Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 2, 1981

УДК 62—50

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С КВАДРАТИЧНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Исаков А. И.

Для линейных дискретных систем рассматривается задача оценивания матричных параметров при условии, что доступная информация ограничена измерением функции координат системы [1—7]. Получено описание информационного множества весовых функций, совместимых с результатами измерений, а также матричное уравнение для его центра. Показано, что разрешающий оператор данной задачи оценивания допускает факторизацию, свойства которой позволяют свести решение полученных матричных уравнений к решению векторных уравнений. По постановке и методам решения работа примыкает к исследованиям [1, 2].

1. Постановка задачи и основные определения. Дана линейная управляемая система с дискретным временем

$$x(1) = K(1)x(0) + Bu(0) \tag{1.1}$$

$$x(k+1) = K(k+1)x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} K(k-i)Bu(i) + Bu(k),$$

$$k = 1, \ldots, p-1$$

Здесь $K(i)$ $(i = 1, \ldots, p)$ — заранее неизвестные весовые $(n \times n)$-матрицы, $x(0)$ — известный n-мерный вектор начального положения системы (1.1), $u(i)$ $(i = 0, \ldots, p-1)$ — известные r-векторные управляющие воздействия. Матрица B размера $n \times r$ известна.

Дополнительная информация о системе (1.1) может быть получена по ходу процесса за счет дополнительных измерений в силу уравнения

$$y(k+1) = Gx(k+1) + \xi(k+1), \quad k = 0, 1, \ldots p-1 \tag{1.2}$$

где $\xi(i)$ $(i = 1, \ldots, p)$ — m-векторные помехи в измерительном устройстве, G — известная $(m \times n)$-матрица.

Предполагается, что априори неизвестные параметры системы (1.1), (1.2) стеснены совместными квадратичными ограничениями

$$\sum_{i=1}^{p} \{\langle K(i) - K_0(i), N_*(K(i) - K_0(i))\rangle + (\xi(i), \xi(i))\} \leqslant \mu^2 \tag{1.3}$$

Здесь N_* — линейный симметричный положительный оператор на пространстве $(n \times n)$-матриц (в частности, это может быть оператор левого или правого умножения на симметричную положительную $(n \times n)$-матрицу), $K_0(i)$ $(i = 1, \ldots, p)$ — известные $(n \times n)$-матрицы, μ — заданное число. Символ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает здесь и далее скалярное произведение на матричных пространствах, определенное $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^*)$ [8—14], а $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение на векторных пространствах.

Введем следующие определения и обозначения.

Определение 1.1. Информационным множеством $\mathbf{K}(p) = \mathbf{K}(p \mid y(1),\ldots, y(p))$ весовых функций системы (1.1) — (1.3) назовем семейство всех тех и только тех последовательностей $\{K(1), \ldots, K(p)\}$ матриц $K(i)$, для которых существуют m-векторы $\xi(1), \ldots, \xi(p)$, такие, что выполняются ограничения (1.1) — (1.3).

Всюду далее измерения $y(1), \ldots, y(p)$ фиксированы, $p \geqslant 1$ — фиксированное число.

Пусть X — конечно-мерное евклидово пространство, A — выпуклый компакт, лежащий в X, функция $\varphi(x) = \max\{\| x - z \| \mid z \in A\}$.

Определение 1.2. Назовем $a \in X$ центром выпуклого компакта A, если $\varphi(a) = \min\{\varphi(x) \mid x \in A\}$.

Видно, что выпуклый компакт A всегда имеет центр $a \in A$ и a — центр эллипсоида $(x - a, M(x - a)) \leqslant \nu^2$, если M — линейный положительный оператор на X.

Задача. Определить информационное множество $\mathbf{K}(p)$ для системы (1.1) — (1.3) по заданным начальному состоянию $x(0)$, входному воздействию $\{u(0), \ldots, u(p-1)\}$, результатам измерений $\{y(1), \ldots, y(p)\}$. Найти условия, определяющие центр $\mathbf{K}(p)$.

Ниже будет показано, что в данной задаче информационное множество есть эллипсоид в соответствующем пространстве матриц.

