Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 2, 1981

УДК 533.6;519.3

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ ДЛЯ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА С СИЛЬНЫМИ РАЗРЫВАМИ, ЗАПИСЫВАЕМЫЕ В ЭЙЛЕРОВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Крайко А. Н.

Для двухпараметрического идеального газа в потенциальном силовом поле рассматриваются вариационные принципы, дающие уравнения течения и условия на сильных разрывах. Варьируемые функционалы записываются в эйлеровых переменных и не включают дополнительных дифференциальных связей. Ранее подобные принципы строились и применялись в основном для непрерывных течений (см., например, [1—12]). Попытки включения в них сильных разрывов не многочисленны как в газовой динамике [13, 14], так и в смежных разделах механики сплошной среды [15, 16]. В лагранжевых переменных обобщение принципа Гамильтона на нестационарные разрывные течения идеального газа дано Цемпленом [17, 18]. Для существенно более сложных сред аналогичные принципы сформулированы в рамках ньютоновской механики и теории относительности (специальной и общей) Л. И. Седовым и его учениками (см. [19, 20] и цитированные там работы).

Для стационарных течений отправной точкой исследования явилась работа [14], в основе которой лежит привлечение двумерной функции тока. Ее непрерывность на ударных волнах позволила получить соотношения на них как условия Вейерштрасса — Эрдмана. Векторный потенциал этим свойством не обладает. Поэтому его применение в [14] привело лишь к вариационному принципу для непрерывных изоэнергетических и изэнтропических пространственных потоков, для которых к тому же справедлива одна из более простых формулировок принципа Бейтмена. До появления работы [14] функции тока привлекались при формулировке вариационных принципов для непрерывных и разрывных течений соответственно в [3—5] и в [13]. Варьируемый функционал в форме, использованной в [14], введен еще в [3].

Ниже в отличие от [14] для произвольного стационарного пространственного потока, как и в [4], используются две функции тока. Их непрерывность на ударных волнах и приводит к требуемым условиям. На тангенциальных разрывах эти функции обычно рвутся, что, однако, не нарушает справедливости построенного принципа, если проварьированные и исходные разрывы образованы одними и теми же линиями тока. Заметим, что такими же свойствами обладают эйлеровы координаты и смещения частиц, используемые в [17—20] при формулировке вариационных принципов в лагранжевых переменных.

Наряду с принципом, справедливым для любых стационарных потоков, для кусочно-изэнтропических и кусочно-изоэнергетических течений с тангенциальными разрывами произвольной интенсивности предлагается модификация упомянутой выше формулировки принципа Бейтмена, делающая его справедливым и в этом случае. Аналогичная модификация распространена на пространственные нестационарные потоки с контактными разрывами. Кроме того, показано, что исходная формулировка принципа Бейтмена и ее модификации остаются справедливыми при наличии скачков, допускающих изэнтропическое рассмотрение. Отмечается, что принципы, предложенные в [3, 4] для непрерывных стационарных изоэнергетических течений без внешних сил, на самом деле справедливы и при наличии разрывов. Указанные принципы также опираются на привлечение одной [3] или двух [4] функций тока, что и позволяет провести обобщение на разрывные решения. Предположение об изоэнергетичности, использованное в [4], сужая область применимости этих принципов, лишь усложняет анализ.

1. Напомним свойства двух функций тока ψ_1 и ψ_2, вводимых далее для анализа стационарных пространственных течений. Пусть ρ — плотность а $\mathbf{q}$ — вектор скорости. Тогда, как известно [4], вектор плотности тока $\rho\mathbf{q}$ можно представить в форме

$$\rho\mathbf{q} = \nabla\psi_1 \times \nabla\psi_2 \tag{1.1}$$

удовлетворяющей уравнению неразрывности $\nabla(\rho\mathbf{q}) = 0$. Функции тока ψ_i в (1.1) — скалярные функции координат. В силу равенств

$$\mathbf{q}\nabla\psi_i \equiv (\nabla\psi_1 \times \nabla\psi_2)\nabla\psi_i = 0, \quad i = 1, 2 \tag{1.2}$$

