

УДК 532.527

СЕМЕЙСТВО ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ С ПОВЕРХНОСТЬЮ РАЗРЫВА ПОСТОЯННОЙ БЕРНУЛЛИ

Кожуро Л. А.

(Москва)

Рассматривается однопараметрический класс стационарных осесимметричных вихревых течений несжимаемой невязкой жидкости с завихренностью, удовлетворяющей условию Прандтля — Бэтчелора. На поверхности тока, разделяющей внешний потенциальный поток и область вихревого течения, постоянная Бернулли испытывает разрыв и меняется скачком на заданную величину. Задача нахождения функции тока сведена к системе двух нелинейных интегральных уравнений относительно границы области вихревого течения и интенсивности расположенной на ней вихревой пелены. Приведены результаты численного решения.

Ранее [1—3] было установлено существование стационарных осесимметричных вихревых колец в идеальной жидкости, близких к круговой вихревой нити и сферическому вихрю Хилла, и дано описание течений этого типа. Было получено [4] численное решение для семейства вихревых колец, связывающее эти асимптотические результаты. Вихревое течение внутри ядра каждого кольца характеризуется постоянством отношения завихренности к расстоянию от оси симметрии; постоянная Бернулли в потоке непрерывна. Введенный в работе [4] параметр α (безразмерный средний радиус ядра вихревого кольца), выделяющий единственное решение из семейства, принимает значения из диапазона от нуля (круговая вихревая нить) до $\sqrt{2}$ (сферический вихрь Хилла).

Рассматриваемое в данной работе семейство вихревых течений характеризуется значениями параметра $\alpha > \sqrt{2}$ и разрывом постоянной Бернулли на границе вихревого течения. Одним из предельных случаев для этого семейства течений также является сферический вихрь Хилла. Предположение о существовании семейства примыкающих к вихрю Хилла осесимметричных вихревых течений с разрывом постоянной Бернулли было высказано в работе [5]. Существование аналогичного однопараметрического класса вихревых течений в плоском случае было установлено в [6], где приведены также предварительные результаты исследования осесимметричного класса вихревых течений, существенно уточненные ниже.

1. Рассмотрим однородное на бесконечности стационарное осесимметричное течение несжимаемой невязкой жидкости, вихревое внутри некоторой ограниченной области Ω и потенциальное вне ее. Пусть завихренность вихревого течения удовлетворяет условию Прандтля — Бэтчелора, т. е. в цилиндрической системе координат x, r, φ

$$\text{rot } \mathbf{v} = (0, 0, Wr)$$

где \mathbf{v} — скорость жидкости, а W — постоянная величина. Все величины безразмерные, за единицу скорости принята скорость невозмущенного потока, за единицу длины — наибольший продольный размер области вихревого течения. Система координат в осевой плоскости показана на фиг. 1.

Пусть на поверхности тока S , являющейся границей области Ω , постоянная Бернулли испытывает разрыв. Из интеграла Бернулли и условия непрерывности давления следует, что в этом случае на поверхности S должно выполняться условие

$$(1.1) \quad v_e^2 - v_i^2 = \Delta$$

Здесь Δ — постоянная, равная удвоенному скачку постоянной Бернулли, а индексы e и i соответствуют внешним и внутренним предельным значениям на поверхности S .

Для функции тока Стокса ψ , введенной обычным образом

$$(1.2) \quad \mathbf{v} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}, 0 \right)$$

на основании сказанного выше имеем следующую задачу: при заданном значении параметра $\Delta > 0$ определить параметр W , границу S области вихревого течения и функцию тока ψ , удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = \begin{cases} -Wr^2 & \text{внутри } \Omega \\ 0 & \text{вне } \Omega \end{cases}$$

и следующим условиям:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \psi &\rightarrow \frac{1}{2} r^2 \quad \text{при } x^2 + r^2 \rightarrow \infty \\ \psi|_S &= \text{const}; \quad |\nabla \psi|_e^2 - |\nabla \psi|_i^2 = r^2 \Delta \end{aligned}$$

Здесь ∇ — оператор Гамильтона. Последнее условие следует из (1.1).