Удобно ввести следующие обозначения (всюду далее звездочка означает транспонирование):

$$\mathbf{u} = \{u(0), \ldots, u(p-1)\}^* \in \prod_{i=0}^{p-1} R^r, \quad \mathbf{x} = \{x(1), \ldots, x(p)\}^* \in \prod_{i=1}^{p} R^n$$

$$\mathbf{y} = \{y(1), \ldots, y(p)\}^* \in \prod_{i=1}^{p} R^m, \quad \boldsymbol{\xi} = \{\xi(1), \ldots, \xi(p)\} \in \prod_{i=1}^{p} R^m$$

$$\mathbf{K} = \{K(1), \ldots, K(p)\}^* \in \prod_{i=1}^{p} M_n,$$

$$\mathbf{K}_0 = \{K_0(1), \ldots, K_0(p)\}^* \in \prod_{i=1}^{p} M_n$$

Здесь M_n — гильбертово пространство $(n \times n)$-матриц со скалярным произведением, как определено выше. На произведении гильбертовых пространств скалярное произведение определяется обычным образом, например

$$\langle \mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2\rangle = \sum_{i=1}^{p} \langle K_1(i), K_2(i)\rangle, \quad \mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2 \in \prod_{i=1}^{p} M_n$$

Обозначим полученное гильбертово пространство через $\mathbf{H}$.

2. Построение информационного множества. Перед построением информационного множества приведем следующие определения.

Пусть $x \in R^n$, $y \in R^k$.

Определение 2.1. Тензорным произведением векторов x, y назовем линейный оператор $x \otimes y$ из R^n в R^k, заданный формулой

$$(x \otimes y)\, z = (x,\ z)\, y, \quad z \in R^n \tag{2.1}$$

Оператор $x \otimes y$ может быть записан в матричном виде как yx^*.

Далее пусть A — линейный оператор из R^n в R^m, B — линейный оператор из R^k в R^l, $R^n \otimes R^k$ и $R^m \otimes R^l$ — тензорные произведения соответствующих гильбертовых пространств [8—14].

Определение 2.2. Тензорным произведением линейных операторов A, B назовем линейный оператор $A \otimes B$ из $R^n \otimes R^k$ в $R^m \otimes R^l$, заданный на операторах вида $x \otimes y$, $x \in R^n$, $y \in R^k$ формулой

$$(A \otimes B)(x \otimes y) = Ax \otimes By \tag{2.2}$$

и продолженный по линейности на все пространство $R^n \otimes R^k$.

Отметим, что тензорное произведение векторов из определения 2.1 не есть тензорное произведение соответствующих одностолбцовых матриц из определения 2.2. Пространство $R^n \otimes R^k$ и пространство линейных операторов из R^n в R^k, а также пространство $M_n \otimes M_n$ и пространство линейных операторов из M_n в M_n изоморфны. Линейные операторы на пространствах R^n и M_n допускают представление вида $\Sigma x_i \otimes y_i$ и $\Sigma A_i \otimes \otimes B_i$ соответственно. Матричная запись оператора $A \otimes \mathbf{B}$, где $A \in M_p$, $\mathbf{B}$ — линейный оператор из M_n в M_n, имеет вид

$$A \otimes \mathbf{B} = \begin{Vmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \dots & a_{1p}\mathbf{B} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1}\mathbf{B} & \dots & a_{pp}\mathbf{B} \end{Vmatrix} \tag{2.3}$$

и, в частности, можно рассматривать оператор $A \otimes \mathbf{B}$ на пространстве $\mathbf{H}$. Соответствующее отображение из $R^p \otimes M_n$ на $\mathbf{H}$ строится по правилу

$$x \otimes X \to \{x_1 X,\ \dots,\ x_p\ X\}, \quad x \in R^p,\ X \in M_n$$

с последующим продолжением на все пространство $R^p \otimes M_n$ по линейности.

Осталось заметить, что справедливы следующие соотношения:

$$Ax \otimes By = B\,(x \otimes y)\, A^*,\ \langle A,\ x \otimes y\rangle = (Ax,\ y) \tag{2.4}$$

$$(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*,\ \ (A \otimes B)\, K = BKA^*$$

Здесь x, y — векторы, A, B, K — матрицы, такие, что соответствующие выражения в (2.4) имеют смысл.

