

УДК 533.6

## ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ В ОКРЕСТНОСТИ КАУСТИКИ

Манукян С. М.

(Ереван)

Рассматривается задача определения параметров движения нелинейных диспергирующих неоднородных сред для квазимонохроматических волн малой амплитуды вблизи каустики. Получено нелинейное уравнение для высокочастотной асимптотики амплитуды волны в произвольной слабо нелинейной диспергирующей и неоднородной среде, которое в основном порядке является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка, в линейном случае  $\rightarrow$  переходящим в уравнение Эйри, что подтверждает справедливость эталонных решений [1] для диспергирующих линейных сред и монохроматических волн. При получении уравнения использовано предположение о плавности изменения параметров волны, что возможно для сред с кубичной нелинейностью или для сред со слабой квадратичной нелинейностью, но с сильной дисперсией. В отличие от сред с квадратичной нелинейностью, где вблизи каустики справедливо уравнение коротких волн [2—5], для плавных квазимонохроматических волн в кубичных средах получено обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение, решения которого имеют различный характер для устойчивых (дефокусирующих) и неустойчивых (фокусирующих) сред).

Решение вблизи каустики произвольной линейной гиперболической системы с переменными коэффициентами для периодической во времени волны получено в [1] при помощи функции Эйри. Линейное решение вблизи каустики для монохроматических нестационарных волн найдено в [6—8]. Указанное решение на каустике имеет особенность, для устранения которой следует получить упрощенные нелинейные уравнения коротких волн [2] и найти их решения. Уравнения вблизи каустики в нелинейной постановке для нестационарных волн малой интенсивности получены в [3, 4, 9]. Численное решение нелинейной задачи приведено в [5, 10, 11]. Для периодических ударных волн уравнения и некоторые способы их решения даны в [12]. Представляет также интерес исследование поведения волн, близких к монохроматическим, вблизи каустики при плавном изменении амплитуд и фаз волны до образования разрывов. Общие уравнения модуляции для таких волн получены в [13—16]. При выводе уравнения модуляции аналогично геометрической оптике можно считать частоту основной волны большой [15, 16], что эквивалентно предположению о медленном изменении амплитуды и фазы.

**1. Вывод нелинейных уравнений.** Получим уравнения для медленных изменений амплитуд и фаз квазимонохроматической волны вблизи каустики. Линейное решение вблизи каустики получено в работе [1] и зависит от двух переменных [1, 3, 6—8]

$$(1.1) \quad x^* = (x - x^0)k, \quad y = (x - x^0)N$$

где  $k = \{\alpha_j\}$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots, n$  — вектор нормали к волне в точке  $A$  касания луча с каустической поверхностью,  $N$  — единичный вектор нормали к каустике в точке  $A$ , направленный в сторону ее вогнутости,  $y$  —

расстояние точки  $x$  от каустики,  $x^*$  — время пробега волны вдоль луча от  $A$  до точки  $x$ ,  $x^\circ$  — радиус-вектор точки  $A$ .

Из линейного решения следуют порядки малости параметров

$$(1.2) \quad x^* \sim \varepsilon^{3/2}, \quad y \sim \varepsilon$$

где для ступенчатой волны  $\varepsilon \sim \gamma^{1/2}$ ,  $\gamma$  — интенсивность волны вдали от каустики.

Аналогично [1, 13] рассматривается высокочастотная асимптотика задачи. Пусть в линейной постановке среда описывается уравнением

$$(1.3) \quad \Delta(ip_t, -ip_j, x)\Phi = 0$$

$$p_t = \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x^*} \frac{\partial x^*}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}, \quad p_j = \alpha_j \frac{\partial}{\partial x^*} + N_j \frac{\partial}{\partial y}$$

где  $\Delta$  — некоторый линейный оператор с переменными коэффициентами, являющийся многочленом степени  $n$ .

Согласно (1.1), второе слагаемое в  $p_t$  несущественно. Разлагая  $\Delta$  по степеням малых операторов  $N_j \partial/\partial y$ ,  $(1 + \partial x^*/\partial t)\partial/\partial x^*$  и удерживая только старшие производные, получим

$$(1.4) \quad \Delta(ip_t - ip_j, x) = \Delta(-i\partial/\partial x^*, -i\alpha_j \partial/\partial x^*, x^\circ)\Phi + L_0 + L_{1x} + L_{2x} + L_{1y} + L_{2y}$$

$$L_0 = \frac{\partial \Delta}{\partial x_k} (x_k - x_k^\circ), \quad L_{1x} = i\Delta_{-i\partial/\partial x^*} (x_k - x_k^\circ) \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x^*}$$

$$L_{2x} = \Delta_{-\partial^2/\partial x^{*2}} \left[ (x_k - x_k^\circ) \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} \right]^2 \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}}$$

$$L_{1y} = \left( -\Delta_{-i\alpha_j \partial/\partial x^*} + \Delta_{(-i\partial/\partial x^*)(-i\alpha_j \partial/\partial x^*)} \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} \right) N_j \frac{\partial}{\partial y}$$

$$L_{2y} = -\frac{1}{2} \Delta_{-\alpha_i \alpha_j \partial^2/\partial x^{*2}} N_i N_j \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Индекс при операторе  $\Delta$  означает дифференцирование, например,  $\Delta_{-i\partial/\partial x^*} = \partial \Delta / \partial (-i\partial/\partial x^*)$ .

