Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 2, 1981

УДК 539.3

КВАЗИСТАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В НАПРЯЖЕНИЯХ

Победря Б. Е.

Дается постановка классической задачи механики деформируемого твердого тела в напряжениях (задача В), в том числе и вариационная. При некоторых ограничениях на определяющие соотношения доказываются теоремы существования обобщенного решения задачи В и его единственности, теорема о максимуме кастильяниана, а также сходимость метода последовательных приближений при условии, что соответствующая линейная задача имеет единственное решение. Рассматриваются методы ускорения сходимости, в том числе и «быстросходящийся» метод последовательных приближений, имеющий скорость сходимости существенно более высокую, чем геометрическая прогрессия. Дается новая постановка квазистатической задачи механики деформируемого твердого тела в напряжениях (задача Б), которая сводится к решению шести уравнений относительно компонент тензора напряжений при шести граничных условиях. Доказывается эквивалентность задач Б и В. Приводится соответствующая вариационная формулировка задачи Б на основе введения некоторого оператора I, а также определение обобщенного решения этой задачи. При некоторых ограничениях на определяющие уравнения доказывается теорема единственности решения задачи Б, теорема о минимуме оператора I, теорема о единственности этого минимума.

1. Пусть в некоторой декартовой системе координат определяющие соотношения, связывающие тензор деформаций ε и тензор напряжений σ, задаются в операторном виде [1]

$$\varepsilon_{ij} = G_{ij}(\sigma) \tag{1.1}$$

Деформации будем считать малыми, так что выполняются соотношения Коши, связывающие их с вектором перемещения $\mathbf{u}$

$$\varepsilon_{ij} = {}^1/_2\,(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\varepsilon = \operatorname{def} \mathbf{u}) \tag{1.2}$$

Пусть заданы уравнения равновесия среды

$$S_i \equiv \sigma_{ij,j} + X_i = 0 \tag{1.3}$$

где $\mathbf{X}$ — заданные объемные силы, и граничные условия смешанного типа: на части границы тела Σ_1 заданы перемещения $\mathbf{u}^\circ$, а на другой части Σ_2 — нагрузки $\mathbf{S}^\circ$

$$u_i\,|_{\Sigma_1} = u_i^\circ, \quad \sigma_{ij}n_j\,|_{\Sigma_2} = S_i^\circ \tag{1.4}$$

Будем считать, что все рассматриваемые функции обладают гладкостью, необходимой для проведения используемых преобразований и изменяются на временном отрезке $[0, t_1]$. Кроме того, предполагаем наличие «естественного» состояния, т. е. считаем, что во времена, предшествующие $t = 0$, тензоры напряжений и деформаций вместе со всеми своими производными равны нулю.

Если объем V, занимаемый телом, представляет собой односвязную область, то необходимыми и достаточными условиями интегрируемости системы дифференциальных уравнений (1.2) относительно перемещений являются уравнения Сен-Венана, обращающие в нуль симметричный тензор несовместности η

$$\eta_{ij} \equiv \epsilon_{ikl}\epsilon_{jmn}\varepsilon_{kn,lm} = 0 \quad (\eta \equiv \operatorname{Ink} \varepsilon = 0) \tag{1.5}$$

В этом случае можно выразить вектор перемещения $\mathbf{u}$ через деформации ε_{ij}, а благодаря соотношениям (1.1) — и через напряжения (1.6). Задачу (1.3), (1.5), (1.1), (1.4) назовем квазистатической (статической) задачей механики деформируемого твердого тела (задачей B). Уравнения (1.5) после подстановки в них соотношений (1.1) можно записать в виде

$$\eta_{ij}\,\{\mathrm{G}\,(\sigma)\} = 0 \tag{1.6}$$

а граничные условия (1.4) после использования формул Чезаро [2] и соотношений (1.1) — в виде

$$u_i\,\{\mathrm{G}\,(\sigma)\}\,|_{\Sigma_1} = u_i^\circ, \quad \sigma_{ij}n_j\,|_{\Sigma_2} = S_i^\circ \tag{1.7}$$

Таким образом, уравнения, описывающие задачу B, имеют вид (1.6), (1.3) и (1.7).

