Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 2, 1981

УДК 62—50

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМОЙ С ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Ащепков Л. Т.

Приводятся необходимые условия оптимальности в общей задаче управления с промежуточными ограничениями на траекторию. Показано, что многие известные результаты (см., например, [1—11]) представляют собой ту или иную реализацию общего правила множителей Лагранжа. Для двух важных случаев общей задачи (составной и разрывной) приводятся усиленные, по сравнению с имеющимися, формулировки необходимых условий оптимальности. Существенность некоторых условий подтверждается примером.

1. Постановка задачи. Пусть даны: интервал I числовой оси $R = (-\infty, \infty)$, множества U, W конечно-мерных вещественных пространств R^r, R^l и подмножество T куба $I^{m+1} \subset R^{m+1}$. Для функции $x\colon I \to R^n$ и точки $\theta = (\theta_0, \ldots, \theta_m)$ из T положим $x(\theta) = (x(\theta_0), \ldots, x(\theta_m))$. Рассмотрим задачу управления (задачу А)

$$\Phi_0(x(\theta), \omega, \theta) \to \min$$
$$\Phi_j(x(\theta), w, \theta) \leqslant 0, \ j = 1, 2, \ldots, p$$
$$\Phi_j(x(\theta), w, \theta) = 0, \ j = p+1, \ldots, q$$
$$x^{\cdot} = f(x, u, w, t); \ x \in R^n, \ u \in U, \ w \in W, \ \theta \in T$$

в которой ищется минимум функционала Φ_0 по управлениям $u(\cdot)$ и параметрам w, θ при ограничениях типа неравенства, равенства и включения.

Сделаем следующие предположения. Скалярные функции $\Phi_j(x^0, \ldots, x^m, w, \theta)$ дифференцируемы по аргументам на открытом множестве, содержащем декартово произведение $R^{n(m+1)} \times W \times T$; отображение f из $R^n \times U \times W \times R$ в R^n непрерывно и при фиксированных u, t имеет непрерывные частные производные f_x, f_w в окрестности $R^n \times W$; множество U ограничено; $q - p < (m+1)(n+1) + l$.

Кусочно-непрерывную функцию $u: R \to U$ назовем управлением, а четверку $x(\cdot)$, $u(\cdot)$, w, θ из управления $u(\cdot)$, параметров w, θ и соответствующего непрерывного кусочно-гладкого решения $x(\cdot)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющего ограничениям задачи, — допустимым процессом. Допустимый процесс $x(\cdot)$, $u(\cdot)$, w, θ считаем оптимальным, если найдется такое число $\delta > 0$, что для любого допустимого процесса $x^*(\cdot)$, $u^*(\cdot)$, w^*, θ^*, отвечающего условиям $|x^*(t) - x(t)| < \delta$, $t \in Q$, $|w^* - w| < \delta$, $|\theta^* - \theta| < \delta$, выполняется неравенство $\Phi_0(x(\theta), w, \theta) \leqslant \Phi(x^*(\theta^*), w^*, \theta^*)$. Здесь $|z|$ — евклидова норма вектора z, Q — наименьший отрезок, содержащий координаты векторов θ, θ^*.

К указанному виду приводятся достаточно общие задачи [1—11] без фазовых или смешанных ограничений. Два частных случая задачи А для составной и разрывной систем управления рассмотрены ниже в пп. 4,5.

2. Необходимые условия оптимальности. *Теорема* 1. Пусть $x(\cdot)$, $u(\cdot)$, w, θ — допустимый на интервале (t_0, t_1) процесс, у которого координаты вектора θ упорядочены по возрастанию и есть точки непрерывности управления. Для оптимальности процесса необходимо существование вектора $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_q)$ и кусочно-непрерывного на $[\theta_0, \theta_m]$ решения $\psi(t)$ сопряженного уравнения

$$\psi^{\cdot} = -H_x(\psi, x(t), u(t), w, t),\ t \neq \theta_m, \theta_{m-1}, \ldots, \theta_0$$

$$\psi(\theta_k-) = \psi(\theta_k+) - L_{x^k}(\lambda, x(\theta), w, \theta),\ k = m, m-2, \ldots, 1$$

таких, что справедливы условия:

