Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 2, 1981

УДК 62.50

О ПОЗИЦИОННОМ УПРАВЛЕНИИ ПРИ ПОСЛЕДЕЙСТВИИ В УПРАВЛЯЮЩИХ СИЛАХ

Осипов Ю. С., Пименов В. Г.

Изучаются задачи позиционного управления для систем, содержащих последействия в управляющих силах. Доказывается существование ситуации равновесия в проблеме сближения — уклонения и указывается способ построения искомых управлений. Статья примыкает к исследованиям [1—5] и продолжает работу [6].

1. Задана управляемая система

$$x^{\cdot}(t) = f_1(t, x(t), u(t), u(t-\tau)) + f_2(t, x(t), v(t)) \tag{1.1}$$
$$x \in R^n, \ u \in P \subset R^{r_1}, \ v \in Q \subset R^{r_2},$$
$$t \in [t_0, \vartheta], \ \tau = \mathrm{const} > 0$$

Здесь x — фазовый вектор, u и v — управления, P, Q — компакты (R^n — n-мерное евклидово пространство), функции $f_1(t, x, u, w)$ и $f_2(t, x, v)$ определены, непрерывны по совокупности переменных и удовлетворяют локальному условию Липшица по x соответственно на $[t_0, \vartheta] \times R^n \times P \times P$ и $[t_0, \vartheta] \times R^n \times Q$, причем в области определения

$$\| f_1(t, x, u, w) + f_2(t, x, v) \| \leqslant \varkappa (1 + \| x \|), \ \varkappa = \mathrm{const}$$

Пусть U_* — некоторое множество функций на отрезке $[-\tau, 0]$ и $M_* \subset R^n$. Рассматриваются две задачи. Первая состоит в построении управления u по принципу обратной связи $u[t] = u(t; x[t], u[t+s], -\tau \leqslant s < 0)$, переводящем вектор x в некоторый момент $t_* \leqslant \vartheta$ на M_*, какова бы при этом ни оказалась допустимая реализация управления v, причем так, чтобы выполнялось условие $u[t_* + s] \in U_*$ (это задача сближения [6]). Вторая задача состоит в построении управления v по принципу обратной связи $v[t] = v(t; x[t]; u[t+s], -\tau \leqslant s < 0)$, гарантирующего уклонение фазового вектора системы (1.1) от встречи с M_*, какова бы при этом ни оказалась допустимая реализация управления u (задача уклонения).

Некоторые варианты сформулированных задач изучались в [6] с позиции теории дифференциальных игр, развитой в [1—3]. В данной работе в отличие от [6] рассмотрена общая ситуация, получены необходимые и достаточные условия разрешимости поставленных задач и указан способ построения оптимальных управлений.

Уточним постановку задач.

Пусть $P(\sigma)$ — совокупность всех измеримых функций $u(\cdot)$ на множестве σ со значениями в P, $Q(\sigma)$ — совокупность всех измеримых функций

$v(\cdot)$ на множестве σ со значениями в Q. Всякую тройку $p = \{t;\ x;\ u(s),\ -\tau \leqslant s < 0\}$, где $t \in [t_0, \vartheta]$, $x \in R^n$, $u(\cdot) \in P([-\tau, 0))$, назовем позицией. Стратегией U (V) назовем правило, ставящее в соответствие позиции $p_* = \{t_*, x_*, u_*(s)\}$ и числу $t^* \in (t_*, \vartheta]$ функцию $u(t)$ из $P([t_*, t^*))$ ($v(t)$ из $Q([t_*, t^*))$.