Обобщенным решением задачи B называется тензор-функция $\sigma \in T$, удовлетворяющая для всякой гладкой тензор-функции $\tau \in T_0$ интегральному тождеству [3]

$$\int\limits_V \varepsilon_{ij}\,(\sigma)\,\tau_{ij}\,dV = A_{\Sigma_1}^{\tau}\,(\sigma, \mathbf{u}^\circ) \tag{1.8}$$

Здесь $A_{\Sigma_1}\,(\sigma, \mathbf{u}^\circ)$ — работа внутренних сил σ на заданном перемещении $\mathbf{u}^\circ$

$$A_{\Sigma_1}\,(\sigma, \mathbf{u}^\circ) = \int\limits_{\Sigma_1} \sigma_{ij}n_ju_i^\circ\,d\Sigma$$

$\tau \in T$ означает, что тензор τ удовлетворяет условиям

$$\tau_{ij,j} + X_i = 0, \quad \tau_{ij}n_j\,|_{\Sigma_2} = S_i^\circ \tag{1.9}$$

а $\tau \in T_0$ — условиям

$$\tau_{ij,j} = 0, \quad \tau_{ij}n_j\,|_{\Sigma_2} = 0 \tag{1.10}$$

Если тензор деформации потенциальный, т. е. существует такой скалярный оператор от напряжений $w\,(\sigma)$, что

$$\varepsilon_{ij} = G_{ij}\,(\sigma) = \frac{\partial w\,(\sigma)}{\partial \sigma_{ij}} \tag{1.11}$$

то можно ввести кастильяниан K по формуле [3]

$$K\,(\sigma) \equiv -\varphi\,(\sigma) + A_{\Sigma_1}\,(\sigma, \mathbf{u}^\circ), \quad \varphi\,(\sigma) \equiv \int\limits_V w\,dV \tag{1.12}$$

В этом случае задача отыскания обобщенного решения задачи B эквивалентна задаче отыскания «стационарной точки» кастильяниана $K\,(\sigma)$ [3]

$$DK\,(\sigma, \tau) = 0$$

2. Пусть теперь определяющие соотношения (1.1) достаточно гладкие.

Лемма 1. Если существуют функциональные производные $\partial\varepsilon_{ij}(\sigma)/\partial\sigma_{kl}$ определяющих соотношений (1.1), то справедливо тождество

$$\varphi(\sigma^{(2)}) = \varphi(\sigma^{(1)}) + A_{\Sigma_1}(\sigma^{(2)} - \sigma^{(1)}, \mathbf{u}^\circ) + \tag{2.1}$$
$$+ \frac{1}{2}\int\limits_V \left[\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial\sigma_{kl}}\{\sigma^{(2)} + \eta(\sigma^{(2)} - \sigma^{(1)})\}(\sigma_{kl}^{(2)} - \sigma_{kl}^{(1)}(\sigma_{ij}^{(2)} - \sigma_{ij}^{(1)}) dV\right.$$

В самом деле, введем функцию числового аргумента ξ $(0 \leqslant \xi \leqslant 1)$

$$f(\xi) \equiv \varphi\{\sigma^{(1)} + \xi(\sigma^{(2)} - \sigma^{(1)})\} \tag{2.2}$$

допускающую на указанном отрезке представление

$$f(1) = f(0) + f'(0) + {}^1/_2 f''(\eta), \quad 0 < \eta < 1 \tag{2.3}$$

Подставляя в (2.3) выражения, полученные из (2.2), и учитывая (1.12), получим

$$\varphi(\sigma^{(2)}) = \varphi(\sigma^{(1)}) + \int\limits_V \varepsilon_{ij}(\sigma^{(1)})(\sigma_{ij}^{(2)} - \sigma_{ij}^{(1)}) dV + \tag{2.4}$$
$$+ {}^1/_2 \int\limits_V \frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial\sigma_{kl}}\{\sigma^{(1)} + \eta(\sigma^{(2)} - \sigma^{(1)})\}(\sigma_{kl}^{(2)} - \sigma_{kl}^{(1)})(\sigma_{ij}^{(2)} - \sigma_{ij}^{(1)}) dV$$

Учитывая (1.8), из (2.4) получим (2.1).

