Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 2, 1981

УДК 62—50

К ПОСТРОЕНИЮ СТАБИЛЬНОГО МОСТА В ИГРЕ УДЕРЖАНИЯ

Ухоботов В. И.

Описывается процедура построения u-стабильного моста [1] в дифференциальной игре удержания. Рассматриваются конкретные классы игр, сводящиеся к игре удержания. Приведены примеры.

1. Рассмотрим управляемый процесс, уравнения движения которого имеют вид

$$z^{\cdot} = f(t,\ z,\ u,\ v),\quad z \in R^n,\quad u \in U(t),\quad v(t) \in V(t) \tag{1.1}$$

Задан отрезок I числовой оси. Множества $U(t)$ и $V(t)$ при каждом $t \in I$ являются компактами в R^n и измеримо зависят от t на отрезке I.

На отрезке I задано семейство множеств $W(t) \subset R^n$, удовлетворяющих условию замкнутости

$$t_i \to t,\ x_i \to x,\ x_i \in W(t_i) \Rightarrow x \in W(t) \tag{1.2}$$

Заданы начальное положение $t_0 \in I$, $z(t_0) \in W(t_0)$ и число $p > t_0$, $p \in I$. Цель первого игрока, выбирающего управление u, заключается в удержании точки $z(t)$ во множестве $W(t)$ при всех $t_0 \leqslant t \leqslant p$ и при любом поведении второго игрока.

Относительно правой части системы (1.1) сделаем следующие предположения: а) для любого начального условия $t_1 \in I$, $z(t_1) \in R^n$ и любых измеримых на отрезке I управлений $u(t) \in V(t)$, $v(t) \in V(t)$ система (1.1) имеет единственное решение, определенное на отрезке I, б) для измеримого на отрезке I управления $v(t) \in V(t)$ из всякой бесконечной последовательности решений $z_i(t)$ системы (1.1) с управлениями $u_i(t) \in U(t)$ и начальными условиями $t_i \to t^\circ$, $z(t_i) \to z^\circ$ можно выделить равномерно сходящуюся на I последовательность, причем предельная функция является решением с тем же управлением $v(t)$ и с некоторым измеримым управлением $u(t) \in U(t)$.

Для построения u-стабильного моста [1], отвечающего рассматриваемой задаче, будем использовать многозначное отображение, введенное для стационарных игр в работе [2]. Пусть заданы множество $X \subset R^n$ и числа $t_1 \leqslant \tau$. Тогда $T_{t_1}^{\tau}(X)$ — множество точек $z \in R^n$, для каждой из которых по любому измеримому на $[t_1, \tau]$ управлению $v(t) \in V(t)$ можно указать измеримое на этом отрезке управление $u(t) \in U(t)$, такое, что $z(\tau) \in X$. Здесь $z(\tau)$ — значение решения системы (1.1) с начальным условием $z(t_1) = z$.

При сделанных предположениях отображение T обладает следующими свойствами:

1) если множество X замкнуто, $x_i \to x$, $t_i \to t$, $x_i \in T_{t_i}{}^{\tau}(X)$, то $x \in T_t{}^{\tau}(X)$;

2) если множества X_i замкнуты и $X_{i+1} \subset X_i$, то

$$\bigcap_{i \geqslant 1} T_t{}^{\tau}(X_i) = T_t{}^{\tau}\left(\bigcap_{i \geqslant 1} X_i\right);$$

3) если $X \subset X_1$, то $T_t{}^{\tau}(X) \subset T_t{}^{\tau}(X_1)$;

4) $T_t{}^t(X) = X$;

5) при любых $t \leqslant t_1 \leqslant \tau$ и любом множестве $X \subset R^n$ выполнено включение $T_t{}^{t_1}(T_{t_1}{}^{\tau}(X)) \subset T_t{}^{\tau}(X)$.

Определим при $t \leqslant p$ семейство множеств $W^k(t)$ следующим рекуррентным соотношением:

$$W^0(t) = W(t), \ \ldots, \ W^k(t) = \bigcap_{t \leqslant \tau \leqslant p} T_t{}^{\tau}(W^{k-1}(\tau)) \tag{1.3}$$

Следующие свойства вытекают из условия замкнутости (1.2) и свойств отображения T: 1) множество $W^k(t)$ удовлетворяет условию замкнутости (1.2); 2) $W^{k+1}(t) \subset W^k(t)$; 3) $W^k(p) = W(p)$.

