Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 2, 1981

УДК 62—50

О ДИНАМИЧЕСКИХ ИГРАХ С ФИКСИРОВАННОЙ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬЮ

Томский Г. В.

Рассматриваются четыре метода последовательных приближений функции значения динамической игры, которые используются для построения ε-оптимальных стратегий игроков. Для доказательства сходимости этих методов используются общие кусочно-программные стратегии. Содержание работы примыкает к исследованиям [1—9] и обобщает результаты работ [8, 9] на случай общей динамической системы.

1. Пусть заданы отрезок времени $[t_0, T]$, множество состояний X, множества U и V, множество управлений первого (второго) игрока D_1 (D_2), элементами которого являются отображения отрезка времени $[t_0, T]$ в U (V) и функция состояния

$$\varkappa : [t_0, T] \times [t_0, T] \times X \times D_1 \times D_2 \to X$$

Пятерка $\Sigma = ([t_0, T], X, D_1, D_2, \varkappa)$ называется общей динамической системой, если выполняются следующие условия:

1) множества X, D_1, D_2 непусты;

2) если $u_1, u_2 \in D_1$, $v_1, v_2 \in D_2$ и $t_0 \leqslant t_1 < t_2 < t_3 \leqslant T$, то найдутся такие $u_3 \in D_1$, $v_3 \in D_2$, что

$$u_3(t) = \begin{cases} u_1(t), & t_1 \leqslant t < t_2, \\ u_2(t), & t_2 \leqslant t < t_3, \end{cases} \qquad v_3(t) = \begin{cases} v_1(t), & t_1 \leqslant t < t_2 \\ v_2(t), & t_2 \leqslant t < t_3 \end{cases}$$

3) функция $x = \varkappa(t, \tau, x_*, u, v)$ определена для всех $t \geqslant \tau$ и необязательно определена для всех $t < \tau$;

4) равенство $\varkappa(t, t, x, u, v) = x$ выполняется для любых $t_0 \leqslant t \leqslant T$, $x \in X$, $u \in D_1$, $v \in D_2$;

5) для любых $t_0 \leqslant t_1 < t_2 < t_3 \leqslant T$ и любых $x \in X$, $u \in D_1$, $v \in D_2$ выполняется равенство

$$\varkappa(t_3, t_1, x, u, v) = \varkappa(t_3, t_2, \varkappa(t_2, t_1, x, u, v), u, v)$$

6) если $u_1, u_2 \in D_1$, $v_1, v_2 \in D_2$ и $u_1(t) = u_2(t)$, $v_1(t) = v_2(t)$ при $t_0 \leqslant t_1 \leqslant t < t_2 \leqslant T$, то для любого $x \in X$ имеем

$$\varkappa(t_2, t_1, x, u_1, v_1) = \varkappa(t_2, t_1, x, u_2, v_2)$$

Элемент $x(t) = \varkappa(t, t_*, x_*, u, v)$ множества X называется состоянием системы Σ в момент времени t, а соответствующее отображение $x(\cdot)\cdot$ $\cdot[t_*, T] \to X$ — траекторией системы Σ, если в момент времени t_* система находилась в состоянии x_* и на нее действовали управления u, v. Через $D_k[t_1, t_2)$ будем обозначать множество всех сужений управлений k-го игрока на отрезок $[t_1, t_2)$, $k = 1, 2$.

2. Будем рассматривать динамические игры $\Gamma(t_*, x_*)$, описываемые системой Σ, в которых выигрыш первого игрока имеет вид

$$I(u, v, t_*, x_*) = H(\varkappa(T, t_*, x_*, u, v))$$

где $H\colon X \to R^1$. Считаем, что первый игрок максимизирует, а второй минимизирует этот функционал. Предполагается, что игроки используют кусочно-программные стратегии [3—7].

Рассмотрим следующие четыре последовательности, первые две из которых — обобщения последовательностей из работ [8—9]:

$$V_1^+(t, x) = W_1^+(t, x) = \inf_{v\in D_2}\sup_{u\in D_1} H(\varkappa|_{\tau=T})$$

$$V_1^-(t, x) = W_1^-(t, x) = \sup_{u\in D_1}\inf_{v\in D_2} H(\varkappa|_{\tau=T})$$

$$V_n^+(t, x) = \inf_{\tau\in[t, T]}\inf_{v\in D_2}\sup_{u\in D_1} V_{n-1}^+(\tau, \varkappa)$$

$$V_n^-(t, x) = \sup_{\tau\in[t, T]}\sup_{u\in D_1}\inf_{v\in D_2} V_{n-1}^-(\tau, \varkappa)$$

$$W_n^+(t, x) = \inf_{v\in D_2}\sup_{u\in D_1}\inf_{\tau\in[t, T]} W_{n-1}^+(\tau, \varkappa)$$

$$W_n^-(t, x) = \sup_{u\in D_1}\inf_{v\in D_2}\sup_{\tau\in[t, T]} W_{n-1}^-(\tau, \varkappa)$$

$$t_0 \leqslant t \leqslant T, \quad x \in X, \quad n = 2, 3, \ldots; \quad \varkappa = \varkappa(\tau, t, x, u, v)$$