Перейдем к построению информационного множества. Из (2.1) — (2.4) можно получить, что линейное многообразие, задаваемое условиями (1.1), (1.2), имеет вид

$$T\mathbf{K} + \xi = \mathbf{z};\ \ \mathbf{z} = \mathbf{y} - (E_p \otimes GB)\,\mathbf{u} \tag{2.5}$$

$$T = (E_p \otimes G)\left\{T_{x(0)} + \sum_{i=0}^{p-2} T_{u(i)}\mathbf{B}S_{i+1}\right\},\quad \mathbf{B} = E_p \otimes (B^* \otimes E_n) \tag{2.6}$$

$$T_{x(0)} = E_p \otimes (x^*\,(0) \otimes E_n),\quad T_{u(i)} = E_p \otimes (u^*\,(i) \otimes E_n)$$

$$S_i\{K_1, \ldots, K_p\} = \{0_n, \ldots, 0_n, K_1, \ldots, K_{p-i}\}, \{K_1, \ldots, K_p\} \in H$$

Здесь T — линейный оператор на пространстве $\mathbf{H}$, S_i — оператор правого сдвига на $\mathbf{H}$, 0_n — нулевой элемент пространства M_n. При этом ограничение (1.3) может быть записано следующим образом:

$$\langle \mathbf{K} - \mathbf{K}_0, \mathbf{N}(\mathbf{K} - \mathbf{K}_0)\rangle + (\xi, \xi) \leqslant \mu^2, \quad \mathbf{N} = E_p \otimes N_*$$

где $\mathbf{N}$ — линейный оператор на пространстве $\mathbf{H}$.

Проведя типичные для линейно-квадратичных задач выкладки, можно установить справедливость следующего утверждения.

Теорема 2.1. Информационное множество $\mathbf{K}(p)$ — эллипсоид в пространстве $\mathbf{H}$, определяемый равенством

$$\mathbf{K}(p) = \{\mathbf{K} \in \mathbf{H} \mid \langle \mathbf{K} - \mathbf{K}_*, \mathbf{M}(\mathbf{K} - \mathbf{K}_*)\rangle \leqslant \mu^2 - \varkappa^2$$

Здесь $\mathbf{M}$ — блочная $(p \times p)$-матрица с элементами

$$A_{ii} = N_* + x(0)x^*(0) + \sum_{k=0}^{p-1-i} Bu(k)u^*(k)B^* \otimes G^*G, \quad i = 1, \ldots, p$$

$$A_{ij} = (Bu(j-i-1)x^*(0) + \sum_{k=j-i}^{p-1-i} Bu(k)u^*(k-j-i)B^*) \otimes G^*G,$$
$$i < j = 1, \ldots, p$$

$$A_{ij} = A_{ji}, \quad j < i = 1, \ldots, p$$

Центр $\mathbf{K}_*$ информационного множества $\mathbf{K}(p)$ есть решение матричного уравнения

$$\mathbf{MK} = \mathbf{K}(y) \tag{2.7}$$

Правая часть определяется соотношением

$$\mathbf{K}(y) = \mathbf{NK}_0 + \{G^*z(1)x^*(0), \ldots, G^*z(p)x^*(0)\}^* +$$
$$+ \left\{G^*\left(\sum_{k=2}^{p} z(k)u^*(k-2)\right)B^*, G^*\left(\sum_{k=3}^{p} z(k)u^*(k-3)\right)B^*, \ldots\right.$$
$$\left.\ldots, G^*z(p)u^*(0)B^*, O_n\right\}^*$$

$z(1), \ldots, z(p)$ — координаты блочного p-вектора $\mathbf{z}$.

Число $\varkappa^2$ определяется формулой

$$\varkappa^2 = (\mathbf{z}, \mathbf{z}) + \langle \mathbf{K}_0, \mathbf{NK}_0\rangle - \langle \mathbf{K}_*, \mathbf{K}(y)\rangle \tag{2.8}$$

где вектор $\mathbf{z}$ строится по сигналу в силу второго соотношения в (2.5).

Решение уравнения (2.7) для центра $\mathbf{K}_*$, а также определение числа $\varkappa^2$ из (2.8) может быть сведено к более простой задаче, так как оператор $\mathbf{M}^{-1}$ допускает удобную факторизацию, к построению которой и переходим.