Лемма 1. Пусть начальные условия таковы, что $z(t_0) \in W^k(t_0)$ при некотором $k \geqslant 1$. Тогда существует ε-стратегия [2] второго игрока, выводящая к моменту времени p траекторию $z(t)$ из семейства множеств $W(t)$.

Доказательство. Из условия леммы и из соотношений (1.3) следует, что $z(t_0) \in T_{t_0}^{\tau}(W^{k-1}(\tau))$ при некотором $t_0 \leqslant \tau \leqslant p$. Стало быть, второй игрок может построить такое измеримое на отрезке $[t_0, \tau]$ управление, что при любом измеримом управлении первого игрока $z(\tau) \in W^{k-1}(\tau)$. Если $\tau = p$, то $z(p) \in W(p)$. Проделанное рассуждение нужно провести k раз. Можно показать, что приведенное правило построения управления второго игрока реализуется некоторой ε-стратегией, строгая формализация которых содержится в работе [3].

При каждом $t \leqslant p$ положим

$$M(t) = \bigcap_{k \geqslant 1} W^k(t) \tag{1.4}$$

Тогда, как следует из свойств для $W^k(t)$, множества $M(t)$ удовлетворяют при $t \leqslant p$ условию замкнутости (1.2).

Лемма 2. $T_t{}^{\tau}(M(\tau)) \supset M(t)$ при $t \leqslant \tau \leqslant p$.

Доказательство. Из соотношений (1.3), (1.4) и из свойств 2 для отображения T и множеств $W^k(t)$ следует, что

$$M(t) \subset \bigcap_{k \geqslant 1} T_t^{\tau}(W^{k-1}(\tau)) = T_t^{\tau}(M(\tau)).$$

Из доказанных лемм следует, что семейство множеств (1.4) является максимальным u-стабильным мостом в задаче удержания до момента времени p.

Следствие. Пусть существует число $k \geqslant 0$, такое, что $W^k(t) \subset W^{k+1}(t)$ при $t \leqslant p$. Тогда $M(t) = W^k(t)$.

Пример. Рассмотрим однотипную игру с простым движением

$$z^{\cdot} = -u + v, \quad u \in \alpha(t)\,S, \quad v \in \beta(t)\,S$$

Здесь S — выпуклый компакт в R^n, содержащий начало координат, $\alpha(t) \geqslant 0$ и $\beta(t) \geqslant 0$ — суммируемые на отрезке I функции. Тогда, используя определение геометрической разности $\overset{*}{-}$ [4], будем иметь

$$T_t^\tau(X) = \left(X + \int_t^\tau \alpha(r)\,dr S\right) \overset{*}{-} \int_t^\tau \beta(r)\,dr\, S \tag{1.5}$$

Пусть $W(t) = \delta(t) S$, где $\delta(t) \geqslant 0$ — непрерывная на отрезке I функция. Определим число

$$b = \inf\left\{t \in I : \delta(\tau) \geqslant \int_t^\tau (\beta(r) - \alpha(r))\,dr, \quad t \leqslant \tau \leqslant p\right\} \tag{1.6}$$

Тогда из (1.5) можно получить, что при $b \leqslant t \leqslant \tau \leqslant p$

$$T_t^\tau(W(\tau)) = \left(\delta(\tau) + \int_t^\tau (\alpha(r) - \beta(r))\,dr\right) S$$

Следовательно, при $b \leqslant t \leqslant p$

$$W^1(t) = \delta_1(t) S, \quad \delta_1(t) = \min_{t \leqslant \tau \leqslant p} \left(\delta(\tau) + \int_t^\tau (\alpha(r) - \beta(r))\,dr\right) \tag{1.7}$$

Если $t < b$, то существует число $t < \tau \leqslant p$, при котором множество $T_t^\tau(W(\tau))$ пусто. Стало быть, множество $W^1(t)$ пусто при $t < b$.

Проделав аналогичное рассуждение, можно доказать равенство $W^2(t) = W^1(t)$ при $t \in I$.

Докажем еще одно свойство множеств (1.3) и (1.4), используемое в дальнейшем. Пусть задана последовательность семейств множеств $W_i(t)$ ($t \in I$), удовлетворяющих условию замкнутости (1.2). Положим

$$W_0(t) = \bigcap_{i \geqslant 1} W_i(t)$$

При каждом $i = 0, 1, \ldots$ для $W_i(t)$ строим множества $W_i^k(t)$ и $M_i(t)$ по формулам (1.3) и (1.4).