Положим, согласно [15],  $\Phi = \psi e^{i\omega x^*}$ , что согласуется с линейным решением [1] вблизи каустики, где  $\omega$  — частота невозмущенной волны. Отсюда [15] следует, что  $\Delta \sim \omega^n$ ,  $\Delta_\omega \sim \omega^{n-1}$ ,  $\omega \sim \varepsilon^{-3/2}$ . В (1.4) будем опускать  $L_{2x}$  и второе слагаемое в  $L_{1y}$  как имеющие более высокий порядок малости  $\varepsilon^{2-3n/2}$  по сравнению с остальными членами порядка  $\varepsilon^{1-3n/2}$ . В (1.4) опущены также члены порядка  $\varepsilon^{3(1-n)/2}$ , полученные от действия операторов на переменные коэффициенты. Учитывая дисперсионное отношение в точке  $A$ , равенство  $\Delta(\omega, \alpha_j, x^\circ) = 0$ , а также соотношение  $N_j \Delta_{\alpha_j} = 0$ , для медленно меняющейся амплитуды  $\psi$  получим выражение [15]

$$(1.5) \quad e^{-i\omega x^*} \Delta \Phi = -\psi \Delta_\omega (x_j - x_j^\circ) \left( \frac{\partial \alpha_j^1}{\partial t} - \frac{\partial \alpha_j}{\partial t} \right) - \frac{1}{2} \Delta_{\alpha_i \alpha_j} N_i N_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_1^2}$$

Здесь использовано уравнение лучей

$$(1.6) \quad \frac{dx_i}{ds} = \alpha_i^*, \quad \frac{dt}{ds} = -\Delta_\omega, \quad \frac{d\alpha_j^*}{ds} = -\Delta_{x_j}, \quad \alpha_j^* = \alpha_j \omega, \quad \alpha_j = \frac{\partial x^*}{\partial x_j}$$

На основании (1.1) положим  $x_i - x_i^0 = y_1 N_i - y_1 \alpha_j N_j \Delta \alpha_i / (\alpha_k \Delta \alpha_k)$ ; обозначая

$$\lambda_1 y_1 = -\omega \Delta \omega (x_j - x_j^0) \left( \frac{\partial \alpha_j^1}{\partial t} - \frac{\partial \alpha_j}{\partial t} \right)$$

найдем

$$\lambda_1 = -\omega \Delta \omega \left( N_j - \frac{\alpha_i N_i}{\alpha_k \Delta \alpha_k} \Delta \alpha_j \right) \left( \frac{\partial \alpha_i^1}{\partial t} - \frac{\partial \alpha_j}{\partial t} \right)$$

Отсюда и из (1.5) получим уравнение

$$(1.7) \quad d^2 \psi / dy_1^2 - \kappa y_1 \psi = 0, \quad \kappa = 2\lambda_1 / (\Delta \alpha_i^* \alpha_j^* N_i N_j)$$

Решение уравнения (1.7) вблизи каустики выражается через функцию Эйри [12]  $v(y)$  в виде

$$(1.8) \quad \psi = K v(y_*) \exp [i\pi (k/2 + 3/4)] \\ y_* = y_1 \kappa^{1/3}, \quad K = B\omega$$

Здесь постоянная  $B$  характеризует лучевое решение вдали от каустики

$$\psi_\infty = (-i\omega)^{-k-1} B (-y_1)^{-1/4} \exp [2/3 i (-y_1)^{3/2}]$$

Для вывода нелинейного уравнения, описывающего медленные изменения амплитуды, в соответствии с методом, принятым в теории модуляций [13], используем нелинейное дисперсионное соотношение, которое получим вариацией усредненного лагранжиана

$$L^\circ = \int L dx dt$$

по амплитуде. Следует отметить, что учет квадратической нелинейности в нестационарных нелинейных задачах вблизи каустики, сделанный в работах [9, 10, 15] для медленно меняющихся амплитуд в недиспергирующей среде, не дает отличных от нуля добавок в (1.7). Для диспергирующей среды с квадратичной нелинейностью, например для уравнения КДВ в нелинейном дисперсионном соотношении, появляется отличное от нуля нелинейное слагаемое [15]. Для учета последнего запишем [13, 15] нелинейное дисперсионное соотношение, которое имеет место в области медленных модуляций, т. е. вдали от каустики, в виде (1.9)

$$(1.9) \quad \omega \approx \omega_0(k, x) + (\partial \omega / \partial a^2)_{a=0} a^2 \\ \omega \approx -\omega_{00} \partial (x^* + \varphi) / \partial t, \quad \omega_\infty (x^* + \varphi) = F \\ \omega_\infty = \omega_0(k^0, x^0), \quad \varphi = \varphi(y_1) \\ \omega_0 \approx \omega_{00} + \frac{\partial \omega_0}{\partial x_k} (x_k - x_k^0) + \frac{\partial \omega_0}{\partial \mathbf{k}} (\mathbf{k} - \mathbf{k}^0) + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} (\alpha_j - \alpha_j^1) (\alpha_i - \alpha_i^1)$$

Здесь  $F$  — эйконал,  $\mathbf{k}^0 = \{\alpha_j^1\}$  — значение вектора  $\mathbf{k}$  в точке  $A$ . Постоянная  $\omega_\infty$  совпадает со значением  $\omega$  в (1.5).

Используя (1.1), определение  $\alpha_j^*$  (1.6), дисперсионное уравнение для линейной задачи  $\Delta = \omega - \omega_0(\alpha_j, x_j)$  и уравнения лучей (1.6), получим

$$(1.10) \quad \lambda_1 y_1 + \frac{1}{2} \Delta \alpha_i \alpha_j N_i N_j \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \right)^2 - \left( \frac{\partial \omega}{\partial a^2} \right)_{a=0} a^2 = 0$$

Полученное соотношение представляет нелинейное уравнение для возмущенной фазы  $\varphi$ .