1) нетривиальности, знакоопределенности и дополняющей нежесткости для вектора λ

$$|\lambda| > 0;\ \lambda_j \geqslant 0,\ j = 0, 1, \ldots, p$$

$$\lambda_j\Phi_j(x(\theta), w, \theta) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, p$$

2) трансверсальности для концов траектории

$$\psi(\theta_m) = -L_{x^m}(\lambda, x(\theta), w, \theta),\ \psi(\theta_0) = L_{x^0}(\lambda, x(\theta), w, \theta)$$

3) максимума гамильтониана для управления

$$H(\psi(t), x(t), u(t), w, t) = \max_{v\in U} H(\psi(t), x(t), v, w, t),\ \theta_0 \leqslant$$
$$\leqslant t \leqslant \theta_m$$

4) оптимальности параметра w

$$\left[L_w(\lambda, x(\theta), w, \theta) - \int_{\theta_0}^{\theta_m} H_w(\psi(t), x(t), u(t), w, t)\,dt\right]' \delta w \geqslant 0,\ \delta w \in K(w, W)$$

5) оптимальности параметра θ

$$L_\theta(\lambda, x(\theta), w, \theta)'\,\delta\theta \geqslant 0,\ \delta\theta \in K(\theta, T)$$

Здесь

$$H(\psi, x, u, w, t) = \psi' f(x, u, w, t)$$

$$L(\lambda, x^0, \ldots, x^m, w, \theta) = \sum_{j=0}^{q} \lambda_j \Phi_j(x^0, \ldots, x^m, w, \theta)$$

$K(w, W)$ — коническая аппроксимация множества W в точке w, которая по определению обладает следующим свойством: для любого конечного набора векторов $\delta w^1, \ldots, \delta w^s$ из $K(w, W)$ и произвольного $\varepsilon > 0$ найдется функция $o: R^s \to R^l$, такая, что

$$w + \sum_{i=1}^{s} \xi_i \delta w^i + o(\xi) \in W,\quad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_s) \geqslant 0,\ |\xi| < \varepsilon$$

$$|o(\xi)|/|\xi| \to 0,\ |\xi| \to 0$$

Коническая аппроксимация $K(\theta, T)$ определяется аналогично. Участвующие в операциях векторы считаются столбцевыми, штрих означает транспонирование. Символ $x'y$ в силу принятого соглашения есть скалярное произведение векторов x, y. Производная L_θ в условии 5) берется в силу системы дифференциальных уравнений по формуле

$$L_\theta(\lambda, x, (\theta), w, \theta) = (L_{x^0}(\lambda, x(\theta), w, \theta)' f|_{\theta_0} + L_{\theta_0}(\lambda, x(\theta), w, \theta), \ldots, L_{x^m}(\lambda, x(\theta), w, \theta)' f|_{\theta_m} + L_{\theta_m}(\lambda, x(\theta), w, \theta))$$

Замечания. 1°. Для внутренних точек $\theta \in T$, координаты которых — точки разрыва управлений, вместо 5) имеют место условия

$$\pm [L_{x^k}(\lambda, x(\theta), w, \theta)' f|_{\theta_k \pm} + L_{\theta_k}(\lambda, x, (\theta), w, \theta)] \geqslant 0, \ k = 0,1, \ldots, m$$

где $f|_{\theta_k -}$, $f|_{\theta_k +}$ — односторонние пределы функции $t \to f(x(t), u(t), w, t)$ в точке $t = \theta_k$.

2°. Если среди координат θ есть равные, например $\theta_{i-1} < \theta_i = \theta_{i+1} = \ldots = \theta_j < \theta_{j+1}$, то из условия скачка для сопряженной функции следует

$$\psi(\theta_i -) = \psi(\theta_j +) - \sum_{k=i}^{j} L_{x^k}(\lambda, x(\theta), w, \theta)$$

Доказательство теоремы 1 состоит в построении конусов вариаций оптимальной траектории с последующим применением теоремы об отделимости выпуклых множеств [12], либо в редукции задачи А к специальной конечно-мерной задаче математического программирования, в которой роль неизвестных играют параметры вариации оптимального процесса [13]. Второй способ, хотя и требует доказательства независимости множителей Лагранжа от параметров вариации, представляется более коротким.