они постоянны на каждой линии тока, которые, следовательно, можно рассматривать как линии пересечения поверхностей $\psi_1 = \text{const}$ и $\psi_2 = \text{const}$. Построение последних проводится при помощи (1.2) после задания согласующейся с (1.1) сетки линий $\psi_i = \text{const}$ на некоторой поверхности, пересекаемой линиями тока. Указанную поверхность можно взять, например, в невозмущенном набегающем потоке, где по крайней мере одно из семейств линий (допустим, $\psi_1 = \text{const}$) строится весьма произвольно. Требование непрерывности ψ_i на ударных волнах обеспечивает, в частности, сохранение потока массы через такие разрывы, поскольку

$$\begin{aligned}\rho q_n \equiv \rho\mathbf{q}\mathbf{n} = \rho\mathbf{q}(\boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\tau}_2) = (\nabla\psi_1 \times \nabla\psi_2)(\boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\tau}_2) = \\ = \psi_{11}\psi_{22} - \psi_{12}\psi_{21} \equiv D(\psi_{ij}) \quad (\psi_{ij} = \partial\psi_i/\partial\tau_j)\end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь $\boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\tau}_2$, $\mathbf{n}$ — правая тройка взаимно ортогональных единичных векторов с вектором нормали $\mathbf{n}$ к поверхности разрыва, q_n — проекция $\mathbf{q}$ на $\mathbf{n}$. Так как производные ψ_{ij} вычисляются в направлениях, касательных к скачку, то непрерывность ψ_i обеспечивает непрерывность ρq_n. На поверхностях тангенциальных разрывов и на непроницаемых стенках $D \sim q_n = 0$, что, в частности, автоматически выполняется, если на подобной поверхности (точнее, на некоторой ее «начальной» линии, пересекаемой линиями тока) задать постоянной одну из функций тока.

В стационарном потоке идеального газа с удельной энтальпией i при отсутствии внешних сил полная энтальпия $I = i + q^2 / 2$ сохраняется вдоль каждой линии тока вне зависимости от наличия скачков. Поэтому $I = I(\psi_1, \psi_2)$, где непрерывная или разрывная функция $I(\psi_1, \psi_2)$ определяется условиями в набегающем потоке. При наличии внешней массовой силы $\mathbf{F} = -\nabla U$, где U — потенциальная энергия — известная функция координат, роль I играет $J(\psi_1, \psi_2) = I + U$. В отличие от I и J удельная энтропия s возрастает при переходе через скачки уплотнения. Поэтому $s = S^k(\psi_1, \psi_2)$ с функциями $S^k(\psi_1, \psi_2)$, своими для каждой подобласти V^k, на которые ударные волны делят все пространство V, занятое потоком.

2. Введем функционал

$$L = \iiint\limits_V \rho\left(\frac{q^2}{2} - e - U + J\right)dV \tag{2.1}$$

в котором $e = i - p / \rho = e(\rho, s)$ — удельная внутренняя энергия — известная функция ρ и s. Так как $Tds = de + pd(1/\rho)$, где T — абсолютная температура, а p — давление, то

$$e_\rho \equiv (\partial e / \partial \rho)_s = p / \rho^2, \quad e_s \equiv (\partial e / \partial s)_\rho = T \tag{2.2}$$

Переписав в силу (1.1) и свойств J и s (2.1) в виде

$$L = \iiint\limits_V \left\{ \frac{|\nabla\psi_1 \times \nabla\psi_2|^2}{2\rho} - \rho e(\rho, S^k(\psi_1, \psi_2)) - \rho U + \rho J(\psi_1, \psi_2) \right\} dV \tag{2.3}$$

покажем, что условия стационарности по отношению к вариациям ρ, ψ_i и смещениям Δn поверхностей сильных разрывов $\partial V_d = \partial V_s \bigcup \partial V_c$, где $\partial V_s(\partial V_c)$ — поверхности скачков уплотнения (тангенциальных разрывов), дают уравнение течения и условия сохранения на разрывах, если S^k в каждой подобласти V^k считать фиксированной функцией своих аргументов (см. конец статьи).

Далее для произвольной функции φ под вариацией $\delta\varphi$ принимается разность проварьированного и непроварьированного значений при фиксированных независимых переменных. Смещение Δn отсчитывается в направлении нормали $\mathbf{n}$ к ∂V_d. Параметрам с разных сторон от ∂V_d припишем индексы плюс и минус и обозначим через $[\varphi]$ разность $\varphi_+ - \varphi_-$. Наряду с $\delta\varphi$ с каждой стороны от ∂V_d введем приращение $\Delta\varphi$, которое определим как разность φ в точках проварьированного и непроварьированного разрыва, лежащих на одной нормали. Можно показать (см., например, [21]), что с каждой стороны от ∂V_d

$$(\Delta\varphi)_\pm = \{\delta\varphi + (\partial\varphi / \partial n)_{\tau_1, \tau_2} \Delta n\}_\pm = \delta\varphi_\pm + (\mathbf{n}\nabla\varphi_\pm)\Delta n \tag{2.4}$$

Здесь $\mathbf{n}$ — либо единичный вектор своей («внешней» к рассматриваемой стороне ∂V_d) нормали, т. е. $\mathbf{n}_+$ или $\mathbf{n}_- = -\mathbf{n}_+$, либо — любой из векторов $\mathbf{n}_+$ и $\mathbf{n}_-$. В любом случае справедливость (2.4) обеспечивается одновременным изменением знаков $\mathbf{n}$ и Δn.