Предположим, что в отличие от линейного решения  $\psi$  также зависит от  $x^*$ . Тогда в (1.4) применение первого оператора в правой части к произведению  $\psi e^{i\omega x^*}$  при сохранении лишь первых производных от  $\psi$  приводит к результату

$$(1.11) \quad -\frac{\omega\Delta_\omega + \alpha_j\Delta_{\alpha_j}}{\omega} i \frac{\partial\psi}{\partial x^*} e^{i\omega x^*}$$

Тогда в правую часть (1.5) добавится слагаемое  $i\omega^{-1}(\omega\Delta_\omega + \alpha_j\Delta_{\alpha_j}) \times \times \partial\psi/\partial x^*$ ; чтобы (1.11) также имело порядок  $\varepsilon^{1-3n/2}$ , следует положить  $\partial\psi/\partial x^* \sim \psi\omega^{1/3}$ . Для недиспергирующих сред, для которых  $\Delta$  является однородной функцией, указанное слагаемое равно нулю. Это выполняется, например, для рассмотренной ниже проводящей среды. В линейной задаче добавление этого слагаемого соответствует замене функции Эйри на функцию

$$v = \text{Re} \left[ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\eta}^{\infty} \exp \left[ i \left( \frac{\tau^3}{3} + y_* \tau \right) \right] d\tau, \quad \eta = -\frac{\omega\lambda_1}{\kappa^{1/3}(\omega\Delta_\omega + \alpha_j\Delta_{\alpha_j})} x^*$$

удовлетворяющую уравнению

$$\partial^2 v / \partial y_*^2 - y_* v - i \partial v / \partial \eta = 0$$

Поскольку  $x^* \sim 1/\omega$ ,  $y_* \sim 1$ , откуда  $\tau \sim 1$ , будем считать  $\eta \approx 0$ , что соответствует отбрасыванию члена (1.11).

Положим в (1.5)  $\psi = a e^{i\varphi}$ , приравняем правую часть нулю и отделим действительную часть полученного уравнения. Получим

$$\frac{1}{2} \Delta_{\alpha_i \alpha_j} N_i N_j \left[ a \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \right)^2 - \frac{\partial^2 a}{\partial y_1^2} \right] + a \lambda_1 y_1 = 0$$

Опуская дифракционное слагаемое  $\partial^2 a / \partial y_1^2$  и сравнивая с уравнением (1.10), получим нелинейное уравнение вблизи каустики в виде

$$(1.12) \quad \frac{1}{2} \Delta_{\alpha_i \alpha_j} N_i N_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_1^2} - \lambda_1 y_1 \psi + \Delta_\omega \left( \frac{\partial \omega}{\partial a^2} \right)_{a=0} \psi |\psi|^2 = 0$$

Для дефокусирующей среды  $\partial\omega/\partial a^2 > 0$  и уравнение (1.12) вблизи каустики запишем в виде

$$(1.13) \quad \begin{aligned} \partial^2 \psi_1 / \partial y_*^2 - y_* \psi_1 - \psi_1 |\psi_1|^2 &= 0 \\ \psi &= \psi_1 \mu \exp [i\pi (k/2 + 3/4)] \\ \mu &= \{-\lambda_1 v / [\Delta_\omega (\partial\omega/\partial a^2)_{a=0}]\}^{1/2} \\ v &= \kappa^{-1/3}, \lambda_1 < 0, \Delta_\omega > 0 \end{aligned}$$

Так как в силу (1.8) в линейной задаче  $\psi_1$  действительно, то в нелинейной задаче положим  $|\psi_1|^2 = \psi_1^2$ . Линейная асимптотика для  $\psi_1$  имеет вид

$$(1.14) \quad \psi_1 = K \mu^{-1} v(y_*)$$

Решение уравнения (1.13) вдали от каустики будем искать методом медленно меняющихся амплитуд и фаз; тогда, после отделения действи-

тельной и мнимой части, получим уравнения

$$(1.15) \quad a \left( \frac{d\varphi}{dy_*} \right)^2 - \frac{\partial^2 a}{\partial y_*^2} + y_* a + a^3 = 0, \quad a \frac{d^2 \varphi}{dy_*^2} + 2 \frac{\partial a}{\partial y_*} \frac{\partial \varphi}{\partial y_*} = 0$$

При отбрасывании дифракционного члена  $\partial^2 a / \partial y_*^2$  получим нелинейное дисперсионное соотношение; опуская, кроме того, нелинейный член  $a^3$ , получим уравнение, решение которого для больших по модулю отрицательных  $y_*$  дается асимптотикой (1.8). Коэффициенты уравнений (1.12) конкретизируются для различных сред.

1°. Получим коэффициенты для уравнений электродинамики тонких пучков. Запишем уравнение для напряженности  $E$  электрического поля в предположении  $\varepsilon_2 a^2 \ll \varepsilon_0$  [13] в виде

$$(1.16) \quad \nabla^2 E + \nabla \left( \frac{\nabla \varepsilon_0}{\varepsilon_0} E \right) + k^2 (1 + \varepsilon_2 a^2) E = 0$$

решение которого для монохроматической волны имеет вид

$$E = (ae_0 \exp(-i\tau) + ae_0 \exp(i\tau)), \quad k = \omega \sqrt{\varepsilon_0} / c, \quad \partial \tau / \partial t = -1, \quad \partial \tau / \partial x_i = \alpha_i^*, \quad E = (E_1 + E_2) / 2$$

Здесь  $e_0$  — единичный вектор линейной поляризации,  $\nabla$  — оператор Гамильтона,  $a = |E_1|$ ,  $c$  — скорость света,  $\tau$  — эйконал,  $\varepsilon_0, \varepsilon_0 (1 + \varepsilon_2 |E_1|^2)$  — показатель преломления соответственно в линейной и нелинейной среде. Линейное дисперсионное соотношение выберем в виде

$$\Delta = \omega_0 - c \left( \sum_{j=1}^3 \alpha_j^{*2} \right)^{1/2} \varepsilon_0^{-1/2}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha_j^*} &= -c \varepsilon_0^{-1/2} \alpha_j^* / a, \quad \Delta_{\alpha_i^* \alpha_j^*} N_i N_j = -c^2 / (\varepsilon_0 \omega_0) \\ \partial \omega / \partial a^2 &= -1/2 \varepsilon_2 \omega_0 < 0, \quad \lambda_1 = -\omega / R \\ R^{-1} &= R_s^{-1} - R_r^{-1}, \quad a = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)^{1/2} \end{aligned}$$

Здесь  $R_r^{-1}$  — проекция вектора кривизны луча на нормаль к каустике,  $R_s^{-1}$  — проекция вектора кривизны соответствующего поверхностного луча на нормаль к каустике; уравнение (1.12) принимает вид

$$(1.17) \quad \frac{c^2}{2\varepsilon_0 \omega_0} \frac{d^2 \psi}{dy_1^2} - \frac{\omega_0}{R} y_1 \psi + \frac{\omega_0 \varepsilon_0}{2} \psi |\psi|^2 = 0$$