Теорема 2.1 (максимума кастильяниана). Предположим, что определяющие уравнения (1.1) таковы, что для всякого симметричного тензора второго ранга $\mathbf{h}$ выполняется неравенство

$$\left[\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial\sigma_{kl}} h_{kl}\right] h_{ij} \geqslant n_0 h_{ij} h_{ij}, \quad n_0 > 0 \tag{2.5}$$

Тогда стационарная точка кастильяниана (1.10) является точкой мак симума.

В самом деле, полагая в тождестве (2.1) $\sigma^{(2)} = \tau \in T_0$, а $\sigma^{(1)} = \sigma^*$ (решение задачи B), имеем, учитывая (2.5)

$$K(\tau) \equiv -\varphi(\tau) + A_{\Sigma_1}(\tau, \mathbf{u}^\circ) \leqslant -\varphi(\sigma^*) + A_{\Sigma_1}(\sigma^*, \mathbf{u}^\circ) - \tag{2.6}$$
$$- \frac{n_0}{2}\int\limits_V (\tau_{ij} - \sigma_{ij}^*)(\tau_{ij} - \sigma_{ij}^*) dV \leqslant -\varphi(\sigma^*) + A_{\Sigma_1}(\sigma^*, \mathbf{u}^\circ) \equiv K(\sigma^*)$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2.2 (единственности). Если выполняются условия (2.5), то существует не более одного обобщенного решения задачи B.

Предположим противное: существуют решения $\sigma^{(1)}$ и $\sigma^{(2)}$. Тогда из (1.8) следует, что они удовлетворяют тождеству

$$\int\limits_V [\varepsilon_{ij}(\sigma^{(2)}) - \varepsilon_{ij}(\sigma^{(1)})]\tau_{ij} dV = 0 \tag{2.7}$$

Далее

$$[\varepsilon_{ij}(\sigma^{(2)}) - \varepsilon_{ij}(\sigma^{(1)})]\tau_{ij} = \int\limits_0^1 \left[\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial\sigma_{kl}}\{\sigma^{(1)} + \xi(\sigma^{(2)} - \sigma^{(1)})\} \times\right. \tag{2.8}$$
$$\times (\sigma_{kl}^{(2)} - \sigma_{kl}^{(1)})\tau_{ij} d\xi$$

Поэтому, полагая в (2.8) $\tau_{ij} \equiv \sigma_{ij}^{(2)} - \sigma_{ij}^{(1)}$, получим из (2.5)

$$0 \geqslant \int_V [\varepsilon_{ij}(\sigma^{(2)}) - \varepsilon_{ij}(\sigma^{(1)})](\sigma_{ij}^{(2)} - \sigma_{ij}^{(1)})\,dV \geqslant$$

$$\geqslant n_0 \int_V (\sigma_{ij}^{(2)} - \sigma_{ij}^{(1)})(\sigma_{ij}^{(2)} - \sigma_{ij}^{(1)})\,dV$$

Отсюда следует, что

$$\sigma_{ij}^{(2)} \equiv \sigma_{ij}^{(1)} \tag{2.9}$$

т. е. единственность решения задачи В.

Теорема 2.3. Точка максимума кастильяниана является единственной.

Пусть $\sigma^{(1)}$ и $\sigma^{(2)}$ — две точки максимума кастильяниана K. Тогда для них выполняется условие (2.7) и в силу теоремы 2.2 справедливо соотношение (2.9).

Рассмотрим теперь некоторый линейный тензор-оператор от напряжений

$$\pi_{ij} = \Pi_{ij}(\sigma) \tag{2.10}$$

такой, что в функциональном пространстве $\sigma \in T_0$ величина

$$(\sigma, \tau)_\pi \equiv \int_V \pi_{ij}(\sigma)\tau_{ij}\,dV$$

удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения [4], так что рассматриваемое функциональное пространство S является гильбертовым. Пусть, кроме того, оператор (2.10) таков, что для произвольного симметричного тензора $\mathbf{h}$ выполняются неравенства

$$n\pi_{ij}(\mathbf{h})h_{ij} \leqslant \left[\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial\sigma_{kl}}h_{kl}\right]h_{ij} \leqslant N\pi_{ij}(\mathbf{h})h_{ij}, \quad 0 < n \leqslant N \tag{2.11}$$

Заметим, что если

$$\pi_{ij}(\sigma) \equiv {}^1/_2\,(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\,\sigma_{kl} = \sigma_{ij}$$

то первое из неравенств (2.11) эквивалентно при $n = n_0$ неравенству (2.5). При таком выборе оператора $\mathbf{\Pi}$ обозначим гильбертово пространство S через S_0.