3. Обсуждение результатов. Сравним постановку задачи А и полученные необходимые условия с известными в литературе.

Случай, когда данные задачи А не зависят от параметров, промежуточные условия отсутствуют и множество $T \subset R^2$ описывается неравенством $\theta_0 < \theta_1$, разбирался многократно (см., например, [11, 13]). Соответствующие утверждения теоремы 1 совпадают с известными, при этом условие 4) тривиально, а из 5) следует $L_\theta = 0$ в силу открытости множества T.

В работе [6] предложен вариант вариационной задачи с временными разрывами — процесс управления рассматривается на нескольких попарно непересекающихся или примыкающих один к другому отрезках $\theta_{2k} \leqslant t \leqslant \theta_{2k+1}$, $k = 0,1, \ldots, h$. Значения траектории в концах отрезков связываются совместными ограничениями типа равенства. Данный вариант сводится к задаче А, если положить $m = 2h + 2$ и задать множество T неравенствами $\theta_0 \leqslant \theta_1 \leqslant \ldots \leqslant \theta_m$. Оптимальные значения параметра θ в работе [6] предложено находить из уравнения $L_\theta = 0$. Согласно условию 5), последнее верно для внутренних точек множества T. Для граничных точек это условие в общем случае места не имеет.

Задачи управления ступенчатыми системами [2, 5], с разрывными ограничениями на управление [4] или с разделенными разрывами фазовых траекторий [8] соответствуют частным случаям задачи А, соответствующие результаты вытекают из теоремы 1.

В книге [7] для задачи А получено условие стационарности гамильтониана вдоль оптимального процесса в предположениях открытости множества T и управляемости системы. Как видно из формулировки теоремы 1, верно более сильное условие 3), причем без указанных выше дополнительных предположений.

4. Составные системы. Следуя [2], составной назовем систему управления, описываемую на разных интервалах времени разными дифференциальными уравнениями и некоторыми конечными связями для стыка траекторий. Разберем подробнее одну из задач управления составной системой (задачу Б)

$$\Phi_0 (x^1 (\theta_{01}),\ldots, x^N (\theta_{0N});\ x^1(\theta_{11}),\ldots, x^N (\theta_{1N});\ w^1,\ldots, w^N;$$
$$\theta_{01},\ldots, \theta_{0N};\ \theta_{11},\ldots, \theta_{1N}) \to \min$$
$$\Phi_j^i (x^{i+1} (\theta_{0,i+1}), x^i (\theta_{1i}), w^i, w^{i+1}, \theta_{0,i+1}, \theta_{1i}) \leqslant 0,\ j = 1,2,\ldots, p_i$$
$$\Phi_j^i (x^{i+1} (\theta_{0,i+1}), x^i (\theta_{1i}), w^i, w^{i+1}, \theta_{0,i+1}, \theta_{1i}) = 0,\ j = p_i + 1,\ldots, q_i,\ i = 0, 1,\ldots, N$$
$$dx^i/dt = f^i (x^i, u^i, w^i, t),\ \theta_{0i} \leqslant t \leqslant \theta_{1i}$$
$$x^i \in R^{n_i},\ u^i \in U^i \subset R^{r_i},\ w^i \in W^i \in R^{l_i},\ \theta_{0i} < \theta_{1i}$$
$$i = 1,2,\ldots, N$$

где Φ_0, Φ_j^i — гладкие функции аргументов

$$y^k \equiv x^k (\theta_{0k}),\ z^k \equiv x^k (\theta_{1k}),\ w^k,\ \theta_{0k},\ \theta_{1k}$$
$$k = 0, 1,\ldots, N$$

не зависящие от z^0, w^0, θ_{10} при $i = 0$ и от y^{N+1}, w^{N+1}, $\theta_{0,N+1}$ при $i = N$, f^i — функции с теми же аналитическими свойствами, что и f.

Задача Б приводится к задаче А, если положить

$$R^n = R^{n_1} \times \ldots \times R^{n_N},\quad U = U^1 \times \ldots \times U^N$$
$$W = W^1 \times \ldots \times W^N$$
$$\theta = (\theta_{01},\ldots, \theta_{0N}, \theta_{11},\ldots, \theta_{1N})$$

и задать множество $T \subset R^{2N}$ неравенствами $\theta_{0i} < \theta_{1i}$, $i = 1,2,\ldots, N$.

