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{4\pi^2 N|x|}\left\{\left|\int\limits_0^{m_2} H(u)\frac{\sin Ntu}{\sqrt{1-u^2}}\,du\right| + \right.$$
$$\left. + \left|\int\limits_{m_2}^{1}\left[H(u) - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{u^2 - x_3^2/|x|^2}}\right]\frac{\sin Ntu}{\sqrt{1-u^2}}\,du\right|\right\}$$

Интеграл по промежутку $[0, m_2]$ представим как сумму трех интегралов J_4, J_5 и J_6 по промежуткам $[0, m_1(1-\eta_1)]$, $[m_1(1-\eta_1), m_1]$ и $[m_1, m_2]$, где η_1 — выбираемое ниже положительное число, меньшее единицы, и оценим каждый из интегралов в отдельности.

При оценке интеграла J_4 учтем, что в промежутке интегрирования имеют место неравенства

$$|H| \leqslant |K|^{-1}\;(P - |K|)^{1/2} \leqslant 2^{-1/2}|L||K|^{-3/2} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{2}\,m_2|x|^{-1}m_1^{-3}(2\eta_1 - \eta_1^2)^{-3/2}\sqrt{1-u^2}\,\gamma \leqslant$$
$$\leqslant 4|x|(2\eta_1 - \eta_1^2)^{-3/2}|x_3|^{-2}\gamma\sqrt{1-u^2}$$

в силу которых

$$(4.3)\qquad |J_4| \leqslant \sqrt{2}\,\gamma(\pi|x_3|)^{-2}N^{-1}(2\eta_1 - \eta_1^2)^{-3/2}\int\limits_0^{m_2}|\sin Ntu|\,du \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{2}\,N^{-1}\pi^{-2}|x|^{-1}(2\eta_1 - \eta_1^2)^{-3/2}|x_3|^{-1}\gamma$$

Рассматривая интеграл J_5, заметим, что в данном случае

$$|H| \leqslant |L|^{-1}(P - |K|)^{1/2} \leqslant (2|K|)^{-1/2} = 2^{-1/2}(m_1^2 - u^2)^{-1/2}$$

откуда

$$(4.4)\qquad |J_5| \leqslant \frac{t}{4\pi^2 r}\int\limits_{m_1(1-\eta_1)}^{m_1} u(m_1^2 - u^2)^{-1/2}\,du \leqslant (2)^{-3/2}\pi^{-2}r^{-1}tm_2(\eta_1)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant (2)^{-3/2}t\pi^{-2}r^{-1}(\eta_1)^{1/2}$$

Для оценки интеграла J_6 воспользуемся выведенным выше первым из неравенств для J_2. Получим

$$|J_6| \leqslant \frac{t}{2\pi^2\gamma}\left[(1-m_1{}^2)^{1/2}-(1-m_2{}^2)^{1/2}\right] \leqslant \frac{t}{4\pi^2 r\,|x|}\,\gamma \tag{4.5}$$

Интеграл в (4.2) по промежутку $[m_2, 1]$ представим в виде суммы двух интегралов J_7 и J_8 по промежуткам $[m_2, m_2+\eta_2]$ и $[m_2+\eta_2, 1]$ соответственно, где η_2 — выбираемое ниже положительное число, меньшее единицы.

Интеграл J_7 оценим, учитывая неравенства

$$|H| \leqslant \sqrt{2}P^{-1/2} \leqslant \sqrt{2}\,|K|^{-1/2} \leqslant \sqrt{2}\,(u^2-m_2{}^2)^{-1/2}$$

Находим

$$|J_7| \leqslant \frac{t}{\pi^2 r}\int\limits_{m_2}^{m_2+\eta_2} u\,(u^2-m_2{}^2)^{-1/2}\,du \leqslant \frac{t}{\pi^2 r}\sqrt{2\eta_2 m_2+\eta_2{}^2} \leqslant \frac{t}{\pi^2 r}\sqrt{\eta_2} \tag{4.6}$$