Если теперь существует единственное обобщенное решение задачи В для случая, когда оператор определяющих соотношений (1.1) является оператором $\mathbf{\Pi}$ (2.10) (задача B_π), можно организовать метод последовательных приближений

$$\eta_{ij}\{\mathbf{\Pi}(\sigma^{(m+1)})\} = \eta_{ij}\{\mathbf{\Pi}(\sigma^{(m)})\} - \beta^{(m)}\eta_{ij}\{\mathbf{G}(\sigma^{(m)})\} \tag{2.12}$$

$$\sigma_{ij,j}^{(m+1)} + X_i = 0 \tag{2.13}$$

$$u_i\{\mathbf{\Pi}(\sigma^{(m+1)})\}|_{\Sigma_1} = u_i\{\mathbf{\Pi}(\sigma^{(m)})\}|_{\Sigma_1} - \tag{2.14}$$

$$- \beta^{(m)}[u_i\{\mathbf{G}(\sigma^{(m)})\}|_{\Sigma_1} - u_i^\circ]; \quad \sigma_{ij}^{(m+1)}n_j|_{\Sigma_2} = S_i^\circ$$

начиная с некоторого нулевого приближения $\sigma^{(0)}$ и полагая $m = 0, 1, \ldots$

Теорема 2.4. Пусть существует единственное обобщенное решение задачи B_π, справедливы условия (2.11), заданные перемещения удовлетворяют условиям

$$\mathbf{u}^\circ \in L_p(\Sigma), \quad p > {}^4/_3 \tag{2.15}$$

Пусть, кроме того, для нулевого приближения $\sigma^{(0)}$ выполняется условие

$$[\varepsilon_{ij}(\sigma^{(0)}) - \pi_{ij}(\sigma^{(0)})]\, h_{ij} \leqslant n\pi_{ij}(\mathbf{h})\, h_{ij}$$

где $\mathbf{h}$ — произвольный симметричный тензор.

Тогда в некоторой окрестности

$$\| \sigma - \sigma^{(0)} \|_\pi \leqslant r$$

существует обобщенное решение σ^* задачи В, единственное в этой окрестности, и при любом значении итерационного параметра $\beta \in (0{,}2/N]$ к нему сходится начинающийся с $\sigma^{(0)}$ процесс последовательных приближений (2.12) — (2.14), причем

$$\| \sigma^{(m)} - \sigma^* \|_\pi \leqslant \frac{q^m}{1-q} \| \sigma^{(1)} - \sigma^{(0)} \|_\pi \tag{2.16}$$

$$q = \max\,(|\, 1 - \beta n \,|,\ |\, 1 - \beta N \,|) < 1$$

Доказательство следует из рассмотрения тождества

$$\int\limits_V \pi_{ij}(\sigma)\, \tau_{ij}\, dV = \int\limits_V \pi_{ij}(\sigma)\, \tau_{ij} - \beta \Big[\int\limits_V \varepsilon_{ij}(\sigma)\, \tau_{ij}\, dV - A_{\Sigma_1}(\tau, \mathbf{u}^\circ) \Big] \tag{2.17}$$

и применения к нему процедуры, использованной в [3] при доказательстве теоремы 3.1.

Итак, процесс последовательных приближений (2.12) — (2.14) сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем q, который принимает наименьшее значение $q = (N - n)/(N + n)$ при $\beta = 2/(N + n)$.

Теорема 2.5. При выполнении условий теоремы 2.4 оператор $\varphi(\sigma^{(m)})$ сходится к $\varphi(\sigma^*)$, а следовательно, кастильяниан $K(\sigma^{(m)})$ к кастильяниану $K(\sigma^*)$.