Уравнение (1.17) относится к фокусирующей среде, в которой  $(\partial \omega / \partial a^2)_{a=0} < 0$ . При этом вместо (1.13) получится уравнение

$$(1.18) \quad \frac{d^2 \psi_1}{dy_*^2} - y_* \psi_1 + \psi_1^3 = 0, \quad \mu = \{ \lambda_1 v / [\Delta_\omega (\partial \omega / \partial a^2)_{a=0}] \}^{1/2}$$

2°. Для волн на поверхности глубокой волны получим нелинейное дисперсионное соотношение в виде [14]

$$\omega^2 = g \alpha^* (1 + \alpha^{*2} a^2), \quad \alpha^* = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{1/2}$$

Здесь  $a$  — амплитуда возвышения поверхности жидкости,  $g$  — ускорение силы тяжести. В этом случае аналогичным образом можно конкретизировать коэффициенты уравнения (1.12). Линейное дисперсионное уравнение имеет вид  $\Delta = \omega_0 - \sqrt{g a^*}$ , тогда

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha_j^*} &= -\frac{g^{1/2} \alpha_1^*}{2 \alpha^{*3/2}}, \quad \Delta_{\alpha_i^* \alpha_j^*} N_i N_j = -\frac{g^{1/2}}{2 \alpha^{*3/2}} \\ \alpha_1 &= -\frac{\omega_0}{2R}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial a^2} = \frac{1}{2} \omega_0 \alpha^{*2} \end{aligned}$$

и уравнение (1.12) запишется в виде

$$(1.19) \quad \frac{g^{1/2}}{4\alpha^{*3/2}} \frac{d^2\psi}{dy_1^2} - \frac{\omega_0}{2R} y_1\psi - \frac{1}{2} \alpha^{*2} \omega_0 \psi |\psi|^2 = 0$$

Таким образом, уравнение (1.19) относится к дефокусирующей среде и приводится к виду (1.13).

3°. Для волн на поверхности воды конечной глубины  $h_0$  нелинейное дисперсионное соотношение записывается в виде [13]

$$(1.20) \quad \omega = \omega_0(k) + \Omega_2(k) \frac{k^2 g a^2}{2c_0}$$

$$\Omega_2(k) = \frac{9T_0^4 - 10T_0^2 + 9}{8T_0^3} - \frac{1}{kh_0} \left\{ \frac{(2C_0 - c_0/2)^2}{gh_0 - C_0^2} + 1 \right\}$$

$$T_0 = \text{th}(kh_0), \quad \omega_0^2(k) = gk \text{th}(kh_0), \quad C_0 = \omega_0'(k), \quad c_0 = \frac{\omega_0}{k}$$

Как показано в [13],  $\omega_0'' < 0$ ,  $\Omega_2 > 0$  при  $kh_0 > 1,36$ ,  $\Omega_2 < 0$  при  $kh_0 < 1,36$ . Таким образом, для волн на глубокой воде  $(\partial\omega / \partial a^2)_{a=0} > 0$  и имеет место поперечная устойчивость волны [16]. Среда — дефокусирующая по отношению к поперечным возмущениям, т. е. вблизи каустики уравнение приводится к (1.13). Для неглубокой воды  $(\partial\omega / \partial a^2)_{a=0} < 0$  среда является фокусирующей и имеет место (1.18).

4°. Определим нелинейное дисперсионное соотношение для волн на поверхности воды бесконечной глубины, покрытой тонкой упругой пластиной. Для простоты учтем лишь физическую нелинейность, определяемую нелинейным модулем сдвига  $\gamma_2 G$ , где  $G$  — линейный модуль сдвига [17]. Лагранжиан  $L$  записывается в виде суммы  $L_0 + L_1$ , где  $L_0$  — лагранжиан для воды,  $L_1$  — лагранжиан для пластины. Записывая, как и в [13], возвышение воды в виде квазимонохроматических волн  $h' = a \cos \tau + b \sin \tau$ , вводя осредненный лагранжиан

$$L^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L d\tau$$

и варьируя  $L^*$  по  $a$ , аналогично [18] получим

$$(1.21) \quad \omega_0 \left( \frac{\partial\omega}{\partial a^2} \right)_{a=0} = \frac{T}{\rho h + \rho' k^{-1}}$$

$$T = \frac{\gamma_2 G h^5 k^8 (1 - \nu + \nu^2)^2}{180 (1 - \nu)^4} + \frac{1}{4} \omega_0^2 \rho' k \left( 3 - \frac{2\kappa}{k} \right)$$

$$\omega_0^2(k) = \frac{6g\rho' (1 - \nu) + Gh^3 k^4}{6(1 - \nu)(\rho h + \rho' k^{-1})}$$

$$\kappa = \frac{\rho^1 \omega_0^2(k)}{2g\rho' - 8h\rho\omega_0^2(k) + 166h^3 k^4 (1 - \nu)^{-1/3}}$$