Пусть заданы позиция $p_0 = \{t_0, x_0, u_0(s)\}$ и разбиение Δ отрезка $[t_0, \vartheta]$ точками $\tau_0 = t_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{N(\Delta)} = \vartheta$, $\delta(\Delta) = \max_i (\tau_{i+1} - \tau_i)$. Определим аппроксимационное движение системы (1.1), отвечающее стратегии U, как пару $\{x[\cdot]_\Delta, u[\cdot]_\Delta\}$, где абсолютно непрерывная функция $x[\cdot]_\Delta = x[t]_\Delta = x[t, p_0, U]_\Delta$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, и управление $u[\cdot]_\Delta \in P([t_0 - \tau, \vartheta])$ удовлетворяют условиям

$$x[t_0]_\Delta = x_0,\ u[t_0 + s]_\Delta = u_0(s),\ -\tau \leqslant s < 0 \tag{1.2}$$

кроме того при почти всех $t \in [t_0, \vartheta]$ выполняется равенство

$$x^{\boldsymbol{\cdot}}[t]_\Delta = f_1(t,\ x[t]_\Delta,\ u[t]_\Delta,\ u[t-\tau]_\Delta) + f_2(t,\ x[t]_\Delta,\ v[t]) \tag{1.3}$$

и при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ $u[t]_\Delta$ — функция из $P([\tau_i, \tau_{i+1}))$, назначенная стратегией U по позиции $\{\tau_i, x[\tau_i]_\Delta, u_{\tau_i}[s]_\Delta\}$ и числу τ_{i+1}. Здесь и в дальнейшем $u_t(s) = u(t+s)$, $-\tau \leqslant s < 0$. В (1.3) $v[t] \in Q([t_0, \vartheta])$ — какая-то реализация управления v.

Аппроксимационным движением системы (1.1), отвечающим стратегии V, назовем пару $\{x[\cdot]_\Delta, u[\cdot]\}$, где абсолютно-непрерывная функция $x[\cdot]_\Delta = x[t]_\Delta = x[t, p_0, V]_\Delta$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, удовлетворяет условию (1.2) и при почти всех $t \in [t_0, \vartheta]$ уравнениям

$$x^{\boldsymbol{\cdot}}[t]_\Delta = f_1(t,\ x[t]_\Delta,\ u[t],\ u[t-\tau]) + f_2(t,\ x[t]_\Delta,\ v[t]_\Delta)$$

где при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ $v[t]_\Delta$ — функция из $Q([\tau_i, \tau_{i+1}))$, назначаемая стратегией V по позиции $\{\tau_i,\ x[\tau_i]_\Delta,\ u_{\tau_i}[s]\}$ и числу τ_{i+1}, а функция $u[\cdot] = u[t] \in P([t_0 - \tau, \vartheta])$ — какая-то реализация управления u, удовлетворяющая условию $u[t_0 + s] = u_0(s)$, $-\tau \leqslant s < 0$.

Пусть $[A]$ — замыкание $A \subset R^n$ и A^ε — открытая ε-окрестность A. Пусть в пространстве позиций задано некоторое множество M. Обозначим через M_t сечение M по t (т. е. множество пар $\{x, u(s)\}$, таких, что $\{t, x, u(s)\} \in M$, через $M_{t, u(s)}$ — сечения по t и $u(s)$. Через $[M]$ и M^ε будем обозначать совокупность позиций $\{t, x, u(s)\}$, таких, что $x \in [M_{t, u(s)}]$ и $x \in M^\varepsilon_{t, u(s)}$ соответственно.

Задача 1 (*сближения*). Заданы система (1.1), позиция p_0 и множество M. Требуется построить стратегию U° со свойством: для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_0 > 0$, такое, что для всякого движения $\{x[t]_\Delta, u^\circ[\cdot]_\Delta\} = \{x[t, p_0, U]^\circ_\Delta, u^\circ[\cdot]_\Delta\}$ с $\delta(\Delta) \leqslant \delta_0$ в некоторый момент $\eta \in [t_0, \vartheta]$ выполняется условие

$$x[\eta]_\Delta \in M^\varepsilon_{\eta,\ u^\circ_\eta[s]_\Delta}$$

Задача 2 (*уклонения*). Заданы система (1.1), позиция p_0 и множество M. Требуется построить стратегию V° со свойством: существуют числа $\varepsilon > 0$ и $\delta_0 > 0$, такие, что для всякого движения $\{x[\cdot]_\Delta, u[\cdot]\} =$

$= \{x\,[t,\ p_0,\ V^\circ]_\Delta,\ u\,[\cdot]\}$ с $\delta\,(\Delta) \leqslant \delta_0$ выполняется условие

$$x\,[\eta]_\Delta \notin M^\varepsilon_{\eta,\,u_\eta[s]}$$

для любого момента $\eta \in [t_0,\ \vartheta]$.