Варьируя (2.3), наряду с (2.2) и (2.4) учтем следующее. Справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned}(2\rho)^{-1}\delta\,|\nabla\psi_1 \times \nabla\psi_2|^2 &= (2\rho)^{-1}\delta\,\{(\nabla\psi_1 \times \nabla\psi_2)(\nabla\psi_1 \times \nabla\psi_2)\} = \\ &= -\mathbf{q}\{\nabla\psi_2 \times \nabla(\delta\psi_1)\} + \mathbf{q}\{\nabla\psi_1 \times \nabla(\delta\psi_2)\} = (\nabla\psi_2 \times \\ &\times \mathbf{q})\nabla(\delta\psi_1) - (\nabla\psi_1 \times \mathbf{q})\nabla(\delta\psi_2) = \{\nabla(\mathbf{q} \times \nabla\psi_2)\}\delta\psi_1 - \\ &- \{\nabla(\mathbf{q} \times \nabla\psi_1)\}\delta\psi_2 - \nabla\{(\mathbf{q} \times \nabla\psi_2)\delta\psi_1 - (\mathbf{q} \times \nabla\psi_1)\delta\psi_2\} = \\ &= (\boldsymbol{\omega}\nabla\psi_2)\delta\psi_1 - (\boldsymbol{\omega}\nabla\psi_1)\delta\psi_2 + \nabla\{(\mathbf{q} \times \nabla\psi_1)\delta\psi_2 - (\mathbf{q} \times \\ &\times \nabla\psi_2)\delta\psi_1\} \quad (\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{q})\end{aligned} \tag{2.5}$$

Интеграл по объему в δL от последнего слагаемого (2.5) преобразуется обычным образом к интегралам по обеим сторонам ∂V_d, поверхностям тел ∂V_b и прочим участкам границы ∂V_e рассматриваемой области течения. После этого подынтегральные выражения поверхностных интегралов будут содержать $(\mathbf{q} \times \nabla\psi_i)_n = (\mathbf{q} \times \nabla\psi_i)\mathbf{n}$. Поскольку $\mathbf{n} = \boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\tau}_2$, то

$$(\mathbf{q} \times \nabla\psi_i)_n = q_{\tau 1}\psi_{i2} - q_{\tau 2}\psi_{i1} \tag{2.6}$$

где $q_{\tau i}$ — проекция $\mathbf{q}$ на $\boldsymbol{\tau}_i$. Так как в свою очередь $\boldsymbol{\tau}_1 = -\mathbf{n} \times \boldsymbol{\tau}_2$, а $\boldsymbol{\tau}_2 =$

$= \mathbf{n} \times \boldsymbol{\tau}_1$, то из (1.1) найдем, что

$$\rho q_{\tau 1} = \psi_{12} (\nabla \psi_2)_n - \psi_{22} (\nabla \psi_1)_n, \quad \rho q_{\tau 2} = \psi_{21} (\nabla \psi_1)_n - \psi_{11} (\nabla \psi_2)_n \tag{2.7}$$

Опираясь на (2.4), (2.6) и (2.7), получим, что в поверхностных интегралах по $\partial V = \partial V_d \bigcup \partial V_b \bigcup \partial V_e$ в δL

$$\begin{gathered}(\mathbf{q} \times \nabla \psi_1)_n \delta \psi_2 - (\mathbf{q} \times \nabla \psi_2)_n \delta \psi_1 = (q_{\tau 1} \psi_{12} - q_{\tau 2} \psi_{11}) \Delta \psi_2 - \\ - (q_{\tau 1} \psi_{12} - q_{\tau 2} \psi_{22}) \Delta \psi_1 - p q_\tau^2 \Delta n \quad (q_\tau^2 = q_{\tau 1}^2 + q_{\tau 2}^2)\end{gathered} \tag{2.8}$$

причем $\Delta n = 0$ и $\Delta \psi_i = \delta \psi_i$ на $\partial V_b \bigcup \partial V_e$.