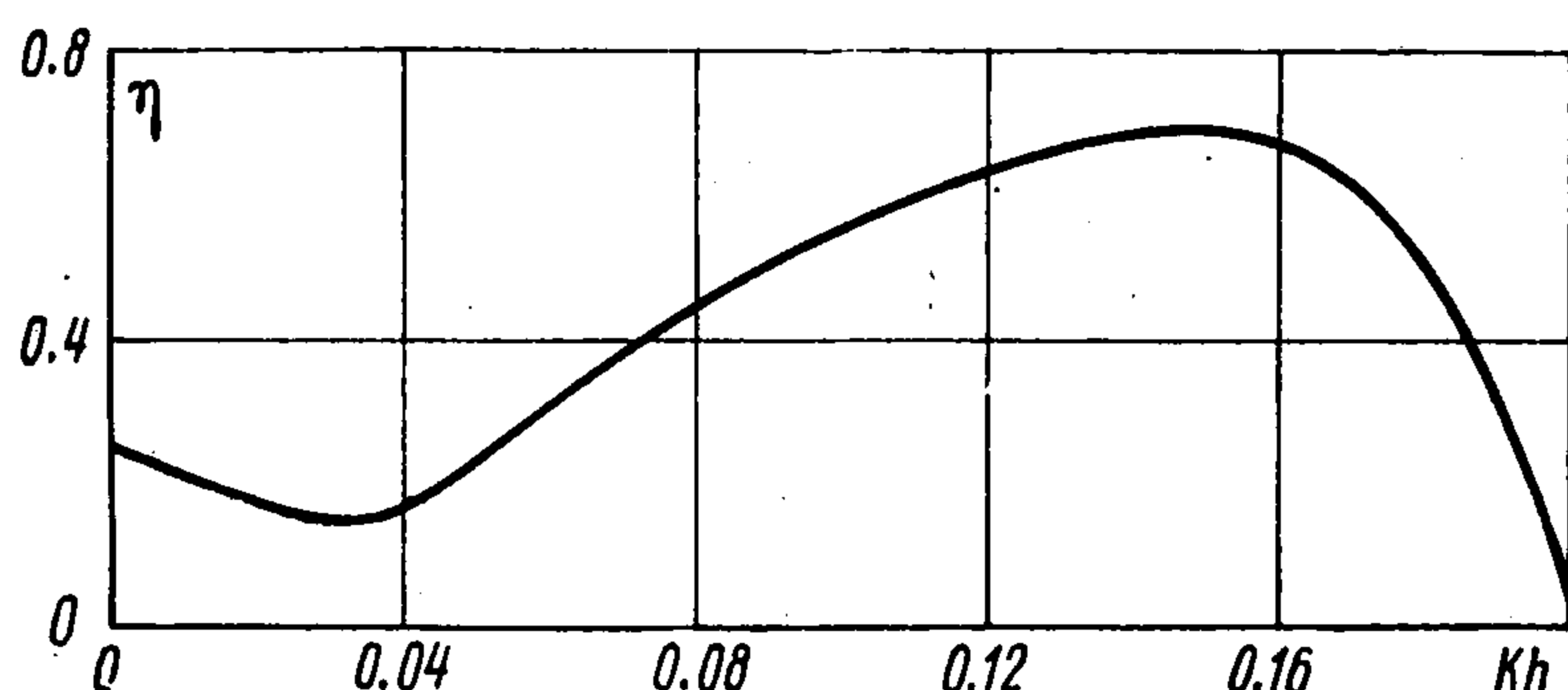
Здесь  $\omega_0$  — частота линейной задачи,  $\rho'$ ,  $\rho$  — соответственно плотности жидкости и пластины,  $h$  — толщина пластины,  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

При  $\rho' = 0$  получим нелинейное дисперсионное соотношение для пластины

$$(1.22) \quad \omega_0 \left( \frac{\partial\omega}{\partial a^2} \right)_{a=0} = \frac{\gamma_2 G h^4 k^8 (1 - \nu + \nu^2)^2}{18(\rho (1 - \nu)^4)}, \quad \omega_0^2 = \frac{G h^2 k^4}{6(1 - \nu)\rho}$$

Для несжимаемой пластины, где  $\nu = 1/2$ , формула (1.22) получена в [18]. Для металлических пластин  $\gamma_2 < 0$  [17], поэтому  $(\partial\omega / \partial a^2)_{a=0} < 0$ , т. е. среда является фокусирующей [18]. Представляет интерес исследование знака величины  $(\partial\omega / \partial a^2)_{a=0}$  в зависимости от значений  $\xi = G / (h g \rho')$ ,  $\gamma_2$ ,  $kh$ . Расчеты проведены для фиксированных значений  $\gamma_2 = 10^6$ ,  $\xi = 10^8$ ,  $\xi = 10^4$  и  $\gamma_2 = -10^2$ ,  $\xi = 10^8$ ,  $\xi = 10^4$  для  $kh$ , изменяющимся от 0 до 0,5. В первом варианте при  $\gamma_2 = -10^6$ ,  $\xi = 10^3$  получено  $(\partial\omega / \partial a^2) < 0$  всюду, кроме  $kh = 0$ , где  $(\partial\omega / \partial a^2)_{a=0} = 0,25$ . Во втором варианте  $(\partial\omega / \partial a^2)_{a=0}$  при увеличении  $kh$  меняет знак. На фиг. 1 приведена зависимость  $\eta = (\partial\omega / \partial a^2)_{a=0} \omega_0 (gk^3)^{-1}$

от  $kh$ . Из результатов, приведенных на фиг. 1, следует, что для  $0 < kh < 0,21$  среда является дефокусирующей по отношению к поперечным колебаниям и фокусирующей при  $kh \geq 0,21$ . Следует отметить, что представление  $\psi = ae^{i\psi}$  имеет смысл лишь вдали от каустики, где падающая и отраженная волны разделяются, а вблизи каустики следует решать уравнения (1.13), (1.18), связывая для больших  $|y_*|$  значения  $\psi_1$  с линейной асимптотикой (1.8).



Фиг. 1

**2. Постановка и решение граничной задачи.** Найдем решение уравнения (1.18) или (1.13), где  $|\psi_1|^2 = \psi_1^2$ , вблизи каустики при заданной асимптотике (1.8). Уравнения (1.13), (1.18) являются уравнениями Пенлеве и обладают двумя подвижными особыми точками [19]. Поэтому, если задавать условие Коши в точке  $y_* = -5$ , которую мы считаем достаточно удаленной от каустики, то указанная задача о начальных условиях не имеет непрерывного решения. Численный счет показывает, что решение задачи Коши быстро стремится к  $\infty$ . Приближенно можно заменить указанную в начале параграфа задачу граничной задачей для отрезка  $[-5, 5]$ , на концах которого  $\psi_1$  задано согласно линейному решению (1.8). Таким образом решается задача для дифференциального уравнения второго порядка

$$(2.1) \quad \psi_1'' = y\psi_1 \pm \psi_1^3, \quad \psi_1^- = Kv^-/\mu, \quad \psi_1^+ = Kv^+/\mu \\ f^- = f(-5), \quad f^+ = f(+5)$$