2. Укажем условия разрешимости поставленных задач. Пусть в пространстве позиций задано некоторое множество W. Будем говорить, что множество W $(\gamma,\ u)$-стабильно относительно M, если, каковы бы ни были $p_* = \{t_*,\ x_*,\ u_*\,(s)\} \in W$, $t^* \in (t_*,\ \vartheta]$, $v\,(\cdot) \in Q\,([t_*,\ t^*))$ и $\gamma > 0$, найдется такая функция $u\,(\cdot) \in P\,([t_*,\ t^*))$, что

$$x\,(t^*,\ p_*,\ u\,(\cdot),\ v\,(\cdot)) \in W^\gamma_{t^*,\,u_{t^*}(s)} \tag{2.1}$$

или существует момент $\eta \in [t_*,\ t^*]$, такой, что

$$x\,(\eta,\ p_*,\ u\,(\cdot),\ v\,(\cdot)) \in M^\gamma_{\eta,\,u_\eta(s)} \tag{2.2}$$

$$u_\eta(s) = \begin{cases} u\,(\eta + s), & s \in [t_* - \eta,\ 0) \\ u_*(\eta + s - t_*), & s \in [-\tau,\ t_* - \eta) \end{cases}$$

Здесь $x\,(t,\ p_*,\ u\,(\cdot),\ v\,(\cdot))$ — решение (1.1) при выбранных функциях $u\,(\cdot)$ и $v\,(\cdot)$ из позиции p_* (т. е. $x\,(t_*,\ p_*,\ u\,(\cdot),\ v\,(\cdot)) = x_*$ и $u\,(t_* + s) = u_*\,(s)$, $-\tau \leqslant s < 0$).

Будем говорить, что множество W $(\gamma,\ v)$-стабильно, если, каковы бы ни были $p_* \in W$, $t^* \in (t_*,\ \vartheta]$, $u\,(\cdot) \in P\,([t_*,\ t^*))$ и число $\gamma > 0$, найдется такая функция $v\,(\cdot) \in Q\,([t_*,\ t^*))$, что выполняется условие (2.1).

Пусть W — $(\gamma,\ u)$-стабильное относительно M множество, сечения которого $W_{t,\,u(s)}$ замкнуты в R^n, т. е. $W = [W]$. Назовем экстремальной к этому множеству стратегию U°, ставящую позиции $p_* = \{t_*,\ x_*,\ u_*\,(s)\}$ и числу $t^* \in (t_*,\ \vartheta]$ в соответствие функцию $u^\circ\,(t) \in P\,([t_*,\ t^*))$ по правилу:

1°. Пусть $W_{t_*,\,u_*(s)} = \varnothing$. Тогда $u^\circ\,(t)$ — любая функция из $P\,([t_*,\ t^*))$.

2°. Пусть $W_{t_*,\,u_*(s)} \neq \varnothing$ и y — вектор из $W_{t_*,\,u_*(s)}$, ближайший к x_* в метрике R^n. Выберем вектор $v^* \in Q$ из условия

$$(y - x_*)\,f_2\,(t_*,\ x_*,\ v^*) = \min_{v \in Q}\,\{(y - x_*)\,f_2\,(t_*,\ x_*,\ v)\} \tag{2.3}$$

Тогда находим функцию $u^\circ\,(t) \in P\,([t_*,\ t^*))$ из условия $(\gamma,\ u)$-стабильности множества W по величинам $p_{**} = \{t_*,\ y,\ u_*\,(s)\} \in W$, t^*, функции $v^*\,(t) \equiv v^*$, $t_* \leqslant t < t^*$ и числу $\gamma \leqslant (t^* - t_*)^2$.