Выпишем необходимые условия оптимальности для задачи Б. Управления $u^i (\cdot)$ без потери общности можно считать непрерывными на концах отрезков $[\theta_{0i}, \theta_{1i}]$, поэтому в виде следствия из теоремы 1 получаем следующий результат.

Теорема 2. Для оптимальности допустимых $x^i (\cdot), u^i (\cdot), w^i, \theta_{0i}, \theta_{1i}$, $i = 1,2,\ldots, N$ в задаче Б необходимо существование нетривиального набора чисел λ_0, λ_j^i, $j = 1,2,\ldots, q_i$, $i = 0, 1,\ldots, N$ и непрерывных на $[\theta_{0i}, \theta_{1i}]$ решений $\psi^i (t)$, $i = 1,2,\ldots, N$, сопряженных уравнений

$$d\psi^i /dt = -H_{x^i}^i (\psi^i, x^i (t), u^i(t), w^i, t),\ \theta_{0i} < t < \theta_{1i}$$
$$i = 1,2,\ldots, N$$

таких, что справедливы следующие соотношения:

1) $\lambda_0 \geqslant 0,\quad \lambda_j^i \geqslant 0,\quad j = 1,2,\ldots, q_i,\ i = 0,1,\ldots, N$

$\lambda_j^i \Phi_j^i (\cdot) = 0,\quad j = 1,2,\ldots, q_i,\ i = 0,1,\ldots, N$

2) $\psi^i (\theta_{0i}) = L_{y^i} (\cdot),\ \psi^i (\theta_{1i}) = -L_{z^i} (\cdot),\ i = 1,2,\ldots, N$

3) $H^i (\psi^i (t), x^i (t), u^i (t), w^i, t) = \max\limits_{v \in U^i} H^i (\psi^i (t), x^i (t), v, w^i, t)$

$$\theta_{0i} \leqslant t \leqslant \theta_{1i}, \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

$$4) \quad \left[L_{w^i}(\cdot) - \int\limits_{\theta_{0i}}^{\theta_{1i}} H^i_{w^i}(\psi^i(t), x^i(t), u^i(t), w^i, t)\, dt\right]' \delta w \geqslant 0$$

$$\delta w \in K(w^i, W^i), \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

$$5) \quad L_{y^i}(\cdot)' f^i(x^i(\theta_{0i}), \quad u^i(\theta_{0i}), \ w^i, \ \theta_{0i}) + L_{\theta_{0i}}(\cdot) = 0$$

$$L_{z^i}(\cdot)' f^i(x^i(\theta_{1i}), \ u^i(\theta_{1i}), \ w^i, \ \theta_{1i}) + L_{\theta_{1i}}(\cdot) = 0$$

$$i = 1, 2, \ldots, N$$

Здесь

$$H^i(\psi^i, x^i, u^i, w^i, t) = (\psi^i)' f(x^i, u^i, w^i, t)$$

$$L(\cdot) = \lambda_0 \Phi_0(\cdot) + \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=1}^{q_i} \lambda^i_j \Phi^i_j(\cdot)$$

Символом $(\cdot)$ обозначена совокупность аргументов соответствующих функций и их производных на оптимальном процессе.

Задачи с промежуточными ограничениями типа неравенств в нефиксированный момент времени [1, 2, 4, 5] (также [7], стр. 123, 127]) или с условием типа неравенства в фиксированный момент времени ([10], стр. 174) укладываются в постановку задачи Б; соответствующие результаты вытекают из теоремы 1. Отметим, что утверждения теоремы справедливы без дополнительных предположений невырожденности или управляемости систем, принятых в [2,7].

5. Разрывные системы. Под разрывной системой понимается система обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-непрерывной правой частью. Необходимые условия оптимальности для разрывных систем управления хорошо известны [14—18], когда оптимальная траектория пересекает поверхности разрыва без односторонних касаний. Случаи касания изучались [19, 20] при довольно сильных предположениях о данных задачи. Ниже показано, что от части предположений можно освободиться, если редуцировать [1] разрывную задачу управления к задаче с промежуточными условиями и затем воспользоваться теоремой 1.