В самом деле, полагая в (2.6) $\tau = \sigma^{(m)}$, получим

$$\varphi(\sigma^{(m)}) - \varphi(\sigma^*) \leqslant A_{\Sigma_1}(\sigma^{(m)} - \sigma^*, \mathbf{u}^\circ) + {}^1/_2 N \| \sigma^{(m)} - \sigma^* \|_\pi^2$$

Пользуясь теоремами вложения С. Л. Соболева [5], получаем отсюда для перемещений $\mathbf{u}^\circ$, удовлетворяющих условиям (2.15)

$$\varphi(\sigma^{(m)}) - \varphi(\sigma^*) \leqslant (B + {}^1/_2 N) \| \sigma^{(m)} - \sigma^* \|_\pi^2$$

где B — некоторая постоянная, зависящая только от области Σ_1. Поэтому, используя (2.16), имеем

$$\varphi(\sigma^{(m)}) - \varphi(\sigma^*) \leqslant (B + {}^1/_2 N)\, q^{2m} \| \sigma^{(0)} - \sigma^* \|_\pi > 0, \quad m \to \infty$$

Чтобы получить сходимость более быструю, чем геометрическая прогрессия, следует наложить ограничения на вторые функциональные производные определяющих соотношений (1.1). Пусть для произвольного симметричного тензора $\mathbf{h}$ справедливо неравенство

$$\left| \left[\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma_{kl} \partial \sigma_{mn}} h_{kl} h_{mn} \right] h_{ij} \right| \leqslant l\,(h_{ij} h_{ij})^{3/2}, \quad l > 0 \tag{2.18}$$

Предположим далее, что пространство S_1 с введенным скалярным произведением

$$(\sigma, \tau)_1 \equiv \int\limits_V \left[\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} \sigma_{kl} \right] \tau_{ij}\, dV$$

является гильбертовым для тензор-функций $\tau \in T_0$, определенных в конечной области V.

Теорема 2.6 (*быстросходящийся метод*). Пусть оператор (2.10) имеет вид

$$\pi_{ij}(\mathbf{h}) \equiv \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} h_{kl}$$

и существует единственное обобщенное решение соответствующей задачи B_π. Пусть выполнены неравенство (2.18) и неравенства

$$n_1 h_{ij} h_{ij} \leqslant \left[\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} h_{kl} \right] h_{ij} \leqslant N_1 h_{ij} h_{ij}, \quad 0 < n_1 \leqslant N_1$$

Пусть, кроме того, a — такое положительное число, что

$$\int\limits_V [\varepsilon_{ij}(\sigma^{(0)}) - \pi_{ij}(\sigma^{(0)})]\, \sigma_{ij}^{(0)}\, dV \leqslant n_1 a \int\limits_V \sigma_{ij}^{(0)} \sigma_{ij}^{(0)}\, dV$$

Тогда найдется такое число α, $0 < \alpha \leqslant 1$, что задача В имеет единственное решение σ^* в окрестности $\| \sigma^{(0)} - \sigma^* \|_1 \leqslant r_0$, если выполняется неравенство

$$q \leqslant a^{-\alpha} C, \quad q \equiv \frac{3}{2} \frac{l}{n_1} V^{\alpha/2}, \quad C \equiv \alpha (1 + \alpha)^{-(1+\alpha)/\alpha}$$

где r_0 — наименьший корень уравнения

$$q r^{1+\alpha} - r + a = 0$$

При $\beta = 1$ к этому решению сходится начинающийся с $\sigma^{(0)}$ процесс последовательных приближений, причем

$$\| \sigma^{(m)} - \sigma^* \|_1 \leqslant C_1 \delta^{(1+\alpha)^m}, \quad \delta \equiv C^{1/\alpha}, \quad C_1 \equiv \frac{a}{\delta (1 - \delta)}$$

Доказательство этой теоремы следует из рассмотрения тождества (2.17) и применения к нему процедуры, описанной в [6] при доказательстве теоремы 1 из § 7.

3. В работе [3] дана новая постановка задачи механики деформируемого твердого тела в напряжениях (задача Б), являющаяся развитием идей, высказанных А. А. Ильюшиным [7]. Дадим несколько иную формулировку этой задачи. Рассмотрим некоторый вектор-оператор $\mathbf{R}$ от вектора S (1.3), такой, что $\mathbf{R}$ (S) = 0 только для S = 0. Образуем комбинацию девиатора тензора несовместности η с его шаровой частью, помноженной на симметричный постоянный тензор ξ. Тогда получим

$$H_{ij} \equiv \Delta \varepsilon_{ij} + \theta_{,ij} - \varepsilon_{ik,kj} - \varepsilon_{jk,ki} + \xi_{ij} (\varepsilon_{kl,kl} - \Delta\theta) = 0 \tag{3.1}$$

Выразив в (3.1) деформации через напряжения по формулам (1.1), составим шесть уравнений относительно шести независимых компонент тензора напряжений

(3.2) $$H_{ij}(\sigma) + R_{i,j}(S) + R_{j,i}(S) - \xi_{ij}R_{k,k}(S) = 0$$

Пусть на границе выполняются условия равновесия

(3.3) $$S_i|_\Sigma \equiv (\sigma_{ij,j} + X_i)|_\Sigma = 0$$

Тогда задача Б заключается в решении шести уравнений (3.2) при удовлетворении граничных условий (3.3) и (1.7).