3. Факторизация оператора $\mathbf{M}^{-1}$, определяющего центр информационного множества $\mathbf{K}(p)$. Непосредственно проверяется следующее утверждение.

Лемма 3.1. Пусть X, Y — конечно-мерные векторные пространства, E_X, E_Y — тождественные операторы на X, Y соответственно, T_1 — линейный оператор из X в Y. Тогда справедливо равенство

(3.1) $$(T_1^*T_1 + E_X)^{-1} = E_X - T_1^*(T_1T_1^* + E_Y)^{-1}T_1$$

Если положить в лемме 3.1

$$X = \mathrm{H},\ Y = \prod_{i=1}^{p} R^n,\ T_1 = T\mathrm{N}^{-1/2}$$

то из (2.7) вытекает соотношение

(3.2) $$\mathbf{K}_* = \mathbf{K}_0 + \mathrm{N}^{-1}T^*(T\mathrm{N}^{-1}T^* + E_Y)^{-1}\{\mathbf{z} - T\mathbf{K}_0\}$$

Используя определения (2.6), получаем

$$T\mathrm{N}^{-1}T^* = (E_p \otimes G)\left\{T_{x(0)} + \sum_{i=0}^{p-2} T_{u(i)}\mathbf{B}S_{i+1}\right\}\mathrm{N}^{-1}\left\{T^*_{x(0)} + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=0}^{p-2} S^*_{i+1}\mathbf{B}^*T^*_{u(i)}\right\}(E_p \otimes G^*) =$$
$$= (E_p \otimes G)\left\{T_{x(0)}\mathrm{N}^{-1}T^*_{x(0)} + \sum_{i=0}^{p-2} T_{u(i)}\mathbf{B}S_{i+1}\mathrm{N}^{-1}T^*_{x(0)} + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=0}^{p-2} T_{x(0)}N^{-1}S^*_{i+1}\mathbf{B}^*T^*_{u(i)} + \sum_{i=0}^{p-2}\sum_{j=0}^{p-2} T_{u(i)}\mathbf{B}S_{i+1}\mathrm{N}^{-1}S^*_{j+1}\mathbf{B}^*T^*_{u(j)}\right\}(E_p \otimes G^*)$$

Далее, для простоты, будем считать, что оператор N_* имеет вид $N_* = N_1 \otimes N_2$, где N_1, N_2 — симметричные положительно-определенные матрицы из пространства M_n. Можно проверить, что

(3.3) $$T_{x(0)}\mathrm{N}^{-1}T^*_{x(0)} = E_p \otimes (x^*(0)\,N_1^{-1}x(0) \otimes N_2^{-1})$$

Проведя аналогичные вычисления для слагаемых вида

$$T_{u(i)}\mathbf{B}S_{i+1}\mathrm{N}^{-1}T^*_{x(0)},\ T_{x(0)}\mathrm{N}^{-1}S^*_{i+1}\mathbf{B}^*T^*_{u(i)},\ T_{u(i)}\mathbf{B}S_{i+1}\mathrm{N}^{-1}S^*_{j+1}\mathbf{B}^*T^*_{u(j)}$$

учитывая соотношение (3.2), можно проверить справедливость следующего утверждения.

Теорема 3.1. Если оператор $N_* = N_1 \otimes N_2$, где N_1, N_2 — симметричные положительно-определенные матрицы, то центр $\mathbf{K}_* = \{K_*(1), \ldots, K_*(p)\}^*$ информационного множества $\mathbf{K}(p)$ определяется из условия

(3.4) $$K_*(1) = K_0(1) + N_*^{-1}G^*\left\{x_0 \otimes l_{*1} + \sum_{k=2}^{p}(u_{k-2} \otimes l_{*k})B^*\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$K_*(p-1) = K_0(p-1) + N_*^{-1}G^*\{x_0 \otimes l_{*p-1} + (u_0 \otimes l_{*p})B^*\}$$
$$K_*(p) = K_0(p) + N_*^{-1}G^*\{x_0 \otimes l_{*p}\}$$