Пусть $W = [W]$. Назовем экстремальной к W стратегию V°, ставящую позиции $p_* = \{t_*,\ x_*,\ u_*\,(s)\}$ и числу $t^* \in (t\ ,\ \vartheta]$ в соответствие функцию $v^\circ\,(t) \in Q\,([t_*,\ t^*))$ по правилу:

1°. Пусть $W_{t_*,\,u_*(s)} = \varnothing$. Тогда $v^\circ\,(t)$ — любая функция из $Q\,([t_*,\ t^*))$.

2°. Пусть $W_{t_*,\,u_*(s)} \neq \varnothing$ и вектор $y \in W_{t_*,\,u_*(s)}$ — ближайший к x_* в R^n. Пусть вектор $v^\circ \in Q$ удовлетворяет условию

$$(y - x_*)\,f_2\,(t_*,\ x_*,\ v^\circ) = \max_{v \in Q}\,\{(y - x_*) f_2\,(t_*,\ x_*,\ v)\}$$

Тогда $v^\circ\,(t) \equiv v^\circ$, $t \in [t_*,\ t^*)$.

На пространстве позиций $p_* = \{t_*, x_*, u_*(s)\}$ введем функцию

$$
r(p_*, W) = \begin{cases} \inf\limits_{y \in W_{t_*, u_*(s)}} \{\| x_* - y \|\}, & W_{t_*, u_*(s)} \neq \varnothing \\ +\infty, & W_{t_*, u_*(s)} = \varnothing \end{cases} \tag{2.4}
$$

Лемма 2.1. Пусть множество W (γ, u)-стабильно относительно M и $W = [W]$. Тогда, если $p_0 \in W$, то стратегия U°, экстремальная к W, обеспечивает условие: для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_0 > 0$, такое, что для всякого движения $\{x[\cdot]_\Delta, u^\circ[\cdot]_\Delta\} = \{x[t, p_0, U^\circ]_\Delta, u^\circ[\cdot]_\Delta\}$ с $\delta(\Delta) \leqslant \delta_0$ выполняется условие

$$
r[\tau_i] = r(p_i, W) = r(\{\tau_i, x[\tau_i]_\Delta, u^\circ_{\tau_i}[s]_\Delta\}, W) \leqslant \varepsilon \tag{2.5}
$$

для всех $\tau_i \leqslant \tau_{i_1}$, где τ_{i_1} — либо момент τ_i, где впервые функция $u^\circ[t] \in P([\tau_i, \tau_{i+1}))$ назначена стратегией U° из условия (2.2), либо, если такого момента не существует, $\tau_{i_1} = \vartheta$.

Поясним кратко доказательство леммы.

Пусть $X(t_0, x_0)$ — множество решений системы (1.1), отвечающих всевозможным функциям $u(\cdot) \in P([t_0 - \tau, \vartheta])$, $v(\cdot) \in Q([t_0, \vartheta])$ с начальными условиями $x(t_0) = x_0$. Пусть число $\lambda_1 = \lambda_1(t_0, x_0)$ таково, что $\| x(t) \| \leqslant \lambda_1$, $t \in [t_0, \vartheta]$, $x(\cdot) \in X(t_0, x_0)$, а $\lambda_0 > 0$ — некоторое число. Обозначим

$$
X(t_0, x_0, \lambda_0) = \bigcup_{t_* \in [t_0, \vartheta],\ \| x_* \| \leqslant \lambda_1(t_0, x_0) + \lambda_0} X(t_*, x_*)
$$

Тогда все функции $x(\cdot) \in X(t_0, x_0, \lambda_0)$ равномерно ограничены некоторой постоянной $\lambda = \lambda(t_0, x_0, \lambda_0)$.