Здесь  $v(y)$  — функция Эйри,  $K = \text{const}$ . Тем самым требуем, чтобы на границах решение уравнения (2.1) срачивалось с линейным решением. Для получения однородных граничных условий обозначим  $\psi^* = \psi_1 - Kv(y)/\mu$ , тогда исходная задача (2.1) примет вид

$$(2.2) \quad \psi^{*''} = \psi^*y \pm (\psi^* + Kv/\mu)^3, \quad \psi^{*-} = \psi^{*+} = 0$$

Решение этого уравнения ищем в виде

$$(2.3) \quad \psi^+ = \pm \int_{-5}^5 G(y, \xi) \left[ \psi^*(\xi) + \frac{Kv(\xi)}{\mu} \right]^3 d\xi$$

Здесь  $G(y, \xi)$  — функция Грина, удовлетворяющая уравнению  $G'' = yG + \delta(y - \xi)$ , где  $\delta$  — дельта-функция. Функцию  $G$  разобьем на две части

$$-5 < y < \xi, \quad G(y, \xi) = \psi_1^*(y, \xi) \\ \xi < y < 5, \quad G(y, \xi) = \psi_2^*(y, \xi)$$

Здесь  $\psi_{1,2}^*$  являются решениями линейного уравнения. Их находим методом неопределенных коэффициентов

$$\psi_1^* = c_1 v(y) + c_1^* u(y), \quad \psi_2^* = c_2 v(y) + c_2^* u(y)$$

Для функции  $\psi_1^*$ ,  $\psi_2^*$  верны следующие соотношения:

$$(2.4) \quad \psi_1^*(\xi, \xi) = \psi_2^*(\xi, \xi), \quad \psi_2^{*\prime}(\xi, \xi) - \psi_1^{*\prime}(\xi, \xi) = 1$$

Используя соотношения (2.4) и граничные условия, получим следующие значения коэффициентов  $c_1$ ,  $c_1^*$ ,  $c_2$ ,  $c_2^*$ :

$$c_1 = d^{-1} [-p_2 u^+ u^- + p_2 v^+ u^-], \quad c_1^* = d^{-1} [p_2 u^+ v^- - p_1 v^+ v^-]$$

$$c_2 = d^{-1} [-p_2 u^+ u^- + p_1 u^+ v^-], \quad c_2^* = d^{-1} [p_2 u^- v^+ - p_1 v^+ v^-]$$

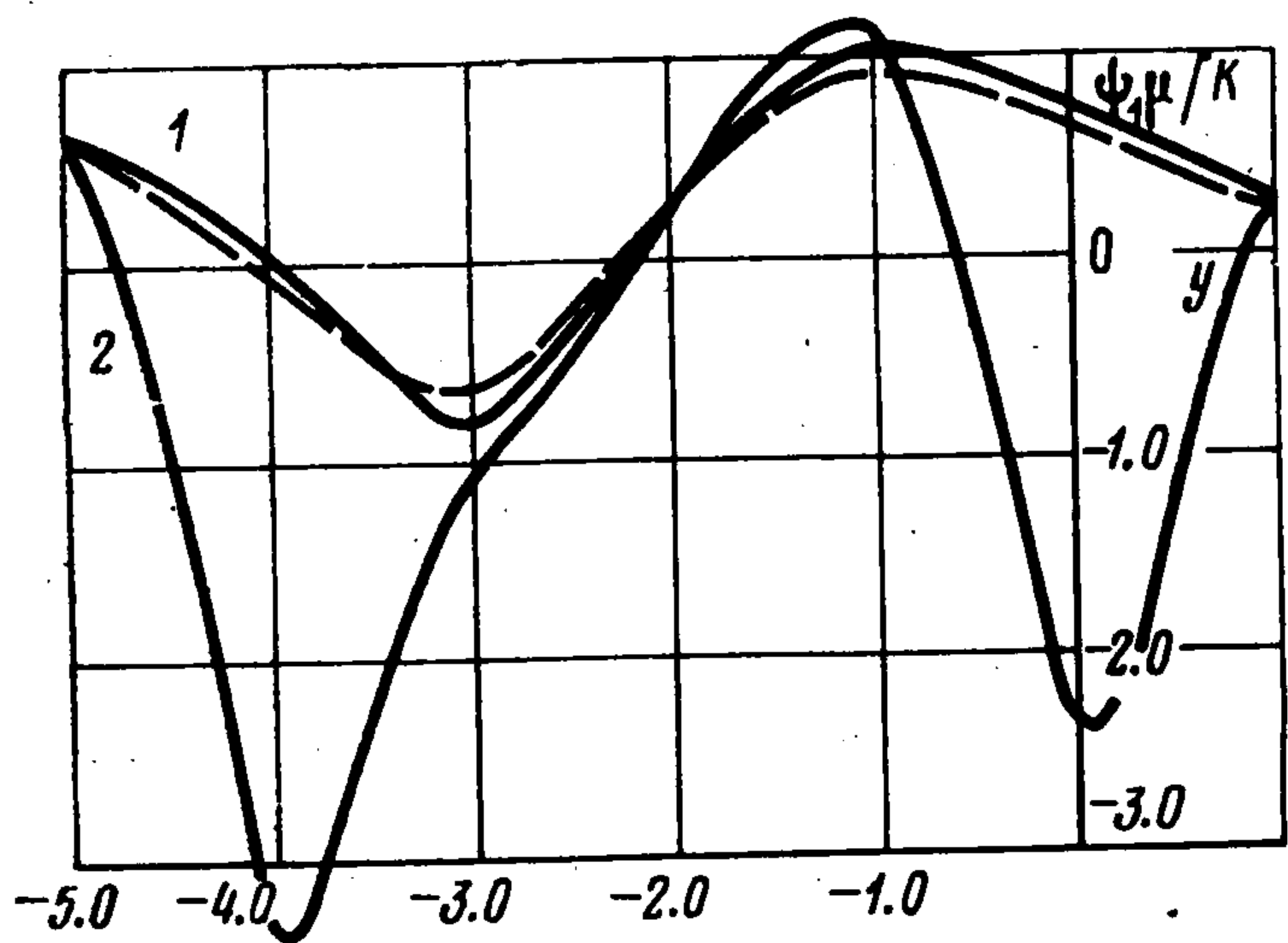
$$d = u^+ v^- + u^- v^+, \quad p_1 = u(\xi)/w(\xi), \quad p_2 = v(\xi)/w(\xi)$$