Предположим, что динамическая система Σ удовлетворяет условию:

7) для любых $t_0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T$, $x_1, x_2 \in X$ существуют управления $u_* = u(t_1, t_2, x_1, x_2) \in D_1[t_1, t_2)$ и $v_* = v(t_1, t_2, x_1, x_2) \in D_2[t_1, t_2)$, такие, что

$$\{d[\varkappa(t, t_1, x_1, u_*, v), \varkappa(t, t_1, x_2, u, v_*)]\}^m \leqslant \tag{2.1}$$
$$\leqslant \{d[x_1, x_2]\}^m \exp\beta(t_2 - t_1) + \gamma(t_2 - t_1)(t_2 - t_1)$$
$$t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \quad \lim_{\delta\to 0}\gamma(\delta) = 0, \quad m, \ \beta > 0$$

для всех $u \in D_1$, $v \in D_2$, где d — некоторая метрика на множестве состояний X.

Теорема 1. Если динамическая система Σ удовлетворяет условию 7 и функция H равномерно непрерывна, то для любого числа $\varepsilon > 0$ существует пара ε-оптимальных стратегий в игре $\Gamma(t_*, x_*)$ и для функции значения $V(t_*, x_*) = \operatorname{val}\Gamma(t_*, x_*)$ выполняется условие

$$V(t, x) = \lim V_n^+(t, x) = \lim V_n^-(t, x) = \tag{2.2}$$
$$= \lim W_n^+(t, x) = \lim W_n^-(t, x), \quad n \to \infty$$

3. Для динамических систем, удовлетворяющих условию

8) $U \subset D_1$, $V \subset D_2$.

будем рассматривать величины

$$V_{c1}^+(t, x) = W_{c1}^+(t, x) = \inf_{v\in V}\sup_{u\in D_1} H(\varkappa|_{\tau=T})$$

$$V_{c1}^-(t, x) = W_{c1}^-(t, x) = \sup_{u\in U}\inf_{v\in D_2} H(\varkappa|_{\tau=T})$$

$$V_{cn}^+(t, x) = \inf_{\tau\in[t, T]}\inf_{v\in V}\sup_{u\in D_1} V_{c(n-1)}^+(\tau, \varkappa)$$

$$V_{cn}^{-}(t,\ x) = \sup_{\tau\in[t,\ T]} \sup_{u\in U} \inf_{v\in D_2} V_{c(n-1)}^{-}(\tau,\ \varkappa)$$

$$W_{cn}^{+}(t,\ x) = \inf_{v\in V} \sup_{u\in D_1} \inf_{\tau\in[t,\ T]} W_{c(n-1)}^{+}(\tau,\ \varkappa)$$

$$W_{cn}^{-}(t,\ x) = \sup_{u\in U} \inf_{v\in D_2} \sup_{\tau\in[t,\ T]} W_{c(n-1)}^{-}(\tau,\ \varkappa)$$

$$t_0 \leqslant t \leqslant T,\quad x\in X,\quad n=2, 3, \ldots;\quad \varkappa=\varkappa(\tau,\ t,\ x,\ u,\ v)$$

Пусть выполняется условие:

9) для всех $t_0 \leqslant t_1 \leqslant T$, x_1, $x_2 \in X$ существуют управления $u_* = u(t_1, x_1, x_2) \in U$, $v_* = v(t_1, x_1, x_2) \in V$, такие, что выполняется условие (2.1) для всех $t_1 \leqslant t = t_2 \leqslant T$, $u \in D_1$, $v \in D_2$.

Теорема 2. Если для динамической системы Σ выполняются условия 8, 9 и функция H равномерно непрерывна, то игра Γ_* имеет значение и справедливы равенства

$$V_* = \operatorname{val}\Gamma_* = \lim V_{n*}^{+} = \lim V_{n*}^{-} = \lim W_{n*}^{+} = \lim W_{n*}^{+} = \\ = \lim V_{cn*}^{+} = \lim V_{cn*}^{-} = \lim W_{cn*}^{+} = \lim W_{cn*}^{-} \tag{3.1}$$

Здесь и далее звездочка означает, что аргументами данной функции служат t_*, x_*; предел берется при $n\to\infty$.