Покажем, что если для движения $\{x[\cdot]_\Delta, u^\circ[\cdot]_\Delta\}$ и момента $\tau_i < \tau_{i_1}$ выполняется условие

$$
r[\tau_i] \leqslant \lambda_0 = \varepsilon \tag{2.6}
$$

то справедлива оценка

$$
r^2[\tau_{i+1}] \leqslant r^2[\tau_i](1 + C(\tau_{i+1} - \tau_i)) + (\tau_{i+1} - \tau_i)\,\varphi(\tau_{i+1} - \tau_i) \quad C = \text{const} \tag{2.7}
$$

Здесь $\varphi(\delta)$ — непрерывная функция, $\varphi(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$, причем оценка (2.7) равномерна по всем движениям $\{x[\cdot]_\Delta, u^\circ[\cdot]_\Delta\} = \{x[t, p_0, U^\circ]_\Delta, u^\circ[\cdot]_\Delta\}$ и моментам τ_i со свойством (2.6), т. е. C и $\varphi(\delta)$ зависят лишь от t_0, x_0 и λ_0.

Действительно, в силу выбора функции $u^\circ[\cdot] \in P([\tau_i, \tau_{i+1}))$

$$
r^2[\tau_{i+1}] \leqslant (\| x[\tau_{i+1}]_\Delta - z(\tau_{i+1}) \| + \gamma)^2
$$

где $z(t)$ — решение системы (1.1) из начальной позиции $p_{*i} = \{\tau_i, y, u_{\tau_i}{}^\circ[s]_\Delta\} \in W$ при $v(t) \equiv v^*$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ (v^* удовлетворяет (2.3), $y \in W_{\tau_i, u_{\tau_i}{}^\circ[s]_\Delta}$ — ближайший к $x[\tau_i]_\Delta$) и $u[t] \equiv u^\circ[t]_\Delta$. Так как $\gamma \leqslant (\tau_{i+1} - \tau_i)^2$, то в силу (2.6) получаем

$$
r^2[\tau_{i+1}] \leqslant \| x[\tau_{i+1}]_\Delta - z(\tau_{i+1}) \|^2 + 2\lambda(\tau_{i+1} - \tau_i)^2 + (\tau_{i+1} - \tau_i)^4
$$

Отсюда в силу предположений о правой части системы (1.1) получаем

$$
r^2[\tau_{i+1}] \leqslant \| x[\tau_i]_\Delta - y + \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f_1(t, x[t]_\Delta, u^\circ[t]_\Delta, u^\circ[t - \tau]_\Delta)\,dt +
$$

$$
+ \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f_2(t, x[t]_\Delta, v[t])\,dt - \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f_1(t, z(t), u^\circ[t]_\Delta, u^\circ[t - \tau]_\Delta)\,dt -
$$

$$- \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f_2(t, z(t), v^*)\,dt \,\|^2 + (2\lambda + (\tau_{i+1} - \tau_i)^2)(\tau_{i+1} - \tau_i)^2 \leqslant$$

$$\leqslant r^2[\tau_i] + 2\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (y - x[\tau_i]_\Delta)(f_2(t, x[\tau_i]_\Delta, v^*) -$$

$$- f_2(t, x[\tau_i]_\Delta, v[t]))\,dt + Cr^2[\tau_i] + (\tau_{i+1} - \tau_i)\,\varphi(\tau_{i+1} - \tau_i)$$

В силу выбора вектора v^* получаем оценку (2.7).

Предположим теперь, что лемма неверна. Это означает, что найдется $\varepsilon > 0$, такое, что для любого $\delta_0 > 0$, в частности для δ_0, такого, что при $\delta < \delta_0$ выполняется оценка

$$(1 + \vartheta - t_0)\exp[c(\vartheta - t_0)]\,\varphi(\delta) \leqslant \varepsilon^2 \tag{2.8}$$

найдутся движение $\{x[\cdot]_\Delta, u^\circ[\cdot]_\Delta\} = \{x[t, p_0, U^\circ]_\Delta, u^\circ[\cdot]_\Delta\}$ с $\delta(\Delta) \leqslant \delta_0$ и момент $\tau_i \leqslant \tau_{i_1}$, такие, что (2.5) не выполняется.