Воспользовавшись (2.2), (2.5) и (2.8), учтя полный вклад в δL смещения разрывов на Δn и объединив интегралы по разным их сторонам, окончательно получим

$$\begin{aligned}\delta L = & \iiint\limits_V \Big\{\Big(J(\psi_1, \psi_2) - \frac{q^2}{2} - i - U\Big) \delta \rho + \\ & + (\omega \nabla \psi_2 - \rho T S_{\psi 1} + \rho J_{\psi 1}) \delta \psi_1 - \\ & - (\omega \nabla \psi_1 + \rho T S_{\psi 2} - \rho J_{\psi 2}) \delta \psi_2 \Big\} dV + \iint\limits_{\partial V_d} \Big\{\Big[\rho \Big(\frac{q_n^2 - q_\tau^2}{2} - e - \\ & - U + J\Big)\Big] \Delta n - [(q_{\tau 1} \psi_{22} - q_{\tau 2} \psi_{21}) \Delta \psi_1] + \\ & + [(q_{\tau 1} \psi_{12} - q_{\tau 2} \psi_{11}) \Delta \psi_2]\Big\} d\Sigma - \iint\limits_{\partial V_b \bigcup \partial V_e} \{(q_{\tau 1} \psi_{22} - q_{\tau 2} \psi_{21}) \delta \psi_1 - \\ & - (q_{\tau 1} \psi_{12} - q_{\tau 2} \psi_{11}) \delta \psi_2\} d\Sigma\end{aligned} \tag{2.9}$$

Здесь $S_{\psi i}$ и $J_{\psi i}$ — частные производные по ψ_i, индекс k у S опущен, а $d\Sigma$ — элемент соответствующей поверхности.

Условие стационарности L по ρ дает интеграл энергии

$$q^2 / 2 + i + U = J(\psi_1, \psi_2) \tag{2.10}$$

в то время как условия стационарности по ψ_i приводят к двум скалярным уравнениям, которые эквивалентны одному векторному

$$\mathbf{q} \times \boldsymbol{\omega} = \nabla J - T \nabla S \tag{2.11}$$

Подчеркнем, что (2.11) дает именно два, а не три скалярных уравнения, поскольку проекции левой и правой частей этого векторного уравнения на направление линии тока — тождественные нули.

Соотношения на ударных волнах получаются как условия стационарности (2.9) по отношению к Δn и $\Delta \psi_i$ на ∂V_s. Вспомнив, что здесь ψ_i, а следовательно, и $\Delta \psi_i$ непрерывны, и приравняв нулю коэффициенты при $\Delta \psi_i = \Delta \psi_{i-} = \Delta \psi_{i+}$, найдем, что

$$[q_{\tau 1}] \psi_{22} - [q_{\tau 2}] \psi_{21} = 0, \quad [q_{\tau 1}] \psi_{12} - [q_{\tau 2}] \psi_{11} = 0$$

Определитель коэффициентов при $[q_{\tau i}]$, равный в силу (1.3) ρq_n, отличен от нуля. Поэтому из выписанных равенств следует непрерывность касательных к скачку компонент $\mathbf{q}$

$$[q_{\tau 1}] = 0, \quad [q_{\tau 2}] = 0 \tag{2.12}$$

Приравняв затем на ∂V_s нулю коэффициент при Δn и исключив из получившегося соотношения J с помощью (2.10), придем к условию сохранения нормальной к скачку компоненты импульса

$$[\rho q_n^2 + p] = 0 \tag{2.13}$$

Условие сохранения на скачке полной энтальпии вытекает непосредственно из уравнения (2.10), если последнее записать дважды (до и после скачка) и учесть непрерывность на скачке U и J. Разрыв U возможен лишь при наличии внешних поверхностных сил (в этой ситуации на ∂V_s сохраняется не I, а J). Непрерывность J на ∂V_s принималась с самого начала.

Условие стационарности L на ∂V_c по отношению к Δn после исключения J при помощи (2.10) также ведет к (2.13). Однако на тангенциальном разрыве $q_n = 0$, и потому здесь

$$[p] = 0 \tag{2.14}$$

Согласно (1.3) равенство нулю q_n ведет к обращению в нуль определителя D (ψ_{ij}) коэффициентов при $q_{\tau i}$ в множителях перед $\Delta\psi_i$ или $\delta\psi_i$ в интегралах по ∂V_c и ∂V_b из (2.9). Это позволяет переписать (2.9) в форме

$$\begin{aligned}\delta L = \iint\limits_{\partial V_c} \left[(q_{\tau 1}\psi_{22} - q_{\tau 2}\psi_{21}) \left(\frac{\psi_{12}}{\psi_{22}} \Delta\psi_2 - \Delta\psi_1 \right) \right] d\Sigma + \\ + \iint\limits_{\partial V_b} (q_{\tau 1}\psi_{22} - q_{\tau 2}\psi_{21}) \left(\frac{\psi_{12}}{\psi_{22}} \delta\psi_2 - \delta\psi_1 \right) d\Sigma - \iint\limits_{\partial V_e} \{(q_{\tau 1}\psi_{22} - \\ - q_{\tau 2}\psi_{21})\, \delta\psi_1 - (q_{\tau 1}\psi_{12} - q_{\tau 2}\psi_{11})\, \delta\psi_2\}\, d\Sigma\end{aligned}$$