Рассмотрим разрывную задачу управления (задачу В)

$$\Phi_0(x(t_0), x(t_1), t_0, t_1) \to \min$$

$$\Phi_j(x(t_0), x(t_1), t_0, t_1) \leqslant 0, \ j = 1, 2, \ldots, p$$

$$\Phi_j(x(t_0), x(t_1), t_0, t_1) = 0, \ j = p + 1, \ldots, q$$

$$\dot{x} = \begin{cases} f^-(x, u, t), & g(x, t) < 0 \\ f^+(x, u, t), & g(x, t) > 0 \end{cases}$$

$$x \in R^n, \ u \in U \subset R^r, \ t_0 < t_1$$

Здесь $\Phi_j(x^0, x^1, t_0, t_1)$, $g(x, t)$ — гладкие скалярные функции, определенные соответственно на $R^n \times R^n \times R \times R$ и $R^n \times R$, f^-, f^+ — непрерывные отображения из $R^n \times U \times R$ в R^n с непрерывными частными производными f_x^-, f_x^+, $q - p < 2n + 2$.

Пусть решение задачи составляют: пара чисел $t_0 < t_1$, управление $u : [t_0, t_1] \to U$ из класса кусочно-непрерывных функций и непрерывная кусочно-гладкая функция $x : [t_0, t_1] \to R^n$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению в смысле [21]. Допустим, далее, что уравнение $g(x(t), t)$ на интервале (t_0, t_1) имеет единственный корень $t = \tau$. Следуя намеченной схеме, составим вспомогательную задачу (задачу Г)

$$\begin{aligned}
&\Phi_0(y(\theta_0), z(\theta_2), \theta_0, \theta_2) \to \min\\
&\Phi_j(y(\theta_0), z(\theta_2), \theta_0, \theta_2) \leqslant 0,\ j = 1,2,\ldots, p\\
&\Phi_j(y(\theta_0), z(\theta_2), \theta_0, \theta_2) = 0,\ j = p+1,\ldots, q\\
&g(y(\theta_1,)\ \theta_1) = 0,\ y(\theta_1) - z(\theta_1) = 0\\
&y^{\cdot} = f^1(y, u, t),\ z^{\cdot} = f^2(z, u, t)\\
&y \in R^n,\ z \in R^n,\ u \in U,\ \theta_0 < \theta_1 < \theta_2
\end{aligned}$$

Функции f^1, f^2 определим на множестве $R^n \times U \times R$ таким образом. Обозначим множество решений неравенств $g \leqslant 0$, $g \geqslant 0$ через G^-, G^+ соответственно. Очевидно, $G^-, G^+ \subset R^{n+1}$. Положим $f^1 = f^2 = f^-$, если при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ график функции $x(t)$ лежит в области G^-, и $f^1 = f^-$, $f^2 = f^+$, если график последовательно пересекает ядра областей G^-, G^+. Аналогично зададим эти функции в остальных случаях.

Задачи В и Г назовем согласованными, если существует оптимальный процесс $y^*(\cdot)$, $z^*(\cdot)$, $u^*(\cdot)$, θ_0^*, θ_1^*, θ_2^* задачи Г, порождающий допустимый процесс задачи В: $x = y^*(t)$, $u = u^*(t)$, $\theta_0^* \leqslant t \leqslant \theta_1^*$; $x = z^*(t)$, $u = u^*(t)$, $\theta_1^* \leqslant t \leqslant \theta_2^*$. Видно, что при условии согласованности задач В, Г процесс $y(\cdot)$, $z(\cdot)$, $u(\cdot)$, $\theta_0 = t_0$, $\theta_1 = \tau$, $\theta_2 = t_1$, отвечающий оптимальному управлению $u(\cdot)$ и начальному условию $y(\tau) = z(\tau) = x(\tau)$, удовлетворяет всем условиям задачи Г и является оптимальным. Выпишем для него необходимые условия оптимальности (теорема 1). Поскольку эти условия одновременно необходимы для оптимальности процесса $x(\cdot)$, $u(\cdot)$, t_0, t_1 в задаче В, то окончательным выводам можно придать такой вид.