где $\mathbf{l}_* = \{l_{*1}, \ldots, l_{*p}\}$ — решение системы

(3.5) $$A(E_p \otimes GN_2^{-1}G^*)\,\mathbf{l}_* = \mathbf{z}_*$$

Элементы a_{ij} симметричной положительно-определенной матрицы $A \in M_p$ имеют вид

$$a_{11} = (x(0),\ N_1^{-1}x(0))$$
$$a_{ii} = (x(0),\ N_1^{-1}x(0)) + \sum_{k=0}^{i-2}(u(k),\ B^*N_1^{-1}Bu(k)),\quad i = 2, \ldots, p$$

$$a_{1i} = (x(0), N_1^{-1}Bu(i-2)), \quad a_{i1} = a_{1i}, \ i = 2, \ldots, p$$

$$a_{ij} = (x(0), N_1^{-1}Bu(j-i-1)) + \sum_{k=0}^{i-2} (u(k), B^*N_1^{-1}Bu(k+j-i)),$$

$$a_{ji} = a_{ij}, \ 2 \leqslant i < j \leqslant p$$

Блочный p-вектор $\mathbf{z}_*$ имеет вид

$$\mathbf{z}_* = \mathbf{z} - (E_p \otimes G)\Big\{K_0(1)\,x(0), K_0(2)\,x(0) +$$

$$+ K_0(1)\,Bu(0), \ldots, K_0(p)\,x(0) + \sum_{k=0}^{p-2} K_0(k+1)\,Bu(k)\Big\}^*$$

Для доказательства теоремы 3.1 осталось заметить, что

$$\mathbf{z} - \mathbf{z}_* = T\mathbf{K}_0,\ T^*\mathbf{l}_* = \Big\{G^*l_{*1}x^*(0) + \sum_{k=2}^{p} G^*l_{*k}u^*(k-2)\,B^*, \ldots$$

$$\ldots, G^*l_{*p-1}x^*(0) + G^*l_{*p}u^*(0)\,B^*, G^*l_{*p}x^*(0)\Big\}$$

Теорему 3.1 можно рассматривать как утверждение о факторизации оператора $\mathbf{M}^{-1}$ в виде $\mathbf{RQ}^{-1}$, где $\mathbf{R}$ $(\mathbf{l}_*)$ — оператор вычисления (т. е. не требующий решения каких-либо уравнений, если считать, что матрицы N_1^{-1}, N_2^{-1} определены заранее), заданный формулами (3.4), а оператор $\mathbf{Q} = A\ (E_p \otimes GN_2^{-1}G_p^*)$ задает уравнение (3.5) на пространстве последовательностей

$$\prod_{i=1}^{p} R^n$$

Тем самым теорема 3.1 позволяет избежать решения матричных уравнений, хотя исходная экстремальная задача была априорно задана на матричном пространстве $\mathbf{H}$. Кроме того, число $\varkappa^2$, определяемое теоремой 2.1 по формуле (2.8), может быть вычислено только по $\mathbf{l}_*$ — решению уравнения (3.5) — т. е. и здесь не требуется выходить из пространства

$$\prod_{i=1}^{p} R^n$$

в матричное пространство $\mathbf{H}$. Пример такого вычисления числа $\varkappa^2$ будет рассмотрен ниже для одношаговой модели данной задачи.

Для сравнения уравнений для центра теорем 2.1 и 3.1 обратимся к одношаговой модели индентификации

$$x(1) = Ax(0) + Bu(0) \tag{3.6}$$

при ограничениях (3.7) и измеряемом сигнале (3.8)

$$\langle A - A_0,\ \mathbf{N}\,(A - A_0)\rangle + (\xi,\ \xi) \leqslant \mu^2 \tag{3.7}$$

$$y = Gx(1) + \xi \tag{3.8}$$

Положим $K(1) = A$, $z = y - GBu(0)$, $p = 1$ и воспользуемся результатами пп. 2.3. Для простоты предположим также, что $\mathbf{N}$ — оператор левого умножения на симметричную положительно-определенную матрицу $N \in M_n$.

В этом случае теорема 2.1 переходит в следующее утверждение.