$$w(\xi) = u(\xi) v'(\xi) - v(\xi) u'(\xi)$$

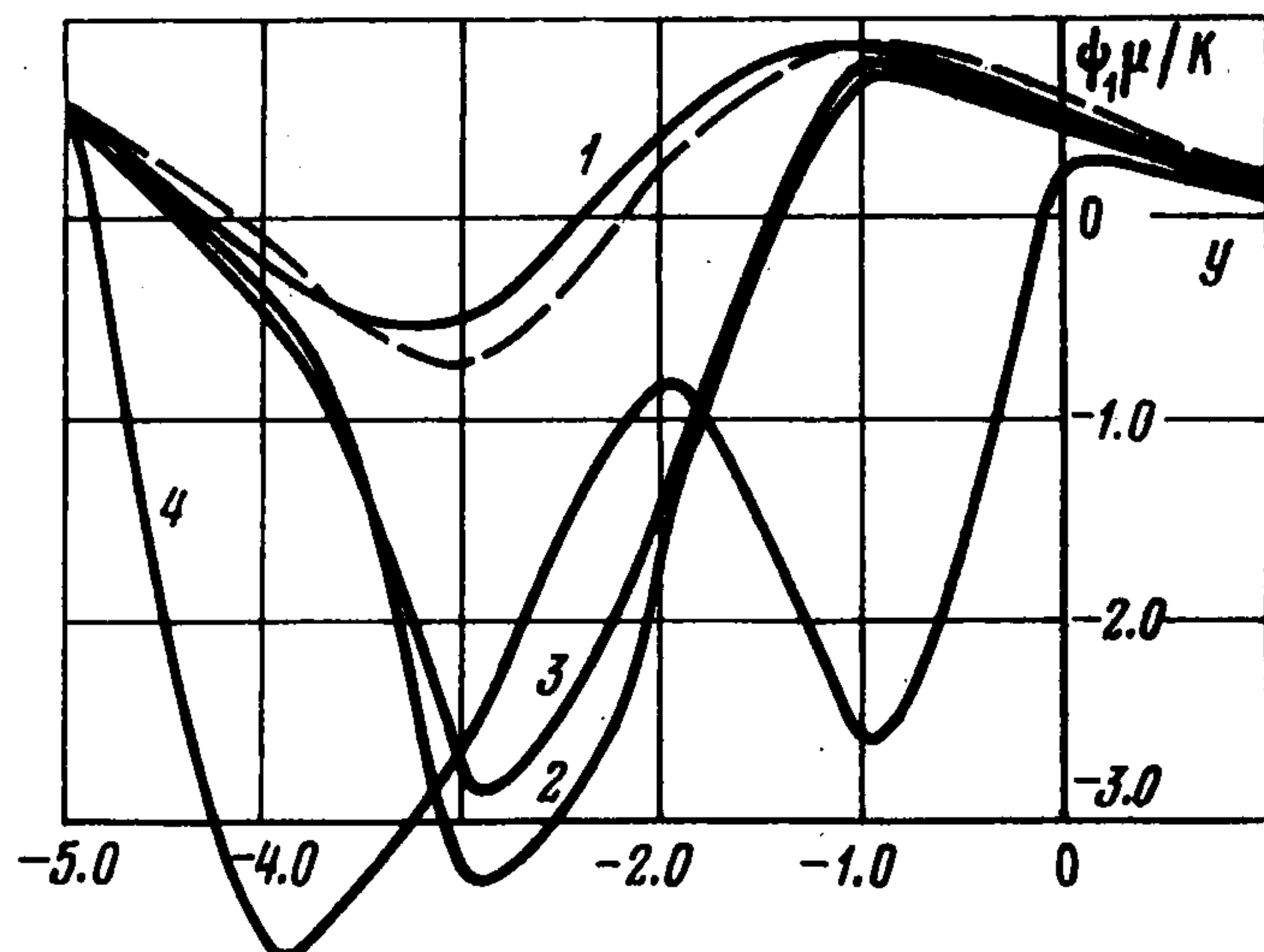
Функция (2.3) удовлетворяет уравнению (2.2). Таким образом, решение дифференциального уравнения сводится к решению следующего интегрального уравнения:

$$(2.5) \quad \psi^* = \pm \int_{-5}^y \psi_2^*(y, \xi) \left( \psi^* + \frac{Kv}{\mu} \right)^3 d\xi \pm \int_y^5 \psi_1^*(y, \xi) \left( \psi^* + \frac{Kv}{\mu} \right)^3 d\xi$$

Это уравнение решается усовершенствованным методом последовательных приближений [20], в качестве нулевого приближения выбира-



Фиг. 2



Фиг. 3

ется линейное решение. Результаты расчетов для фокусирующей среды приводятся на фиг. 2. Здесь кривая 1 соответствует решению  $\psi_1/(K/\mu)$  для значения  $K/\mu = 0,4$ , кривая 2 — для  $K/\mu = 0,5$ . Результаты расчетов для дефокусирующей среды приведены на фиг. 3, где кривые 1—4 соответствуют значениям  $K/\mu = 0,4; 0,5; 0,7; 1,0$ . Линейное решение на фиг. 2 и 3 изображено штриховой линией; отметим хорошее совпадение с нелинейным решением для  $y = \pm 5$ . Как видно из полученных результатов, нелинейность вносит существенные изменения в распределение интенсивности по нормали к каустике при переходе из области света в область тени. В линейной задаче эти изменения достаточно гладкие. В нелинейной задаче происходят резкие изменения решения на волне,

имеющие «солитонный характер» [16], при этом для дефокусирующей среды (фиг. 3) величины всплесков меньше, чем для фокусирующей (фиг. 2).