Теорема 3.1. Задача Б эквивалентна задаче В.

В самом деле, свернем уравнения (3.2) с единичным тензором

(3.4) $$(2 - \xi_{kk})\ [\Delta\theta(\sigma) - \varepsilon_{ij,ij}(\sigma) + R_{k,k}(S)] = 0$$

и применим оператор div к (3.2)

(3.5) $$(\delta_{ij} - \xi_{ij})\ [\Delta\theta(\sigma) - \varepsilon_{kl,kl}(\sigma) + R_{k,k}(S)]_{,j} = 0$$

При $\xi_{kk} \neq 2$ из (3.5) и (3.4) следует

$$\Delta R_i(S) = 0$$

Из граничного условия (3.3) и свойств оператора R отсюда вытекает, что $S_i = 0$ всюду в области V, т. е. выполняются уравнения равновесия (1.3). Тогда из (3.2) следует, что $H_{ij} = 0$, а потому и $H_{kk} = 0$. Но тогда справедливы условия совместности (1.5). Теорема доказана.

Введем следующие обозначения:

$$\varepsilon_{ij,k}\delta_{ij} \equiv \theta_k,\quad \varepsilon_{ij,k}\delta_{jk} \equiv e_i$$

$$\sigma_{ij,k}\delta_{ij} \equiv p_k,\quad \sigma_{ij,k}\delta_{jk} \equiv q_i$$

и рассмотрим тензор третьего ранга

(3.6) $$E_{ijk} \equiv \varepsilon_{ij,k} + \delta_{ki}(1/_2\theta_j - e_j) + \delta_{kj}(1/_2\ \theta_i - e_i) + \\ + \xi_{ij}(e_k - \theta_k) + R_i(\mathbf{q})\,\delta_{jk} + R_j(\mathbf{q})\,\delta_{ik} - \xi_{ij}R_k(\mathbf{q})$$

Тогда уравнения (3.2) можно записать в дивергентном виде

(3.7) $$E_{ijk,k} + Y_{ij} = 0$$

$$Y_{ij} \equiv R_{i,j}(X) + R_{j,i}(X) - \xi_{ij}R_{k,k}(X)$$

Пусть на границе тела Σ заданы нагрузки

(3.8) $$\sigma_{ij}n_j|_\Sigma = S_i^\circ$$

и условия равновесия (3.3)

(3.9) $$q_i|_\Sigma = -X_i|_\Sigma$$

Тогда задача Б заключается в решении уравнений (3.7) при выполнении граничных условий (3.8), (3.9).

Дадим теперь вариационную постановку задачи Б. Для этого предположим, что существует такой скалярный оператор Ω, зависящий от градиентов напряжений, что выполняются условия потенциальности тензора (3.6)

(3.10) $$E_{ijk} = \partial\Omega/\partial\sigma_{ij,k}$$

Назовем тензором потоков симметричный тензор второго ранга χ, определенный на поверхности Σ

(3.11) $\chi_{ij} \equiv E_{ijk}n_k$

Определим теперь оператор I по формуле

(3.12)
$$I \equiv \int_V (\Omega - Y_{ij}\sigma_{ij})\, dV - \int_\Sigma \chi_{ij}\sigma_{ij}\, d\Sigma + \int_V \left[\frac{1}{2}(Aq_iq_i + B\sigma_{ij}n_j\sigma_{ik}n_k) + AX_iq_i - BS_i^\circ\sigma_{ij}n_j\right] d\Sigma$$

где A и B — некоторые размерные постоянные, отличные от нуля.

Теорема 3.2. В положении равновесия оператор (3.12) имеет стационарное значение

(3.13) $DI\,(\sigma,\ \delta\sigma) = 0$

Заметим, что в (3.13) потоки χ не варьируются (считаются «замороженными»), а затем подставляется их выражение по формуле (3.11).