В каждой точке ∂V_b и обеих сторон ∂V_c, которые являются поверхностями тока, вектор $\boldsymbol{\tau}_1$ удобно направить по вектору скорости. В таком случае $q_{\tau 1} = q$, $q_{\tau 2} = 0$, а выражение для δL станет

$$\begin{aligned}\delta L = \iint\limits_{\partial V_c} [q\, (\psi_{12}\Delta\psi_2 - \psi_{22}\Delta\psi_1)]\, d\Sigma + \iint\limits_{\partial V_b} q\, (\psi_{12}\Delta\psi_2 - \psi_{22}\Delta\psi_1)\, d\Sigma - \\ - \iint\limits_{\partial V_e} \{(q_{\tau 1}\psi_{22} - q_{\tau 2}\psi_{21})\, \delta\psi_1 - (q_{\tau 1}\psi_{12} - q_{\tau 2}\psi_{11})\, \delta\psi_2\}\, d\Sigma\end{aligned} \tag{2.15}$$

Пусть далее проварьированные и исходные поверхности ∂V_c и ∂V_b образованы линиями тока, которые отвечают одним и тем же ψ_1 и ψ_2. Не останавливаясь на детальном обсуждении данной ситуации, отметим, что нередко она реализуется автоматически. Например, это так на тангенциальных разрывах, начинающихся в набегающем потоке, на телах, обтекаемых невозмущенным потоком с присоединенными головными скачками, и на тангенциальных разрывах, которые образуются за ними, на «внешних» непроницаемых поверхностях в задачах о течениях в каналах и т. д. При выполнении принятого условия $\Delta\psi_i$ на ∂V_c и $\delta\psi_i$ на ∂V_b отличны от нуля лишь из-за сдвига линий тока на рассматриваемых поверхностях. Если указанный сдвиг характеризовать величиной $\Delta\tau_2$ — смещением линии тока в направлении вектора $\boldsymbol{\tau}_2$, перпендикулярного ей в силу выбора $\boldsymbol{\tau}_1$, то можно показать, что $\Delta\psi_i = -\psi_{i2}\Delta\tau_2$ на ∂V_c и $\delta\psi_i = -\psi_{i2}\Delta\tau_2$ на

∂V_b. Использование этих равенств обращает в нули два первых интеграла правой части (2.15).

Не рассматривая подробно последний интеграл в δL, заметим лишь следующее. В любой конкретной задаче ∂V_e либо отсутствует, либо распадается на поверхности, ограничивающие исследуемое течение с разных сторон. Так, вместо рассмотрения обтекания тел безграничным потоком подчас оправдано введение конечной области, на границах которой ставятся соответствующие граничные условия. При этом, как правило, в набегающем потоке (на ∂V_e^-) и достаточно далеко за телом (на ∂V_e^+) известна ориентация вектора $\mathbf{q}$. Последнее позволяет обратить в нули слагаемые с $\delta\psi_i$ за счет выбора $\partial V_e^\pm$ нормальными к $\mathbf{q}$. Тогда здесь $q_{\tau i} = 0$ и последний интеграл правой части (2.15) исчезает при произвольных $\delta\psi_i$. На участках ∂V_e, совпадающих с фиксированными поверхностями тока, такие же интегралы исчезают из-за того, что здесь $\delta\psi_i = 0$.

В [4] для пространственного случая формулировка вариационного принципа опирается на рассмотрение функционала

$$L = \iint\limits_V (\rho q^2 + p)\, dV \tag{2.16}$$

в котором подынтегральное выражение в силу предположения об изоэнергетичности есть функция ψ_i и $\nabla\psi_i$. Хотя в [4] исследовались только непрерывные течения, анализ, аналогичный выполненному выше, показывает, что для (2.16) условия Вейерштрасса — Эрдмана дают те же условия на сильных разрывах, что и (2.1). Заметим, кстати, что при $U = 0$ на решениях, отвечающих действительному течению, т. е. удовлетворяющих интегралу энергии (2.10), (2.1) сводится к (2.16). В то же время использование вариационного принципа в форме (2.1) представляется предпочтительным не только из-за его большей общности, но и потому, что анализ, предполагающий независимость ρ, оказывается более простым.