При рассмотрении интеграла J_8 воспользуемся неравенствами

$$(u^2-m_2{}^2)^{1/2} \geqslant \eta_2,\quad |K| \geqslant \eta_2{}^2,\quad P \geqslant \eta_2{}^2,\quad |L| \leqslant \frac{2\gamma}{|x|},\quad |K| < 2$$

вследствие которых имеем последовательно

$$\begin{aligned}
&|H-\sqrt{2}\,(u^2-m_2{}^2)^{-1/2}| \leqslant \eta_2{}^{-3}\,|(P+K)^{1/2}(u^2-m_2{}^2)^{1/2}-\sqrt{2}P| \leqslant\\
&\leqslant 2^{-3/2}\eta_2{}^{-5}\,|(P+K)(K-\gamma^2|x|^{-2})-2P^2| =\\
&= 2^{-3/2}\eta_2{}^{-5}\,(3L_2{}^2+2\gamma^2|x|^{-2}P) \leqslant\\
&\leqslant 2^{-3/2}\eta_2{}^{-5}\,(12\gamma^2|x|^{-2}+2^{5/2}\gamma^2|x|^{-2}) \leqslant 7\eta_2{}^{-5}|x|^{-2}\gamma^2
\end{aligned}$$

Отсюда

$$|J_8| \leqslant 7\,(2)^{-3/2}\eta_2{}^{-5}|x|^{-3}\,t\gamma^2\pi^{-2}\int\limits_{m_2+\eta_2}^{1} u\,(1-u^2)^{-1/2}\,du \leqslant (2)^{3/2}\eta_2{}^{-5}|x|^{-3}t\gamma^2 \tag{4.7}$$

Допустим теперь, что (x, t) — фиксированная точка в евклидовом пространстве R^4, координаты которой удовлетворяют лишь условию $x_3 r \neq 0$, а в остальном произвольны; и пусть ε — произвольное положительное число. Тогда в силу оценок (4.4) и (4.6) можно найти такие числа η_1 и η_2, что при любом $\gamma \in [0, |x_3|/\sqrt{2}]$ будет иметь место неравенство

$$|J_5|+|J_7| < \varepsilon/2 \tag{4.8}$$

Для этих чисел η_1 и η_2 можно указать в силу оценок (4.3), (4.5) и (4.7) такое γ_0, что будет выполняться неравенство

$$|J_4|+|J_6|+|J_8| < \varepsilon/2,\quad \forall\gamma \in [0, \gamma_0] \tag{4.9}$$

Из (4.8), (4.9) и (4.2) следует, что

$$|E_\gamma(x, t)-E(x, t)| < \varepsilon,\quad \forall\gamma \in [0, \gamma_0]$$

А это и означает, что последовательность функций $E_\gamma(x, t)$ при $\gamma \to +0$ сходится к $E(x, t)$ почти всюду.

5. Гидродинамический смысл фундаментального решения. Из (4.1) следует, что построенное фундаментальное решение оператора внутренних волн обладает свойствами

$$E(x,t) = \frac{\partial E(x,t)}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t < 0$$

$$E(x,t) \to 0,\quad \frac{\partial E(x,t)}{\partial t} \to -\frac{1}{4\pi|x|} \quad \text{при } t \to +0 \text{ в } D'(R^3)$$

(D' — пространство обобщенных функций Соболева — Шварца, которые с учетом уравнения (1.2) позволяют установить ясный гидродинамический смысл функции $E\ (x,\ t)$).