В самом деле, произведя вычисления по формуле (3.13) и воспользовавшись теоремой Остроградского — Гаусса, получим

(3.14)
$$\int_V (E_{ijk,k} + Y_{ij})\,\delta\sigma_{ij}\, dV = A\int_\Sigma (q_i + X_i)\,\delta q_i\, d\Sigma + B\int_\Sigma (\sigma_{ij}n_j - S_i^\circ)\,\delta\sigma_{ik}n_k\, d\Sigma$$

В силу произвольности вариаций из (3.14) следуют уравнения (3.7) и граничные условия (3.8) и (3.9).

4. Обобщенным решением задачи Б назовем симметричный тензор σ, удовлетворяющий для всякого гладкого симметричного тензора τ интегральному тождеству

(4.1)
$$\int_V E_{ijk}(\sigma)\,\tau_{ij,k}\, dV + \int_\Sigma (Aq_i\tau_{ij,j} + B\sigma_{ij}n_j\tau_{ik}n_k)\, d\Sigma = N(\tau)$$

Здесь

(4.2) $N \equiv N^V + N_1^\Sigma + N_2^\Sigma$

(4.3)
$$N^V(\tau) \equiv \int_V Y_{ij}\tau_{ij}\, dV;\quad N_1^\Sigma(\tau) \equiv \int_\Sigma \chi_{ij}(\sigma)\,\tau_{ij}\, d\Sigma;$$
$$N_2^\Sigma(\tau) \equiv \int_\Sigma (BS_i^\circ\tau_{ik}n_k - AX_i\tau_{ik,k})\, d\Sigma$$

Введем обозначения

$$f = f_V + f_\Sigma,\ f_V \equiv \int_V \Omega\, dV,\ f_\Sigma \equiv \frac{1}{2}\int_\Sigma (Aq_iq_i + B\sigma_{ij}n_j\sigma_{ik}n_k)\, d\Sigma$$

Тогда, очевидно

(4.4) $I \equiv f - N(\sigma)$

а интегральное тождество (4.1) можно записать в виде

$$Df\,(\sigma,\ \tau) = N(\tau)$$

Отсюда видно, что определение обобщенного решения задачи Б совпадает со слабым решением задачи Б (т. е. решением вариационного уравнения (3.13)).

Лемма 2. Если существуют функциональные производные $\partial E_{ijk}(\sigma)/\partial\sigma_{lm,n}$, то справедливо тождество

$$
f(\sigma^{(2)}) = f(\sigma^{(1)}) + N(\sigma^{(2)} - \sigma^{(1)}) + \frac{1}{2}\int\limits_V \frac{\partial E_{ijk}}{\partial\sigma_{lm,n}}\{\sigma^{(1)} + \eta(\sigma^{(2)} - \sigma^{(1)})\}[\sigma^{(2)}_{lm,n} - \sigma^{(1)}_{lm,n}][\sigma^{(2)}_{ij,k} - \sigma^{(1)}_{ij,k}]\,dV \tag{4.5}
$$

В самом деле, вводя функцию числового аргумента ξ $(0 \leqslant \xi \leqslant 1)$

$$
\varphi(\xi) \equiv f\{\sigma^{(1)} + \xi(\sigma^{(2)} - \sigma^{(1)})\} \tag{4.6}
$$

которая допускает на указанном отрезке представление (2.3), получим после подстановки в выражение типа (2.3) соответствующие величины из (4.6) и используя (3.10) и (4.4)

$$
f(\sigma^{(2)}) = f(\sigma^{(1)}) + \int\limits_V E^{(1)}_{ijk}(\sigma^{(2)}_{ij,k} - \sigma^{(1)}_{ij,k})\,dV + A\int\limits_\Sigma q^{(1)}_i(q^{(2)}_i - q^{(1)}_i)\,d\Sigma + \frac{1}{2}\int\limits_V \frac{\partial E_{ijk}}{\partial\sigma_{lm,n}}\{\sigma^{(1)} + \eta(\sigma^{(2)} - \sigma^{(1)})\}[\sigma^{(2)}_{lm,n} - \sigma^{(1)}_{lm,n}] \times [\sigma^{(2)}_{ij,k} - \sigma^{(1)}_{ij,k}]\,dV + B\int\limits_\Sigma \sigma^{(1)}_{ij}n_j(\sigma^{(2)}_{ik} - \sigma^{(1)}_{ik})n_k\,d\Sigma
$$

Учитывая (4.2) и (4.3), получим отсюда (4.5).