Лемма 3. Пусть $W_{i+1}(t) \subset W_i(t)$ при $t \leqslant p$ и всех $i \geqslant 1$. Тогда при $t \leqslant p$

$$\bigcap_{i \geqslant 1} W_i^k(t) = W_0^k(t), \quad \bigcap_{i \geqslant 1} M_i(t) = M_0(t) \tag{1.8}$$

Доказательство. Вначале покажем, что $W_{i+1}^k(t) \subset W_i^k(t)$. При $k = 0$ требуемое включение выполнено. Пусть оно выполнено при k для всех $t \in I$, $t \leqslant p$. Тогда

$$W_{i+1}^{k+1}(t) = \bigcap_{t \leqslant \tau \leqslant p} T_t^\tau(W_{i+1}^k(\tau)) \subset \bigcap_{t \leqslant \tau \leqslant p} T_t^\tau(W_i^k(\tau)) = W_i^{k+1}(t)$$

Индукцией по k докажем первое равенство (1.8). При $k = 0$ оно выполнено. Пусть оно выполнено при k. Тогда из доказанного включения и из свойства 3 отображения T следует

$$\bigcap_{i \geqslant 1} W_i^{k+1}(t) = \bigcap_{i \geqslant 1} \bigcap_{t \leqslant \tau \leqslant p} T_t^\tau(W_i^k(\tau)) = \bigcap_{t \leqslant \tau \leqslant p} T_t^\tau\left(\bigcap_{i \geqslant 1} W_i^k(\tau)\right) = W_0^{k+1}(t)$$

Из доказанного первого равенства (1.8) следует, что

$$M_0(t) = \bigcap_{k \geqslant 1} W_0^k(t) = \bigcap_{k \geqslant 1} \bigcap_{i \geqslant 1} W_i^k(t) = \bigcap_{k \geqslant 1} \bigcap_{i \geqslant 1} W_i^k(t) = \bigcap_{i \geqslant 1} M_i(t)$$

2. Рассмотрим следующую игру: заданы замкнутое множество $Z \subset R^n$, непрерывная функция $g : Z \times I \to R$, ограниченная снизу числом γ, и начальное положение $t_0 \in I$, $z_0 \in R^n$.

Цель первого игрока заключается в том, чтобы удержать точку $z(t)$ во множестве Z до момента p и минимизировать при этом величину

$$\max_{t_0 \leqslant t \leqslant p} g(z(t), t) \tag{2.1}$$

При каждом $\nu \geqslant \gamma$ определим на отрезке I семейство множеств

$$W_\nu(t) = \{z \in Z: g(z, t) \leqslant \nu\}.$$

Тогда включение $z(t) \in W_\nu(t)$ при $t_0 \leqslant t \leqslant p$ равносильно требованию, чтобы величина (2.1) не превосходила ν. Для каждого $\nu \geqslant \gamma$ строим стабильный мост $M_\nu(t)$ (1.4). Обозначим через $\nu_0 = \nu(z_0, t_0)$ нижнюю грань всех чисел $\nu \geqslant \gamma$, для которых

$$z_0 \in M_\nu(t_0) \tag{2.2}$$

Из леммы 3 следует, что включение (2.2) выполнено и при $\nu = \nu_0$. Отсюда следует, что первый игрок сможет сделать значение величины (2.1) не больше, чем ν_0.

Возьмем $\nu < \nu_0$. Тогда включение (2.2) не выполнено. Стало быть, второй игрок сможет к моменту времени p вывести точку $z(t)$ из множества $W_\nu(t)$, т. е. сделать значение величины (2.1) больше ν, либо вывести точку $z(t)$ из множества Z.

Замечание. При нахождении цены $\nu(z_0, t_0)$ в рассмотренной игре можно использовать множества (1.3). Аналогично определяются числа $\nu_k(z_0, t_0)$. Последовательность этих чисел возрастает и в пределе дает значение цены игры. Такие последовательные процедуры построения цены игры рассматривались, например, в работах [5—7].

Пример. Рассмотрим пример из п. 1. Определим множество $Z = \bigcup(\nu S)$, $\nu \geqslant 0$. Положим

$$g(z) = \min\{\nu \geqslant 0: z \in \nu S\}$$

Тогда $W_\nu(t) = \nu S$. Стало быть, при каждом $\nu \geqslant 0$, полагая в формулах (1.6) и (1.7) $\delta(\tau) = \nu$, получим $b = b(\nu)$, $M_\nu(t) = \nu S$ при $b(\nu) \leqslant t \leqslant p$, и множество $M_\nu(t)$ пусто при $t < b(\nu)$. Отсюда следует, что значение ν_0 цены игры для начального положения z_0, t_0 определяется как наименьшее из чисел $\nu \geqslant 0$, для которых $b(\nu) \leqslant t_0$ и $z_0 \in \nu S$.