Теорема 3. Пусть задачи В и Г согласованы. Если процесс $x(\cdot)$, $u(\cdot)$, t_0, t_1 задачи В оптимален и вдоль него уравнение $g(x(t), t) = 0$ имеет в интервале (t_0, t_1) единственный корень $t = \tau$, то существует вектор $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_q)$, число μ и непрерывное при $t \in [t_0, t_1]$, $t \neq \tau$ решение $\psi(t)$ сопряженного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned}
&\psi^{\cdot} = -H_x(\psi, x(t), u(t), t),\ t \neq \tau\\
&\psi(\tau -) = \psi(\tau +) + \mu\, g_x(x(\tau), \tau)
\end{aligned}$$

такие, что

1) $|\lambda| + |\mu| > 0;\quad \lambda_j \geqslant 0,\quad j = 0, 1,\ldots, p$
   $\lambda_j \Phi_j(x(t_0), x(t_1), t_0, t_1) = 0,\ j = 1,2,\ldots, p$
2) $\psi(t_1) = -L_{x^1}(\lambda, x(t_0), x(t_1), t_0, t_1)$
   $\psi(t_0) = L_{x^0}(\lambda, x(t_0), x(t_1), t_0, t_1)$
3) $H(\psi(t), x(t), u(t), t) = \max\limits_{v \in U} H(\psi(t), x(t), v, t),\ t_0 \leqslant t \leqslant t_1$

4) $L_{x^0}(\lambda, x(t_0), x(t_1), t_0, t_1)' x^{\cdot}(t_0 +) + L_{t_0}(\lambda, x(t_0), x(t_1), t_0, t_1) = 0$

$L_{x^1}(\lambda, x(t_0), x(t_1), t_0, t_1)' x^{\cdot}(t_1 -) + L_{t_1}(\lambda, x(t_0), x(t_1), t_0, t_1) = 0$

$\psi(\tau +)' [x^{\cdot}(\tau -) - x^{\cdot}(\tau +)] + \mu [g_x(x(\tau), \tau)' x^{\cdot}(\tau -) + g_t(x(\tau), \tau)] = 0$

Здесь

$$H(\psi, x, u, t) = \begin{cases} \psi' f^-(x, u, t), & g(x, t) < 0 \\ \psi' f^+(x, u, t), & g(x, t) > 0 \end{cases}$$

$$L(\lambda, x^0, x^1, t_0, t_1) = \sum_{j=0}^{q} \lambda_j \Phi_j(x^0, x^1, t_0, t_1)$$

Теорема 3 обобщает результаты работ [14—17] в двух направлениях: на более общие разрывные задачи с совместными ограничениями на концы траектории и случай касания, характеризуемый равенствами $g(x(\tau), \tau) = 0$, $g_x(x(\tau), \tau)' x^{\cdot}(\tau -) + g_t(x(\tau), \tau) = 0$.

В большинстве исследований [12, 14, 16—18] случай касания из рассмотрения исключается. В работах [19, 20] он разобран при довольно жестких предположениях о функциях f^-, f^+. Как видно из формулировки теоремы 3, аномальность случая касания проявляется в том, что последнее условие 4) определяет не множитель μ, а дает дополнительное соотношение

$$5)\ \psi(\tau +)' [x^{\cdot}(\tau -) - x^{\cdot}(\tau +)] = 0$$

на сопряженные переменные и через них — на вектор λ. Последнее обстоятельство оказывается весьма существенным.

Пример. Пусть условия задачи В имеют вид

$$\varepsilon x_1(t_1) + x_2(t_1)/\varepsilon \to \min; \quad t_0 = 0, \quad t_1 - 2 = 0$$
$$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0; \quad x_1^{\cdot} = u_1, \quad x_2^{\cdot} = u_2, \quad g = -x_2 - (x_1 - 1)^2 < 0$$
$$x_1^{\cdot} = 0, \quad x_2^{\cdot} = -1, \ g > 0; \quad 0 \leqslant u_1, u_2 \leqslant 1$$

При малом $\varepsilon > 0$ управление $u_1(t) = 1$, $u_2(t) = 0$, $0 \leqslant t \leqslant 2$ оптимально; соответствующая траектория $x_1(t) = t$, $x_2(t) = 0$, $0 \leqslant t \leqslant 1$; $x_1(t) = 0$, $x_2(t) = 1 - t$, $1 \leqslant t \leqslant 2$ касается линии разрыва $g = 0$ в момент $\tau = 1$. Условия теоремы 3 в данном случае выполнены и необходимые условия оптимальности удовлетворяются при $\lambda_0 = 0$, $\mu < 0$. Равенство $\lambda_0 = 0$ оказывается следствием требования 5).