Рассмотрим неограниченную во всех направлениях покоящуюся при $t < 0$ непрерывно стратифицированную жидкость, плотность $\rho_0\ (x_3)$ которой распределена по описанному в п. 1 закону. Допустим, что в момент времени $t = 0$ частицы этой жидкости приобретают скорости, описываемые вектором $\mathbf{V}\ (x,\ 0)$ со следующими компонентами по осям $x_1,\ x_2,\ x_3$:

$$v_1(x, 0) = \frac{x_1 x_3}{4\pi^2 r^2 |x|} - {}^1/_8 \operatorname{sgn} x_1 \cdot \delta(x_2) \cdot \operatorname{sgn} x_3$$

$$v_2(x, 0) = \frac{x_2 x_3}{4\pi r^2 |x|} - {}^1/_8 \delta(x_1) \cdot \operatorname{sgn} x_2 \cdot \operatorname{sgn} x_3, \quad v_2(x, 0) = -\frac{1}{4\pi |x|}$$

в результате чего при $t > 0$ в жидкости начнут распространяться внутренние волны. Они проявляются, в частности, в том, что поверхности равной плотности (изопикны) перестанут быть горизонтальными плоскостями.

Если ограничиться линейной теорией и приближением Буссинеска, то значения функции $E\ (x, t)$ будут давать величину вертикального смещения изопикн в точке x в момент времени t, а значения $\partial E\ (x,\ t)/\partial t$ — величину вертикальной компоненты $v_3\ (x,\ t)$ скорости жидкости.

С помощью формулы (4.1) можно проследить за характером внутренних волн при больших значениях безразмерного времени Nt. При $Nt \to \infty$ из (4.1) обычным способом выводится асимптотическая формула

$$E(x, t) = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2} Nr \sqrt{Nt}} \left[\frac{\sin(Nt\,|x_3|/|x| + {}^1/_4\pi)}{\sqrt{|x_3|/|x|}} + \right.$$
$$\left. + \sin(Nt - {}^1/_4\pi) + O\left(\frac{1}{(Nt)^{-1}}\right) \right] \tag{5.1}$$

Из (5.1) следует, что имеет место наложение двух типов волн.

Во-первых, имеются стоячие волны, описываемые вторым слагаемым в квадратной скобке. Эти волны аксиально-симметричны, длина их бесконечна, частота равна частоте Брента—Вяйсяля N, а амплитуда убывает с течением времени как $1/\sqrt{Nt}$.

Во-вторых, имеются прогрессивные волны, описываемые первым слагаемым в квадратной скобке формулы (5.1). Эти волны также аксиально-симметричны. Их поверхности равной фазы — конические поверхности $|\ x_3\ |\ /\ |\ x\ | = \text{const}$. Угловая скорость движения этих поверхностей равна $x_3/(rt)$; она убывает с течением времени, а в фиксированный момент времени ее абсолютная величина максимальна вблизи вертикальной оси x_3, причем знак угловой скорости совпадает со знаком x_3. С увеличением времени число таких конических волн увеличивается, а их угловая длина соответственно уменьшается.

Эти свойства волн согласуются с известным лабораторным экспериментом [7] по возбуждению внутренних волн в сосуде с линейно стратифицированной жидкостью путем сообщения начальных скоростей частицам жидкости быстрым перемещением в ней на короткое расстояние твердого тела малых по сравнению с размерами сосуда размеров.

Амплитуда прогрессивных волн уменьшается с течением времени, как $1/\sqrt{Nt}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1954, т. 18, № 1, с. 3.
2. *Вишик М. И.* Задача Коши для уравнений с операторными коэффициентами, смешанная краевая задача для систем дифференциальных уравнений и приближенный метод их решения.— Матем. сб., 1956, т. 39, № 1, с. 51.
3. *Гальперин С. А.* Задача Коши для уравнения С. Л. Соболева.— Сиб. матем. ж., 1963, т. 4, № 4, с. 758.
4. *Масленникова В. Н.* Оценка в L_p и асимптотика при $t \to \infty$ решения задачи Коши для системы С. Л. Соболева.— Тр. матем. ин-та АН СССР, 1968, т. 103, с. 117.
5. *Секерж-Зенькович С. Я.* Фундаментальное решение оператора внутренних волн.— Докл. АН СССР, 1979, т. 246, № 2, с. 286.
6. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 512 с.
7. *Stevenson T. N.* The phase configuration of internal waves around a body moving in a density stratified fluid.— J. Fluid Mech., 1973, v. 60, pt 4, p. 759.

Москва

Поступила в редакцию
20.V.1980