4. Докажем теоремы 1, 2. Для любого конечного разбиения

$$\Delta = \{t_* = t_0^\Delta < t_1^\Delta < t_2^\Delta < \ldots < t_{n(\Delta)}^\Delta = T\}$$

динамические игры с дискриминацией Γ_*^Δ, $\Gamma_{\Delta*}$ имеют значения [6, 7, 10]

$$V_*^\Delta = \operatorname{val}\Gamma_*^\Delta = \inf_{u_1} \sup_{v_1} \ldots \inf_{v_{n(\Delta)}} \sup_{u_{n(\Delta)}} H(\varkappa) \tag{4.1}$$

$$V_{\Delta*} = \operatorname{val}\Gamma_{\Delta*} = \sup_{u_1} \inf_{v_1} \ldots \sup_{u_{n(\Delta)}} \inf_{v_{n(\Delta)}} H(\varkappa) \tag{4.2}$$

$$u_k \in D_1[t_{k-1}^\Delta,\ t_k^\Delta),\quad v_k \in D_2[t_{k-1}^\Delta,\ t_k^\Delta),\quad k=1,\ 2, \ldots, n(\Delta)$$

$$\varkappa = \varkappa(T,\ t_*,\ x_*;\ u_1,\ \ldots,\ u_{n(\Delta)};\ v_1,\ \ldots,\ v_{n(\Delta)})$$

Пусть величина V_{c*}^Δ определяется формулой (4.1), где

$$u_k \in D_1[t_{k-1}^\Delta,\ t_*^\Delta),\ v_k \in V,\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n(\Delta)$$

а величина $V_{\Delta*}^{c}$ определяется формулой (4.2), где

$$u_k \in U,\quad v_k \in D_2[t_{k-1}^\Delta,\ t_k^\Delta),\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n(\Delta)$$

Эти величины можно рассматривать как значения динамических игр с дискриминацией Γ_{c*}^Δ, $\Gamma_{\Delta*}^{c}$, в которых дискриминированный игрок применяет кусочно-постоянные стратегии [6].

Из условия 7 и равномерной непрерывности функции H следует равенство [1, 6, 10]

$$V_* = \lim V_*^{\omega(n)} = \lim V_{\omega(n)*},\quad n\to\infty \tag{4.3}$$

$$t_k^{\omega(n)} = t_* + k(T - t_*)/2^n,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2^n$$

Аналогично из условий 8, 9 и равномерной непрерывности функции H следует равенство

$$V_* = \lim V_{c*}^{\omega(n)} = \lim V_{\omega(n)}^{c} \tag{4.4}$$

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. $V_*^{\omega(n)} \geqslant V_{2^n*}^+ \geqslant W_{n*}^+ \geqslant W_{2^n*}^- \geqslant V_{2^n*}^- \geqslant V_{\omega(n)*}$, $n = 1, 2, \ldots$

Лемма 2. $V_{c*}^{\omega(n)} \geqslant V_{c2^n*}^+ \geqslant W_{c2^n*}^+ \geqslant W_{c2^n*}^- \geqslant$
$\geqslant V_{c2^n*}^- \geqslant V_{\omega(n)*}^c$, $n = 1, 2, \ldots$

Все последовательности в (2.2), (3.1) монотонные. Следовательно, теорема 1 следует из (4.3) и леммы 1, а теорема 2 вытекает из (4.4) и леммы 2.

Лемма 1. Все неравенства этой леммы, кроме среднего

(4.5) $$W_{m*}^+ \geqslant W_{m*}^-, \quad m = 1, 2, \ldots$$

вытекают из определений рассматриваемых последовательностей. Для доказательства неравенства (4.5) воспользуемся следующим понятием.

Определение. Позиционной общей кусочно-программной стратегией n-го порядка для первого игрока в системе Σ называется матрица

$$a_n = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1^t & \varepsilon_2^t & \ldots & \varepsilon_n^t \\ \varphi_1^t & \varphi_2^t & \ldots & \varphi_n^t \end{Vmatrix}$$

$$\varepsilon_n^t = T - t, \ \varepsilon_k^t \colon X \times D_1 [t, T) \times D_2 [t, T) \to [0, T - t]$$

$$\varphi_k^t \colon X \to D_1 [t, T), \ t \in [t_0, T], \ k = 1, 2, \ldots, n$$

Аналогично определяются позиционные общие кусочно-программные стратегии для второго игрока.