Пусть τ_{i_2} — наименьший из моментов разбиения τ_i, когда условие (2.5) не выполняется. Но тогда для моментов τ_i таких, что $\tau_0 \leqslant \tau_i < \tau_{i_2} < \tau_{i_1}$, выполняется (2.6), что влечет оценку (2.7). Если равномерная оценка (2.7) выполняется для всех $\tau_0 \leqslant \tau_i < \tau_{i_2}$, то для всех моментов τ_i, таких, что $\tau_0 \leqslant \tau_i \leqslant \tau_{i_2}$, выполняется оценка

$$r^2[\tau_i] \leqslant (r^2[\tau_0] + (1 + \tau_i - t_0)\,\varphi(\delta)\exp[C(\tau_i - t_0)]$$

что проверяется от противного. Отсюда в силу условия $r[\tau_0] = 0$ и (2.8) следует $r[\tau_{i_2}] \leqslant \varepsilon$, что противоречит определению τ_{i_2}.

Теорема 2.1. Пусть множество $W(\gamma, u)$-стабильно относительно M, $W = [W]$ и $W_\vartheta \subseteq [M_\vartheta]$. Тогда, если $p_0 \in W$, то экстремальная к W стратегия U° разрешает задачу сближения с M.

Теорема 2.2. Пусть множество $W(\gamma, v)$-стабильно, $W = [W]$ и существует такое $\varepsilon > 0$, что $M^\varepsilon \cap W = \varnothing$. Тогда, если $p_0 \in W$, то экстремальная к W стратегия V° разрешает задачу уклонения от M.

Теорема 2.3. Для любой позиции p_0 и множества M, либо разрешима задача уклонения от M, либо для любого $\varepsilon > 0$ разрешима задача сближения с M^ε.

Доказательства теорем 2.1—2.3 опираются на лемму 2.1 и аналогичны соответствующим рассуждениям из [1, 3].

Замечание. Для систем без запаздывания в управлении справедлив следующий результат: если для начальной позиции задача сближения с целевым множеством разрешима, то в пространстве позиций существует стабильное множество, содержащее начальную позицию и обрывающееся на целевом множестве, поэтому разрешающая задачу сближения стратегия может быть построена в виде экстремальной к стабильному множеству [1, 3]. В системах с последействием в управлении это утверждение, вообще говоря, неверно, как показывает следующий пример.

Рассмотрим двумерную $x = (x_1, x_2)$ систему

$$x_1^{\cdot} = \begin{cases} 1 + (t - x_2(t))\,v(t), & t \in [-1, 0) \\ 1 - x_2(t)\,v(t), & t \in [0, 1] \end{cases}$$

$$x_2^{\cdot} = u(t - \tau)$$

$$t_0 = -1, \vartheta = 1, \tau = 1, |u| = 1, |v| = 1$$

Пусть целевое множество M состоит из позиций $p = \{t, x_1, x_2, u(s)\}$, где $t = \vartheta = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $u(s)$ — любая функция из $P([-\tau, 0))$.

Обозначим через W множество позиций, из которых разрешима задача сближения с M. Множество $W_{-1} \neq \varnothing$, так как из позиции $p_0 = \{t_0, x_1^\circ, x_2^\circ, u_{t_0}(s)\}$, где $t_0 = -1$, $x_1^\circ = -1$, $x_2^\circ = -1$, $u_{t_0}(s) \equiv 1$, $s \in [-\tau, 0)$, разрешима задача сближения. Однако $W_0 = \varnothing$ и поэтому множество W не может быть стабильным.