Теорема 4.1. Предположим, что для всякого симметричного по первым двум индексам тензора третьего ранга $\mathbf{h}$ выполняется неравенство

$$
\left[\frac{\partial E_{ijk}}{\partial\sigma_{lm,n}} h_{lmn}\right] h_{ijk} \geqslant k_0 h_{ijk} h_{ijk}, \quad k_0 > 0 \tag{4.7}
$$

Тогда стационарная точка оператора I (3.12) имеет минимум.

В самом деле, полагая в тождестве (4.5) $\sigma^{(2)} = \tau$, а $\sigma^{(1)} = \sigma^*$, где σ^* — решение задачи Б, имеем, учитывая (4.7)

$$
I(\tau) = f(\tau) - N(\tau) \geqslant f(\sigma^*) - N(\sigma^*) + \frac{1}{2}k_0\int\limits_V (\tau_{ij,k} - \sigma^*_{ij,k})(\tau_{ij,k} - \sigma^*_{ij,k})\,dV \geqslant f(\sigma^*) - N(\sigma^*) = I(\sigma^*)
$$

что и требовалось доказать.

Теорема 4.2. Если выполняются условия (4.7), то существует не более одного обобщенного решения задачи Б.

Предположим противное: существуют решения $\sigma^{(1)}$ и $\sigma^{(2)}$. Тогда из (3.7) следует, что они удовлетворяют тождеству для всякого симметричного тензора τ

$$
\int\limits_V [E_{ijk}(\sigma^{(2)}) - E_{ijk}(\sigma^{(1)})]\,\tau_{ij,k}\,dV = 0 \tag{4.8}
$$

Подынтегральное выражение в (4.8) можно записать в виде

$$
\int\limits_0^1 \frac{\partial E_{ijk}}{\partial\sigma_{lm,n}}\{\sigma^{(1)} + \xi(\sigma^{(2)} - \sigma^{(1)})[\sigma^{(2)}_{lm,n} - \sigma^{(1)}_{lm,n}]\,\tau_{ij,k}\,d\xi\}
$$

Полагая здесь $\tau_{ij,k} \equiv \sigma^{(2)}_{ij,k} - \sigma^{(1)}_{ij,k}$, получим из (4.7)

$$0 \geqslant \int\limits_V (E^{(2)}_{ijk} - E^{(1)}_{ijk})(\sigma^{(2)}_{ij,k} - \sigma^{(1)}_{ij,k})\,dV \geqslant$$

$$\geqslant k_0 \int\limits_V (\sigma^{(2)}_{ij,k} - \sigma^{(1)}_{ij,k})(\sigma^{(2)}_{ij,k} - \sigma^{(1)}_{ij,k})\,dV$$

Отсюда $\sigma^{(2)}_{ij,k} = \sigma^{(1)}_{ij,k}$, т. е. тензоры $\sigma^{(2)}$ и $\sigma^{(1)}$ отличаются друг от друга только на постоянный тензор. Однако в силу граничных условий (3.8) этот постоянный тензор равен нулю. Отсюда следует единственность задачи Б.

Теорема 4.3. Точка минимума оператора I (3.12) является единственной.

Пусть $\sigma^{(1)}$ и $\sigma^{(2)}$ — две точки минимума оператора I. Тогда для них выполняются условия (4.8), а в силу теоремы 4.2 $\sigma^{(1)} = \sigma^{(2)}$.

5. Аналогично изложенному в п. 2 можно построить методы последовательных приближений для решения задачи Б.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Победря Б. Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1979. 224 с.
2. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
3. *Победря Б. Е.* Некоторые общие теоремы механики деформируемого твердого тела.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 3, с. 531.
4. *Люстерник Л. А.*, *Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.
5. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950. 256 с.
6. *Победря Б. Е.* Математическая теория нелинейной вязкоупругости.— В сб.: Упругость и неупругость. Вып. 3. М.: Изд-во МГУ, 1973. с. 95.
7. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 272 с.

Москва

Поступила в редакцию
26.XI.1979