3. Ограничимся теперь более узким классом кусочно-изоэнергетического и кусочно-изэнтропического стационарных потоков с тангенциальными разрывами любой интенсивности и слабыми в смысле приращений энтропии ударными волнами, которые, как известно, с высокой степенью точности ($[s] \sim [p]^3$) можно рассматривать в изэнтропическом приближении. При этом в каждой подобласти V^k, на которые теперь в отличие от предыдущего поток разбивают только тангенциальные разрывы, в том числе возникающие при обтекании тел, но не ударные волны, можно ввести непрерывный потенциал φ^k, такой, что $\mathbf{q} = \nabla\varphi^k$. Введение непрерывного в V^k потенциала в отличие от функций тока ψ_i автоматически обеспечивает непрерывность касательных к скачкам компонент $q_{\tau i} \doteq \partial\varphi^k / \partial\tau_i$ вектора скорости. Интеграл энергии с использованием φ^k записываем в форме

$$(\nabla\varphi^k)^2 / 2 + i\,(p, S^k) + U = J^k \tag{3.1}$$

причем здесь в отличие от п. 2 S^k и J^k постоянны в V^k. Помимо прочего (3.1) обеспечивает непрерывность полной энтальпии на скачках уплотнения. Кроме того, отсюда же следует, что p — известная функция $\nabla\varphi^k$, U, S^k и J^k. Так как, однако, U — фиксированная функция координат, а S^k и J^k — фиксированные константы, то будем писать $p = p^k(\nabla\varphi^k)$. Согласно равенству $Tds = di - (1/\rho)\,dp$ и (3.1) имеем

$$\delta p = -(\rho\nabla\varphi^k)\,\delta\,(\nabla\varphi^k) \tag{3.2}$$

Введем функционал

$$L = \iint\limits_V p^k\,(\nabla\varphi^k)\,dV \tag{3.3}$$

который отличается от функционала одной из известных формулировок принципа Бейтмена только наличием индексов. Если (3.3) реализует вариационный принцип, то в силу сказанного выше условия стационарности L по отношению к вариациям φ^k и к смещениям поверхностей разрыва должны давать наряду с уравнением неразрывности непрерывность потока массы и нормальной компоненты импульса на слабых скачках (непрерывность I на них есть следствие (3.1)), условие непротекания — на тангенциальных разрывах и на поверхностях тел и условие (2.14) — на тангенциальных разрывах. Покажем, что это действительно так и, следовательно, (3.3) ведет к требуемому принципу. Очевидно, что при этом одновременно будет доказана справедливость используемой формулировки принципа Бейтмена для изоэнергетических и изэнтропических течений с тангенциальными разрывами и со слабыми скачками.

Вычисление δL проводится аналогично п. 2. Учтя некоторые отличия, связанные, в частности, с использованием (3.2), окончательно получим (далее индекс k опускается)

$$\delta L = \iiint\limits_V \{\nabla(\rho\nabla\varphi)\}\,\delta\varphi\,dV + \iint\limits_{\partial V_d} \{[\rho\,(\nabla\varphi)_n^2 + p]\,\Delta n - \tag{3.4}$$

$$- [\rho\,(\nabla\varphi)_n\,\Delta\varphi]\}\,d\Sigma - \iint\limits_{\partial V_b \cup \partial V_e} \rho\,(\nabla\varphi)_n\,\delta\varphi\,d\Sigma$$

Отсюда, приравняв нулю коэффициент при $\delta\varphi$ в объемном интеграле, придем к уравнению неразрывности

$$\nabla\,(\rho\nabla\varphi) = 0 \tag{3.5}$$

причем для каждой подобласти V^k плотность в (3.5) — известная функция $\nabla\varphi$. Вид последней определяется интегралом (3.1) и уравнением состояния, записанным в форме $\rho = \rho\,(i, s)$.

Для поверхностей тел, приравняв нулю коэффициент при $\delta\varphi$, получим условие непротекания $(\nabla\varphi)_n = 0$. Это же условие получается и для обеих сторон каждого тангенциального разрыва как результат приравнивания нулю на ∂V_c коэффициентов при $\Delta\varphi_+$ и $\Delta\varphi_- \neq \Delta\varphi_+$. После этого условие непрерывности p на ∂V_c получается из рассмотрения коэффициента при Δn.

Аналогичным образом для ударных волн, где потенциал φ непрерывен и потому $\Delta\varphi_+ = \Delta\varphi_-$, из (3.4) найдем

$$[\rho\,(\nabla\varphi)_n] = 0, \quad [\rho\,(\nabla\varphi)_n^2 + p] = 0$$

т. е. условия, необходимые для завершения доказательства сделанного выше утверждения. Оставшийся в (3.4) интеграл по ∂V_e показывает, что при наличии таких границ в рассматриваемом приближении удобно либо ставить на них условие постоянства φ, либо, как и в п. 2, в качестве ∂V_e брать поверхности тока.