3. Покажем, что для дифференциальной игры сближения — уклонения, складывающейся из задач 1 и 2, справедливо основное утверждение теории дифференциальных игр — теорема об альтернативе [1].

Пусть в пространстве позиций задана последовательность множеств $\{W^{(j)},\ j = 1,\ 2,\ \ldots\}$ со свойствами:

1) $W^{(j+1)} \subset W^{(j)}$, 2) $W^{(j)} = [W^{(j)}]$, 3) множество $W^{(j)}$ $(\gamma,\ u)$-стабильно относительно M^{ε_j}, 4) $W_\vartheta^{(j)} \subset M_\vartheta^{\varepsilon_j}$, $\varepsilon_j = 1 / j$.

Пусть заданы также t_0, x_0 и число $\lambda_0 > 0$. На множестве позиций $p_* = \{t_*,\ x_*,\ u_*\ (s)\}$ введем функцию $\varkappa\ (p_*) = \varkappa\ (p_*,\ \{W^{(j)}\},\ t_0,\ x_0,\ \lambda_0)$:

$$\varkappa\ (p_*) = \inf_j \{1 / j \mid 1 / j > r^2\ (p_*,\ W^{(j)})\ (1 + \vartheta - t_*) \exp \times \\ \times [C\ (\vartheta - t_*)]\}$$

где функция $r\ (p_*,\ W)$ определяется (2.4), а $C = C\ (t_0,\ x_0,\ \lambda_0)$ — постоянная в оценке (2.7). Если множество

$$\{1 / j \mid 1 / j > r^2\ (p_*,\ W^{(j)})\ (1 + \vartheta - t_*) \exp [C\ (\vartheta - t_*)]\}$$

пусто, то полагаем $\varkappa\ (p_*) = + \infty$.

Назовем [4, 5] экстремальной к последовательности множеств $\{W^{(j)}\}$ со свойствами 1) — 3) стратегию $U^{\circ\circ}$, ставящую позиции p_* и числу $t^* \in (t_*,\ \vartheta]$ в соответствие функцию $u^{\circ\circ}\ (t) \in P\ ([t_*,\ t^*))$ по правилу:

1°. Пусть $\varkappa\ (p_*) = + \infty$. Тогда $u^{\circ\circ}\ (t)$ — любая функция из $P\ ([t_*,\ t^*))$.

2°. Пусть $\varkappa\ (p_*) < + \infty$. Находим номер $j_0 = j_0\ (p_*)$ из условий: если $\varkappa\ (p_*) = 0$, то $1 / j_0 < t^* - t_*$; если $0 < \varkappa\ (p_*) < + \infty$, то $1 / j_0 = \varkappa\ (p_*)$. В качестве $u^{\circ\circ}\ (\cdot)$ возьмем функцию $u^\circ\ (t) \in P\ ([t_*,\ t^*))$, назначаемую стратегией U°, экстремальной к $(\gamma,\ u)$-стабильному множеству $W^{(j_0)}$.

Справедливы утверждения.

Лемма 3.1. Пусть заданы последовательность множеств $\{W^{(j)}\}$ со свойствами 1) — 3), позиция $p_0 = \{t_0,\ x_0,\ u_0\ (s)\} \in \bigcap_j W^{(j)}$ и $\lambda_0 \leqslant 1/4$. Тогда для любого β, $0 < \beta < \lambda_0$ найдется $\delta_0 > 0$, такое, что для всякого движения $\{x\ [\cdot]_\Delta,\ u^{\circ\circ}[\cdot]_\Delta\} = \{x\ [t,\ p_0,\ U^{\circ\circ}]_\Delta,\ u^{\circ\circ}\ [t]_\Delta\}$ с $\delta\ (\Delta) \leqslant \delta_0$ выполняется условие

$$\varkappa\ [\tau_i] = \varkappa\ (p_i) = \varkappa\ (\{\tau_i,\ x\ [\tau_i]_\Delta,\ u_{\tau_i}{}^{\circ\circ}\ [s]_\Delta\}) < \beta \text{ для всех } \tau_i < \tau_{i_1},$$

где τ_{i_1} — либо момент τ_i, где впервые функция $u^{\circ\circ}\ [t] \in P\ ([\tau_i,\ \tau_{i+1}))$, выбранная как функция $u^\circ\ [t]$, назначена из условия (2.2), либо, если такого момента не существует, $\tau_{i_1} = \vartheta$.