3. Об отсутствии ветвления решения граничной задачи. Докажем единственность решения граничной задачи (2.1) при достаточно малом  $\varepsilon$ . Обозначим  $\psi^* = K\varphi/\mu$ ,  $\varepsilon = \pm (K/\mu)^2$ , тогда (2.2) приведет к виду

$$(3.1) \quad \varphi'' = y\varphi + \varepsilon(\varphi + v)^3, \quad \varphi|_{y=c} = \varphi|_{y=b} = 0$$

При исследовании единственности решения воспользуемся результатами работы [21], согласно которой для уравнения (3.1) следует рассмотреть задачу Коши

$$(3.2) \quad \varphi'' = y\varphi + \varepsilon(\varphi + v)^3, \quad \varphi|_{y=c} = 0, \quad \varphi'|_{y=c} = a$$

Здесь  $a$  — параметр, определяемый из второго условия (3.1). Решение этой задачи ищем в виде

$$\varphi = c_1(y)v(y) + c_2(y)u(y)'$$

Из (3.2) получим

$$\varphi = \left[ \int_c^y \frac{\varepsilon u U^3 d\xi}{uv' - vu'} + c_1^* \right] v(y) + \left[ - \int_c^y \frac{\varepsilon v U^3 d\xi}{uv' - vu'} + c_2^* \right] u(y)$$

$$U = v + c_1 v + c_2 u, \quad c_1^* = -c_2^* = \frac{au(c)}{u(c)v'(c) - v(c)u'(c)}$$

Здесь при вычислении значений  $c_1^*$  и  $c_2^*$  использовано граничное условие при  $y = c$ . Воспользовавшись вторым граничным условием, получим

$$(3.3) \quad \left[ \int_c^b \frac{\varepsilon u U^3 d\xi}{uv' - vu'} + c_1 \right] v(b) + \left[ - \int_c^b \frac{\varepsilon v U^3 d\xi}{uv' - vu'} + c_2 \right] u(b) = 0$$

Если из (3.3) параметр  $a$  определяется однозначно, то, согласно [21], задача (3.1) также будет иметь однозначное решение. Из (3.3) для  $a$  получим

$$(3.4) \quad a = \frac{(A_{uv} - A_{vu})D(c)}{B}, \quad A_{uv} = u(b) \int_c^b \frac{\varepsilon v U^3 d\xi}{D(\xi)}$$

$$D(\xi) = uv' - vu', \quad B = u(c)v(b) - v(c)u(b)$$

Пусть  $\varepsilon$  достаточно мало, тогда  $c_1 \sim c_1^* \sim c_2 \sim c_2^* \sim a \sim \varepsilon$  и, отбрасывая в  $U$  малые порядка  $\varepsilon$ , будем считать  $U = v$  в правой части (3.4). Таким образом,  $a$  определяется однозначно и в силу теоремы 1 работы [21] задача имеет однозначное решение.

Автор статьи благодарит А. Г. Багдоева за помощь в работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ludwig D. Uniform asymptotic expansions at a caustic. — *Communs Pure and Appl. Math.*, 1966, v. 19, No. 6, p. 216.
2. Газарян Ю. Л. О распространении звука в неоднородных средах. В сб.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, № 5. Изд-во ЛГУ, 1961, с. 73.
3. Бабич В. М. Аналитический характер поля нестационарной волны в окрестности каустики. — В сб.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, № 5. Изд-во ЛГУ, 1961, с. 115.
4. Багдоев А. Г., Оганян Г. Г. Определение параметров газа вблизи каустики. — Докл. АН АрмССР, 1969, 49, № 2, с. 69.
5. Рыжов О. С., Христианович С. А. О нелинейном отражении слабых ударных волн. — ПММ, 1958, т. 22, вып. 5.

6. Багдоев А. Г. Определение параметров движения среды вблизи каустики.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1970, 23, № 2, с. 31.
7. Багдоев А. Г. Некоторые нелинейные задачи о движении сжимаемой жидкости. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1967.
8. Gtirand J. P. Le acoustique geometrique et la focalisation.— Compt. rend. Acad. sci. colon., 1965, v. 260, No. 6.
9. Scelass R., Murman E. M., Krupp J. A. Finite difference calculation of the Behavior of a discontinuous signal near a caustic. 3 rd Conf. on sonic Boom research. Washington, 1970. Washington, NASA, 1971.
10. Еременко В. А., Рыжов О. С. О структуре потока в окрестности точки пересечения ударной волны с каустикой.— Докл. АН СССР, 1978, т. 238, № 3.
11. Манукян С. М. О численном расчете окрестности каустики.— Уч. зап. Ереванск. ун-та, 1976, № 1, с. 12.
12. Манукян С. М. Численный расчет нелинейной задачи распространения периодических ударных волн вблизи каустики.— Уч. зап. Ереванск. ун-та, 1976, № 2, с. 16.
13. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
14. Литвак А. Г., Фрайман Г. М., Юнаковский А. Д. О самофокусировке аксиально-симметричных пучков электромагнитных волн.— Тр. Всес. симпозиума по теории дифракций и распространению волн. Цахкадзор, 1973. т. 2, Ереван.
15. Багдоев А. Г. Определение окрестности фронтов волн в пространственной задаче.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1977, т. 30, № 6.
16. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973.
17. Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А. К вопросу распространения изгибных волн в нелинейно-упругих пластинах.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1979, т. 32; № 5, 79.
18. Каудерер К. Нелинейная механика. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
19. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.—Л.: Гостехиздат, 1950.
20. Мак-Кракен Д., Дорн У. Численные методы и программирование на ФОРТЭ АНЭ. М.: Мир, 1977.
21. Келлер Дж. Б. Теория ветвления решений обыкновенных дифференциальных уравнений.— В сб.: Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения. М., Мир, 1974.

Поступила в редакцию  
26.VI.1979