3. Рассмотрим стационарную игру удержания

$$\dot{z} = f(z, u, v), \quad u \in U, \quad v \in V$$

В этом случае $T_t^\tau(X) = T_{\tau-t}(X)$, причем $T_\sigma(X)$ — множество тех точек z, для каждой из которых по любому измеримому управлению $v(t) \in V$ можно указать измеримое управление $u(t) \in U$, такое, что $z(\sigma) \in X$. Здесь $z(\sigma)$ — значение решения системы (2.1) с начальным условием $z(0) = z$.

Формулы (1.3) примут вид

$$W^k(t) = \bigcap_{0 \leqslant \tau \leqslant p-t} T_\tau(W^{k-1}(t+\tau)) \tag{3.1}$$

В частности, если множество $W(t) = Z$ постоянно, то

$$W^1(t) = \bigcap_{0\leqslant\tau\leqslant p-t} T_\tau(Z) \tag{3.2}$$

$$W^2(t) = \bigcap_{0\leqslant r\leqslant p-t} T_r\Big(\bigcap_{0\leqslant\tau\leqslant p-t-r} T_\tau(Z)\Big) \tag{3.3}$$

Введем многозначное отображение

$$L_\sigma(X) = \bigcap_{0\leqslant\tau\leqslant\sigma} T_\tau(X) \tag{3.4}$$

Теорема. Если $L_r(L_\sigma(Z)) \supset L_{r+\sigma}(Z)$ при всех $0 \leqslant r \leqslant p$, $0 \leqslant \sigma \leqslant p$, то $W^2(t) = W^1(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant p$.

Доказательство. Достаточно показать, что $W^2(t) \supset W^1(t)$. Из равенств (3.2) — (3.4) и условия теоремы следует, что

$$W^2(t) \supset \bigcap_{0\leqslant r\leqslant p-t} L_r(L_{p-t-r}(Z)) \supset L_{p-t}(Z) = W^1(t)$$

Пример. Рассмотрим игру с простым движением $\dot z = -u + v$, $u \in U$, $v \in V$. Здесь U и V — выпуклые компакты в R^n. В этом случае [2]

$$L_\sigma(X) = \bigcap_{0\leqslant\tau\leqslant 1}((X + \tau\sigma U) \overset{*}{-} \tau\sigma V) \tag{3.5}$$

Покажем, что если Z — выпуклое множество, то условие предыдущей теоремы выполнено. Прежде всего, отметим, что если множество X выпукло, то множество (3.5) является выпуклым. Кроме того, можно показать, что

$$L_\sigma(X_1 + X_2) \supset L_\sigma(X_1) + X_2,\ L_\sigma(\sigma X) = \sigma L_1(X) \tag{3.6}$$

Возьмем положительные числа r и σ. Положим $Y = (r + \sigma)^{-1} Z$, $Z = \sigma Y + rY$. Тогда

$$L_\sigma(Z) \supset \delta L_1(Y) + rY$$

$$L_r(L_\sigma(Y)) \supset \sigma L_1(Y) + rL_1(Y) = (\sigma + r) L_1(Y) = L_{\sigma+r}((\sigma + r) Y) = L_{\sigma+r}(Z)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. *Пшеничный Б. Н., Сагайдак М. И.* О дифференциальных играх с фиксированным временем.— Кибернетика, 1970, № 2, с. 54.
3. *Pchenitchny B. N.* E-strategies in differential games. In: Topics in Differential Games. New York — London — Amsterdam: Horth-Holland Publ. Co., 1973, p. 45.
4. *Понтрягин Л. С.* О линейных дифференциальных играх. 2.— Докл. АН СССР, 1967, т. 175, № 4, с. 764.
5. *Ченцов А. Г.* О структуре одной игровой задачи сближения.— Докл. АН СССР, 1975, т. 224, № 6, с. 1272.
6. *Ченцов А. Г.* Об игровой задаче сближения в заданный момент времени.— Матем. сб., 1976, т. 99, № 3, с. 394.
7. *Чистяков С. В.* К решению игровых задач преследования.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 5, с. 825.

Челябинск

Поступила в редакцию 11.II.1980