Лемма 3.2. Пусть в условиях леммы 3.1 последовательность множеств $\{W^{(j)}\}$ обладает также свойством 4). Тогда стратегия $U^{\circ\circ}$ разрешает для позиции p_0 задачу сближения с M.

Из теоремы 2.3 и леммы 3.2 вытекает

Теорема 3.1. (*альтернатива*). Для любой позиции p_0 и любого множества M либо разрешима задача сближения с M, либо разрешима задача уклонения от M.

Действительно, пусть из позиции p_0 неразрешима задача уклонения от M. Тогда по теореме 2.3 для любого $\varepsilon/3 > 0$ разрешима задача сближения с $M^{\varepsilon/3}$. Это означает, что найдется стратегия U, такая, что по числу $\varepsilon/3$ найдется число $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon/3, U) > 0$, такое, что для всякого движения $\{x[t]_\Delta, u[t]_\Delta\} = \{x[t, p_0, U]_\Delta, u[t]_\Delta\}$ с $\delta(\Delta) \leqslant \delta_0$ существует $\eta \in [t_0, \vartheta]$, такое, что

$$x[\eta]_\Delta \in M^{2\varepsilon/3}_{\eta, u_\eta[s]_\Delta}$$

Вдоль таких движений составим множество $W(\varepsilon, U)$ позиций $\{t, x, u(s)\}$, $t \in [t_0, \eta]$, $x = x[t]_\Delta$, $u(s) = u_t[s]_\Delta$. Множество $W(\varepsilon, U)$ (γ, u)-стабильно относительно $M^{2\varepsilon/3}$ и $W(\varepsilon, U)_\vartheta \subset M^{2\varepsilon/3}_\vartheta$. Но тогда и множество $W(\varepsilon) = \bigcup W(\varepsilon, U)$, где объединение берется по всем стратегиям U, разрешающим для p_0 задачу сближения с $M^{\varepsilon/3}$, является (γ, u)-стабильным относительно $M^{2\varepsilon/3}$ и $W(\varepsilon)_\vartheta \subset M^{2\varepsilon/3}_\vartheta$.

Возьмем последовательность $\varepsilon_j = 1/j$, $j = 1, 2, \ldots$; тогда соответствующая последовательность множеств $\{W^{(j)} = [W(\varepsilon_j)], j = 1, 2, \ldots\}$ обладает свойствами 1) — 4) и $p_0 \in \bigcap_j W^{(j)}$. Следовательно, по лемме 3.2 разрешима задача сближения с M.

Заметим, что множество $\bigcap_j W^{(j)}$, вообще говоря, не является (γ, u)-стабильным (см. пример).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
2. *Красовский Н. Н., Осипов Ю. С.* Линейные дифференциально-разностные игры.— Докл. АН СССР, 1971, т. 197, № 4.
3. *Осипов Ю. С.* Дифференциальные игры систем с последействием.— Докл. АН СССР, 1971, т. 196, № 4.
4. *Осипов Ю. С., Кряжимский А. В., Охезин С. П.* Задачи управления в системах с распределенными параметрами.— В кн.: Динамика управляемых систем. Новосибирск: Наука, 1979.
5. *Кряжимский А. В.* К теории позиционных дифференциальных игр сближения — уклонения.— Докл. АН СССР, 1978, т. 239, № 4.
6. *Осипов Ю. С., Пименов В. Г.* К теории дифференциальных игр в системах с последействием.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 6.

Свердловск

Поступила в редакцию
26.IX.1979