4. Рассмотрим нестационарные течения с контактными разрывами любой интенсивности и слабыми ударными волнами, являющиеся аналогом стационарных течений п. 3. Для них в каждой подобласти V^k роль (3.1) играет интеграл

$$\varphi_t^k + (\nabla\varphi^k)^2 / 2 + i\,(p, S^k) + U = J^k\,(t) \quad (\varphi_t = \partial\varphi / \partial t) \tag{4.1}$$

в силу которого $p = p^k\,(\varphi_t^k, \nabla\varphi^k)$ в том же смысле, что и в п. 3, а (3.2) заменяется на

$$\delta p = -\rho\delta\varphi_t^k - (\rho\nabla\varphi^k)\,\delta\,(\nabla\varphi^k) = \{\rho_t + \nabla\,(\rho\nabla\varphi^k)\}\,\delta\varphi^k - (\rho\delta\varphi^k)_t - \nabla\,\{(\rho\nabla\varphi^k)\,\delta\varphi^k\} \tag{4.2}$$

Имея в виду обобщение принципа Бейтмена на рассматриваемый случай, введем функционал

$$L = \iiiint\limits_{\Omega = V\times\tau} p^k\,(\varphi_t^k, \nabla\varphi^k)\,d\Omega \tag{4.3}$$

в котором τ — временной интервал. Покажем, что условия стационарности L по отношению к варьированию φ и смещениям разрывов дают все необходимые уравнения и условия. С этой целью, воспользовавшись (4.2) и действуя аналогично пп. 2 и 3 (разумеется, с учетом особенностей пространства четырех переменных), проварьируем (4.3). Получим (далее индекс k опускается)

$$\delta L = \iiiint\limits_{\Omega} \{\rho_t + \nabla\,(\rho\nabla\varphi)\}\,\delta\varphi\,d\Omega + \iiint\limits_{\partial\Omega_d} \{[\rho\delta\varphi]\,D - [\rho\,(\nabla\varphi)_n\,\delta\varphi] + [p]\,\Delta n\}\,d\Sigma\,dt + \iiint\limits_{\partial\Omega_b\cup\partial\Omega_e} \rho\,\{D - (\nabla\varphi)_n\}\,\delta\varphi\,d\Sigma\,dt$$

Здесь $\partial\Omega_d = \partial V_d \times \tau$, D — скорость соответствующей поверхности по нормали к себе, первое слагаемое в интеграле по $\partial\Omega_d$ — результат интегрирования по t, а второе — результат перехода от интеграла по V к интегралу по ∂V. При получении δL вариации $\delta\varphi$ на концах временного интервала не учитывались. С учетом (2.4) полученное выражение для δL запишем в виде (интеграл по $\partial\Omega_e$ далее не выписывается)

$$\delta L = \iiiint\limits_{\Omega} \{\rho_t + \nabla\,(\rho\nabla\varphi)\}\,\delta\varphi\,d\Omega + \iiint\limits_{\partial\Omega_d} \{[\rho\,(\nabla\varphi)_n\,((\nabla\varphi)_n - D) + p]\,\Delta n + [\rho\,(D - (\nabla\varphi)_n)\,\Delta\varphi]\}\,d\Sigma\,dt + \iiint\limits_{\partial\Omega_b} \rho\,(D - (\nabla\varphi)_n)\delta\varphi\,d\Sigma\,dt$$

Отсюда так же, как и в п. 3, получаются уравнения неразрывности, условие непротекания $D - (\nabla\varphi)_n = 0$ на поверхностях тел и на контактных разрывах, требование непрерывности давления на последних и равенства

$$[\rho\,(D - (\nabla\varphi)_n)] = 0,\ \ [\rho\,(\nabla\varphi)_n\,((\nabla\varphi)_n - D) + p] = 0$$

на ударных волнах. Сохранение касательных к скачкам компонент $\mathbf{q} = \nabla\varphi$ следует, как и в п. 3, из непрерывности на них потенциала, а условие сохранения полной энтальпии (в системе скачка)

$$[(D - (\nabla\varphi)_n)^2 + 2i] = 0$$

получается как следствие (4.1), непрерывности φ, J, U и того, что на скачке

$$[\varphi_t] + D\,[(\nabla\varphi)_n] = 0$$

Отметим, что, как видно из предыдущего, при рассмотрении течений с сильными разрывами успех связан с выбором функций, сохраняющих непрерывность на ударных волнах. Кроме того, при наличии областей непрерывного изменения энтропии эти функции должны сохраняться в частице и обеспечивать выполнение уравнения неразрывности. На тангенциальных разрывах непрерывность указанных функций не требуется. По-видимому, и в общем пространственном нестационарном случае при формулировке вариационных принципов целесообразно использовать три «функции тока» (переменных Лагранжа). При этом, если в четырехмерном пространстве $(t, \mathbf{x})$ ввести «вектор скорости» $\mathbf{q}^\circ$ с компонентами $1, q_1, q_2, q_3$, где q_i — проекции $\mathbf{q}$ на оси x_i, и оператор ∇° с компонентами $\partial / \partial t$ и $\partial / \partial x_i$, то «функции тока» ψ_i, обеспечивающие удовлетворение уравнения неразрывности и сохраняющиеся в частице, можно ввести равенством $\rho\mathbf{q}^\circ = \nabla^\circ\psi_1 \times \nabla^\circ\psi_2 \times \nabla^\circ\psi_3$.