Следствие 3.1. При $p = 1$ для системы (3.6)—(3.8) информационный эллипсоид **K** определяется условиями

$$\mathbf{K} = \{A \in M_n \mid \langle A - A_1, \mathbf{M}(A - A_1)\rangle \leqslant \mu^2 - \varkappa^2\} \tag{3.9}$$

$$\mathbf{M} = E_n \otimes N + x(0)\, x^*(0) \otimes G^*G \tag{3.10}$$

A_1 — решение матричного уравнения

$$NA + G^*GAx(0)\, x^*(0) = NA_0 + G^*zx^*(0), \quad z = y - GBu(0) \tag{3.11}$$

$$\varkappa^2 = (z, z) + \langle A_0, NA_0\rangle - \langle A_1, NA_0 + G^*zx^*(0)\rangle \tag{3.12}$$

При помощи рассуждений, подобных ([13], гл. 8), можно записать решение уравнения (3.10) следующим образом.

Следствие 3.2. Если матрица G имеет полный ранг и коммутатор [12] $[G^*G, N] = O_n$, то решение уравнения (3.10) — центр эллипсоида **K** — имеет вид

$$A_1 = (G^*G)^{-1} \int_0^\infty \exp(-(G^*G)^{-1}Nt)\{NA_0 + G^*[y - GBu(0)]\, x^*(0)\} \times \exp(-x(0)\, x^*(0)\, t)\, dt \tag{3.13}$$

Если же находить центр A_1 эллипсоида **K** по теореме 3.1, то полученная факторизация приводит к утверждению

Следствие 3.3. При $p = 1$ для системы (3.6)—(3.8) центр эллипсоида **K** можно определить по формуле

$$A_1 = A_0 + N^{-1}G^*(x(0) \otimes l_*) \tag{3.14}$$

где l_* — решение уравнения

$$l + \|x(0)\|^2 GN^{-1}G^*l = y - G\{A_0 x(0) + Bu(0)\} \tag{3.15}$$

При этом

$$\varkappa^2 = (l_*, z - GA_0x(0)) = \|l_*\|^2 + \|x(0)\|^2 (l_*, GN^{-1}G^*l_*) \tag{3.16}$$

Представление (3.16) получается из (3.12), (3.14), (3.15) непосредственной проверкой. Аналогичное представление имеет место и для многошаговой модели (1.1)—(1.3).

Оператор T из (2.6) допускает и более простое представление, но для решения непрерывного аналога данной задачи индентификации путем предельного перехода, а также для сравнения результатов в дискретном и непрерывном времени представляется более удобным разложение (2.6) данной работы. Решение одной задачи индентификации в непрерывном времени может быть найдено в работе [7].

Автор благодарит Куржанского А. Б. за внимание к работе и обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968. 475 с.
2. *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.

3. *Куржанский А. Б.* Об адаптивном управлении в механических системах.— Теор. и прикл. механика (Болгария), 1978, вып. 2, с. 28.
4. *Kurzhanskii A. B.*, *Gusev M. I.* Multicriterial game-theoretic problems of control for systems with incomplete information.— In: Proc. 7th Congress Int. Federat. Automat. Control (IFAC). v. 2. Helsinki, 1978, p. 1041.
5. *Кац И. Я.*, *Куржанский А. Б.* Минимаксная многошаговая фильтрация в статистически неопределенных ситуациях.— Автоматика и телемеханика, 1978, вып. 11 с. 79.
6. *Кощеев А. С.* Об оценивании состояний управляемых систем в условиях неопределенности.— Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, вып. 12, с. 2168.
7. *Исаков А. И.* Об оценке весовых функций линейных управляемых систем по результатам измерений.— В кн.: Оптимальное управление в динамических системах, УНЦ АН СССР. Свердловск: 1979, с. 26.
8. *Schatten R.* A theory of cross-spaces.— In: Ann. Math. Stud. v. 26. Princeton Univ. Press, 1950.
9. *Schatten R.* Norm ideals of completely continuous operators. Springer, Berlin: 1960. 81 p.
10. *Бурбаки Н.* Элементы математики. Т. 2. Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. М.: Физматгиз, 1962. 516 с.
11. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971, 359 с.
12. *Глазман И. М.*, *Любич Ю. И.* Конечно-мерный линейный анализ в задачах. М.: Наука, 1969, 475 с.
13. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1978. 280 с.
14. *Халмош П.* Конечно-мерные векторные пространства. М.: Физматгиз, 1963. 262 с.

Свердловск

Поступила в редакцию
12.XII.1979