Отметим, что при $\lambda_0 = 1$ условия 5), 3) не выполняются. Отсюда следует, что результаты работы [15] не применимы, вообще говоря, в случае касания. Данный пример показывает также, что в разрывных системах управления прямой аналог принципа максимума (соотношения 1) —4) теоремы 3 без последнего равенства 4)) не справедлив в общем случае даже при разрывных сопряженных функциях. Из него же вытекает, что кусочная линейность разрывной системы по фазовым переменным не гарантирует выпуклость множества достижимости. Прямыми вычислениями можно проверить, что в момент $t = 2$ множество достижимости представляет собой объединение квадрата и изолированной точки на плоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Величенко В. В.* Условия оптимальности в задачах управления с промежуточными условиями.— Докл. АН СССР, 1967, т. 174, № 5, с. 1011.
2. *Величенко В. В.* Оптимальное управление составными системами.— Докл. АН СССР, 1967, т. 176, № 4, с. 754.
3. *Бережинский Т. А., Островский Г. М.* Об оптимальном управлении процессами с параметрами при ограниченных фазовых координатах.— Автоматика и телемеханика, 1970, № 2, с. 7.

4. *Розова В. Н.* Некоторые задачи оптимального управления с разрывными ограничениями на управляющую функцию (нелинейный случай).— Автоматика и телемеханика, 1971, № 6, с. 35.
5. *Медведев В. А., Розова В. Н.* Оптимальное управление ступенчатыми системами.— Автоматика и телемеханика, 1972, № 3, с. 15.
6. *Веретенников В. Г., Синицын В. А.* Разрывная вариационная задача оптимизации процессов управления.— ПММ, 1972, т. 36, вып. 2, с. 357.
7. *Брайсон А., Хо Ю-ши.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. 544 с.
8. *Горбунов В. К.* Задача управления процессами с разделенными разрывами фазовых траекторий.— Изв. АН УзССР. Сер. физ.-матем. наук, 1973, № 4, с. 15.
9. *Фаткин Ю. М., Чарный В. Н.* Итерационный процесс определения оптимального управления в системах с иерархической структурой.— Автоматика и телемеханика, 1973, № 11, с. 102.
10. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Принцип максимума в теории оптимального управления. Минск: Наука и техника, 1974. 272 с.
11. *Флеминг У., Ришел Р.* Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. М.: Мир, 1978. 316 с.
12. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 392 с.
13. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 429 с.
14. *Красовский Н. Н.* Об одной задаче оптимального регулирования нелинейных систем.— ПММ, 1959, т. 23, вып. 2, с. 209.
15. *Троицкий В. А.* Вариационные задачи оптимизации процессов управления для уравнений с разрывными правыми частями.— ПММ, 1962, т. 26, вып. 2, с. 233.
16. *Величенко В. В.* О задачах оптимального управления для уравнений с разрывными правыми частями.— Автоматика и телемеханика, 1966, № 7, с. 20.
17. *Розов Н. Х.* Метод локальных сечений для систем с преломлением траекторий.— Докл. АН СССР, 1972, т. 202, № 3, с. 535.
18. *Ащепков Л. Т., Бадам У.* Оптимизация параметров разрывных динамических систем.— Автоматика и телемеханика, 1979, № 8, с. 13.
19. *Хоанг Хыу Дыонг.* Условие скачка в одной задаче оптимального управления.— Дифференц. уравнения, 1966, т. 2, № 5, с. 619.
20. *Кугушев Е. И.* Необходимые условия оптимальности для систем, описываемых уравнениями с разрывной правой частью.— Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1974, № 2, с. 83.
21. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.— Матем. сб., 1960, т. 51(93), № 1, с. 99.

Иркутск

Поступила в редакцию
4.II.1980