Укажем, наконец, на одну особенность вариационных принципов из [3, 4, 14] и п. 2, которую следует иметь в виду при их применении к течениям с ударными волнами. В действительном течении смещение поверхностей скачков и возмущение потока перед ними изменяет функции $S^k(\psi_1, \psi_2)$, хотя при выводе условий стационарности они полагаются фиксированными функциями ψ_1 и ψ_2, как это и делалось выше. Данное обстоятельство, замеченное и в [14], снижает ценность этих принципов и должно обязательно учитываться при их применении (например, для построения прямых методов решения задач обтекания). В случае слабых скачков, для которых справедливо изэнтропическое приближение, подобной проблемы не возникает ни для одного из обсуждавшихся выше вариационных принципов. В той же связи заметим, что вариационные принципы, условия стационарности которых дают в числе прочих соотношения на ударных волнах, не различают скачки уплотнения и разрежения. Это делает необходимым совершенствование соответствующих принципов в направлении включения запрета на уменьшение энтропии. Сказанное относится и к принципам, которые формулируются в лагранжевых переменных.

Автор благодарит Шмыглевского Ю. Д. за стимулирующие обсуждения, а Комаровского Л. В. и Бердичевского В. Л. — за ценные библиографические ссылки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bateman H.* Notes on a differential equation wich occurs in the two-dimensional motion of a compressible fluid and the associated variational problems.— Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1929, v. 125, No. 799, p. 598.
2. *Bateman H.* Partial differential equations of mathematical physics. New York: Dover, 1944. 522 p.
3. *Lin C. C., Rubinov S. I.* On the flow behind curved shocks.— J. Math. Phys., 1948, v. 27, No. 2, p. 105.
4. *Giese J. H.* Stream functions for three-dimensional flows.— J. Math. Phys., 1951, v. 30, No. 1, p. 31. (Рус. перев.: Механика, 1953, № 1 (17), с. 86.)

5. *Lin C. C.* A new variational principle for isoenergetic flows.— Quart. J. Appl. Math., 1952, v. 9, No. 4, p. 421.
6. *Shiffman M.* On the existence of subsonic flows of a compressible fluid.— J. Rat. Mech. Anal., 1952, v. 1, No. 4, p. 605.
7. *Ito H.* Variational principle in hydrodynamics.— Progr. Theoret. Phys., 1953, v. 9, No. 2, p. 117.
8. *Lush P. E., Cherry T. M.* The variational method in hydrodynamics.— Quart. Mech. Appl. Math., 1956, v. 9, pt 1, p. 6.
9. *Серрин Дж.* Математические основы классической механики жидкости. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 256 с.
10. *Sewell M. J.* On reciprocal variational principles for perfect fluids.— J. Math. Mech., 1963, v. 12, No. 4, p. 495.
11. *Seliger R. L., Whitham G. B.* Variational principles in continuum mechanics.— Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1968, v. 305, No. 1480, p. 1.
12. *Sewell M. J.* On dual approximation principles and optimization in continuum mechanics.— Philos. Trans. Roy. Soc. Ser. A, 1969, v. 265, No. 1162, p. 319.
13. *Кузнецов Б. Г.* К вопросу о втором вариационном принципе Бейтмена.— Тр. Томск. ун-та им. В. В. Куйбышева, 1959, т. 144, с. 117.
14. *Manwell A. R.* A variational principle for steady homenergic compressible flow with finite shocks.— Wave motion, 1980, v. 2, No. 1, p. 83.
15. *Гюнтер Н. М.* Курс вариационного исчисления. М.— Л.: Гостехиздат, 1941. 308 с.
16. *Whitham G. B.* Variational methods and applications to water waves.— Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1967, v. 299, No. 1456, p. 6. (Рус. перев.: В кн.: Нелинейная теория распространения волн. М.: Мир, 1970, с. 12).
17. *Zemplen G.* Kriterien fur die physikalische Bedeutung der unstetigen Lösungen der hydrodynamischen Bewegungsgleichungen.— Math. Annalen, 1905, B. 61, S. 437.
18. *Lichtenstein L.* Grundlagen der Hydromechanik. Berlin: Springer, 1929. 506 S.
19. *Лурье М. В.* Применение вариационного принципа для исследования разрывов в сплошной среде.— ПММ, 1966, т. 30, вып. 4, с. 747.
20. *Седов Л. И.* Об условиях на сильных разрывах в теории гравитации.— ПММ, 1972, т. 36, вып. 1, с. 3.
21. *Крайко А. Н.* Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1979. 447 с.

Москва

Поступила в редакцию
18.VI.1980