Для каждой позиции $\{t_*, x_*\}$ любая пара позиционных общих кусочно-программных стратегий

$$a = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1^t & \varepsilon_2^t & \ldots & \varepsilon_n^t \\ \varphi_1^t & \varphi_2^t & \ldots & \varphi_n^t \end{Vmatrix}, \qquad b = \begin{Vmatrix} \sigma_1^t & \sigma_2^t & \ldots & \sigma_m^t \\ \psi_1^t & \psi_2^t & \ldots & \psi_m^t \end{Vmatrix}$$

определяет единственную траекторию

$$x(t) = \varkappa(t, t_*, x_*, a, b) = \varkappa(t, t_*, x_*, u(a, b), v(a, b))$$

системы Σ следующим образом. Сначала игроки выбирают управления $u_1 = \varphi_1^{t_*}(x_*)$, $v_1 = \psi_1^{t_*}(x_*)$. Предположим для определенности, что

$$\varepsilon_1^{t_*}(x_*, u_1, v_1) < \sigma_1^{t_*}(x_*, u_1, v_1)$$

Тогда в момент времени $t_1^{(1)} = t_* + \varepsilon_1^{t_*}(x_*, u_1, v_1)$ первый игрок выбирает новое управление

$$u_2 = \varphi_2^{t_1^{(1)}}(x_1^{(1)}) \in D_1 [t_1^{(1)}, T), \ x_1^{(1)} = \varkappa(t_1^{(1)}, t_*, x_*, u_1, v_1)$$

Пусть, например,

$$t_1^{(2)} = t_* + \sigma_1^{t_*}(x_*, u_1', u_2; v_1) < t_1^{(1)} + \varepsilon_2^{t_1^{(1)}}(x_1^{(1)}, u_2, v_1')$$

где u_1' — сужение u_1 на $[t_*, t_1^{(1)})$, а v_1' — сужение v_1 на $[t_1^{(1)}, T)$. Тогда в момент времени $t_1^{(2)}$ второй игрок выбирает управление

$$v_2 = \psi_2^{t_1^{(2)}}(x_1^{(2)}) \in D_2 [t_1^{(2)}, T), \qquad x_1^{(2)} = \varkappa(t_1^{(2)}, t_1^{(1)}, x_1^{(1)}, u_2, v_1')$$

Действуя и далее таким же образом, самое большее через $n + m - 1$ шагов получим единственную пару управлений $u(a, b)$, $v(a, b)$ на $[t_*, T)$.

Для любого числа $\delta > 0$ определим стратегию

$$a(\delta) = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1^t(\delta) \ldots \varepsilon_m^t(\delta) \\ \varphi_1^t(\delta) \ldots \varphi_m^t(\delta) \end{Vmatrix}$$

следующим образом:

(4.6) $\quad \varepsilon_m{}^t(\delta) = T - t$

$$W^-_{m-k+1}(t, x) \leqslant \sup_{\tau\in[t, T]} W^-_{m-k}(\tau, \varkappa(\tau, t, x, \varphi_k{}^t(\delta)(x), v)) + \frac{\delta}{2m}$$

$$\sup_{\tau\in[t, T]} W^-_{m-k}(\tau, \varkappa(\tau, t, x, u, v)) \leqslant$$

$$\leqslant W^-_{m-k}(\varepsilon_k{}^t(\delta)(x, u, v), \varkappa(\varepsilon_k{}^t(\delta)(x, u, v), t, x, u, v)) + \frac{\delta}{2m}$$

$$\forall u \in D_1[t, T), \ v \in D_2[t, T), \ t \in [t_0, T], \ x \in X$$

$$k = 1, 2, \ldots, m-1$$

(4.7) $\quad W_1^-(t, x) \leqslant H(\varkappa(T, t, \varphi_m{}^t(\delta)(x), v) + \dfrac{\delta}{m}, \quad \forall v$

Из (4.6), (4.7) вытекает неравенство

(4.8) $\quad K(a(\delta), b, t_*, x_*) = H(\varkappa(T, t_*, x_*, a(\delta), b)) \geqslant W^-_{m_*} - \delta$

для всех позиционных общих кусочно-программных стратегий второго игрока b.

Аналогично, существует позиционная общая кусочно-программная стратегия второго игрока $b(\delta)$, такая, что

(4.9) $\quad K(a, b(\delta), t_*, x_*) \leqslant W^+_{m_*} + \delta$

для всех позиционных общих кусочно-программных стратегий a. Из (4.8), (4.9) следует неравенство (4.5). Таким же образом доказывается лемма 2.

Замечание. Пара стратегий $a(\varepsilon/3)$, $b(\varepsilon/3)$ образует ситуацию ε-равновесия в динамической игре $\Gamma(t_*, x_*)$ в классе позиционных общих кусочно-программных стратегий, если только m — достаточно большое число и выполняются условия теоремы 1.

5. Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть динамическая система Σ удовлетворяет условию 7 и функция H равномерно непрерывна. Тогда функция $V(t, x)$, такая, что

(5.1) $\quad V(T, x) = H(x)$

удовлетворяющая условию (5.2) или (5.3)

(5.2) $$V(t, x) - \inf_{v\in D_2} \sup_{u\in D_1} \inf_{\tau\in[t, T]} V(\tau, \varkappa) = \sup_{u\in D_1} \inf_{v\in D_2} \sup_{\tau\in[t, T]} V(\tau, \varkappa)$$

(5.3) $$V(t, x) = \inf_{\tau\in[t, T]} \inf_{v\in D_2} \sup_{u\in D_1} V(\tau, \varkappa) = \sup_{\tau\in[t, T]} \sup_{u\in D_1} \inf_{v\in D_2} V(\tau, \varkappa), \quad (\varkappa = \varkappa(\tau, t, x, u, v))$$

для всех $t_0 \leqslant t \leqslant T$, $x \in X$, являются функцией значения динамической игры $\Gamma(t, x)$, $\mathrm{val}\,\Gamma(t, x) = V(t, x)$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$, $x \in X$.

Доказательство. Из условия (5.1) следует неравенство

$$V_1^-(t, x) = W_1^-(t, x) \leqslant V(t, x) \leqslant V_1^+(t, x) = W_1^+(t, x)$$

Тогда из уравнения (5.2) получим

$$W_n^-(t, x) \leqslant V(t, x) \leqslant W_n^+(t, x), \quad n = 2, 3, \ldots$$

или, если выполняется более сильное условие (5.3), то

$$V_n^-(t, x) \leqslant V(t, x) \leqslant V_n^+(t, x), \quad n = 2, 3, \ldots$$

По теореме 1 имеем $V(t, x) = \mathrm{val}\,\Gamma(t, x)$.

Из теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть динамическая система Σ удовлетворяет условиям 8, 9 и функция H равномерно непрерывна. Тогда функция $V(t, x)$, удовлетворяющая условию (5.1) и такая, что для всех $t_0 \leqslant t \leqslant T$, $x \in X$ удовлетворяются условия (5.4) или (5.5)

$$V(t, x) = \inf_{v \in V} \sup_{u \in D_1} \inf_{\tau \in [t, T]} V(\tau, \varkappa) = \sup_{u \in U} \inf_{v \in D_2} \sup_{\tau \in [t, T]} V(\tau, \varkappa) \tag{5.4}$$

$$V(t, x) = \inf_{\tau \in [t, T]} \inf_{v \in V} \sup_{u \in D_1} V(\tau, \varkappa) = \sup_{\tau \in [t, T]} \sup_{u \in U} \inf_{v \in D_2} V(\tau, \varkappa) \tag{5.5}$$

$$(\varkappa = \varkappa(\tau, t, x, u, v))$$

является функцией значения динамической игры $\Gamma(t, x)$.

Заметим, что уравнение (5.3) является обобщением уравнений из работ [8, 9]. Все уравнения (5.2) — (5.5) могут быть использованы для нахождения ε-оптимальных стратегий в динамических играх $\Gamma(t, x)$ в классе позиционных общих кусочно-программных стратегий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М. Наука, 1974. 456с.
2. *Осипов Ю. С.* К теории дифференциальных игр в системах с распределенными параметрами.— Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 6, с. 1314.
3. *Петров Н. Н.* О существовании значения игры преследования.— Докл. АН СССР, 1970, т. 190, № 6, с. 1289.
4. *Петросян Л. А.* Дифференциальные игры преследования. Л.: Изд-во ЛГУ, 1972. 222 с.
5. *Субботин А. И.* Динамическая игра сближения — уклонения.— Докл. АН СССР, 1977, т. 234, № 2, с. 323.
6. *Томский Г. В.* Задачи о сближении—уклонении в квазидинамических системах.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 2, с. 219.
7. *Tomski G. V.* Jeux dynamiques à deux joneurs. Cahiers de math. de la décision, Université de Paris — Dauphine, 1979, No. 7919.
8. *Ченцов А. Г.* Об игровой задаче сближения в заданный момент времени.— Матем. сб., 1976, т. 99, № 3, с. 394.
9. *Чистяков С. В.* К решению игровых задач преследования.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 5, с. 825.
10. *Friedman A.* Differential games. N. Y.: Wiley Interscience, 1971.

Якутск

Поступила в редакцию
23.I.1980