2. Для осесимметричного течения без азимутального движения векторный потенциал

$$(2.1) \quad \mathbf{A} = (0, 0, \psi / r)$$

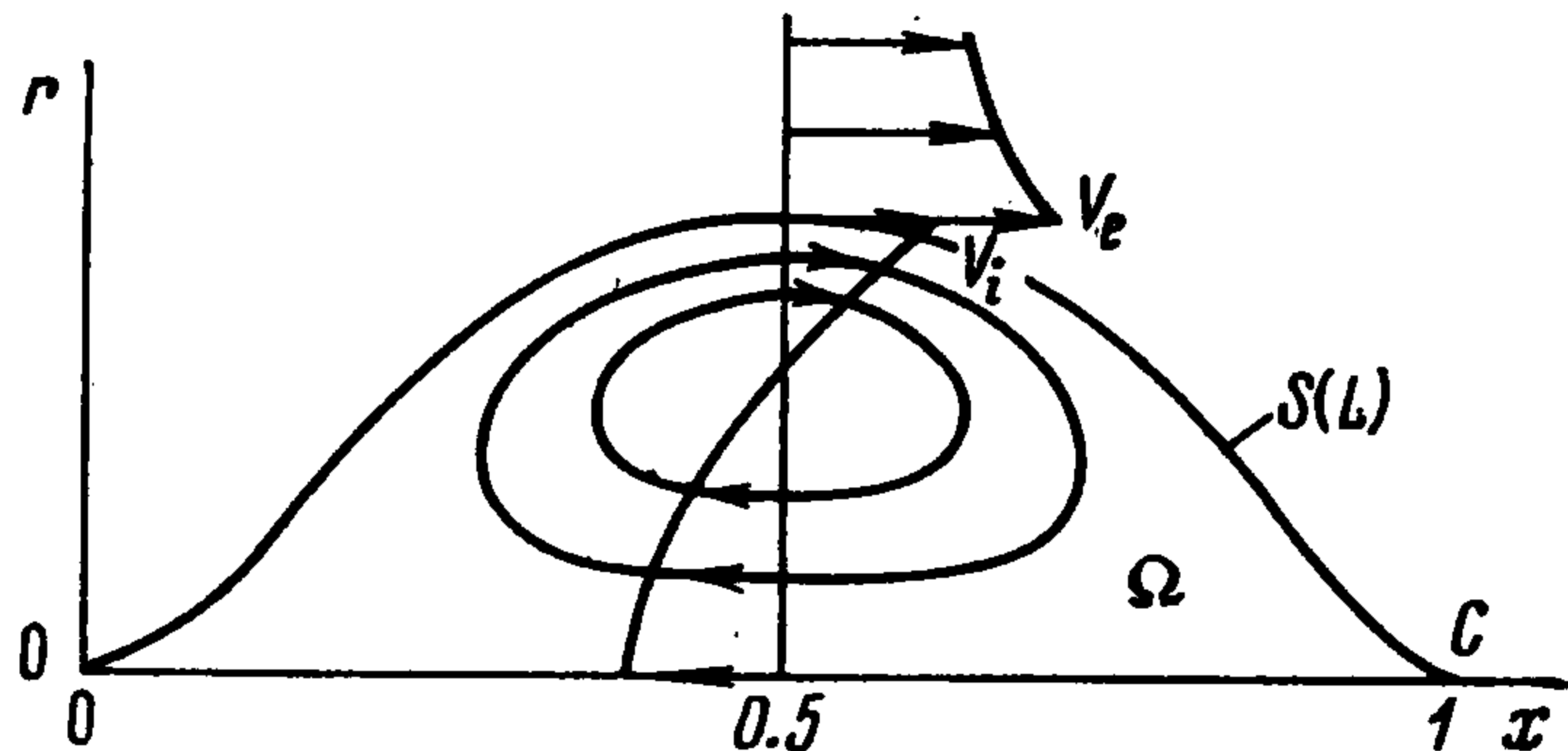
При заданном распределении завихренности $\omega = \text{rot } \mathbf{v}$ векторный потенциал, как известно, удовлетворяет уравнению Пуассона, и поэтому может быть представлен в виде

$$(2.2) \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\omega'}{R} dV(\mathbf{r}'), \quad R = [(x-x')^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \vartheta]^{1/2}, \quad \vartheta = \varphi - \varphi'$$

где R — расстояние между точкой \mathbf{r} и точкой интегрирования \mathbf{r}' , а интеграл берется по объему, занятому жидкостью.

Наличие разрыва постоянной Бернулли на границе области вихревого течения означает, что S — вихревая поверхность с интенсивностью $\omega = -(v_e - v_i)$. Согласно (2.1), (2.2), и с учетом первого условия (1.3) функция тока имеет вид

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \psi(x, r) &= \frac{1}{2} r^2 + r(A_1 + A_2) \\ A_1 &= \frac{W}{4\pi} \iiint \frac{r' \cos \vartheta}{R} d\Omega, \quad A_2 = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\omega' \cos \vartheta}{R} dS \end{aligned}$$



Фиг. 1

В декартовой системе координат x, y, z с началом координат в точке O (фиг. 1), ось Oy которой совпадает с осью Or цилиндрической системы координат x, r, φ при $\varphi = 0$, компоненты векторного потенциала в направлении оси Oz

$$A_1^\circ = \frac{W}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{r' \cos \varphi'}{R} d\Omega, \quad A_2^\circ = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\omega' \cos \varphi'}{R} dS$$

представляют собой потенциалы непрерывного распределения и простого слоя соответственно. Пусть кривизна поверхности S конечна во всех точках, за исключением точек O и C (фиг. 1). При $\varphi = 0$ и $y = r$ функции A_1 и A_2 совпадают, соответственно, с A_1° и A_2° , поэтому, используя известные свойства потенциалов и учитывая осесимметричность течения, можно заключить, что функции A_1, A_2 и частные производные первого порядка функции A_1 непрерывны при переходе через поверхность S , а частные производные функции A_2 испытывают на этой поверхности разрыв. Используя соотношения для предельных значений производных потенциала простого слоя по нормали к поверхности, получим, что для всех точек поверхности S , не совпадающих с точками O и C

$$\frac{\partial A_2}{\partial n_e} + \frac{\partial A_2}{\partial n_i} = 2 \frac{\partial A_2}{\partial n_0} = \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{\omega' \cos \vartheta \cos \gamma}{R^2} dS$$

где γ — угол между внешней нормалью в рассматриваемой точке поверхности и радиус-вектором, проведенным из этой точки в точку интегрирования.

Считая, что S_i^* — поверхность тока, т. е. функция тока на ней постоянна, из (1.2) и (2.3) получим (n_r — проекция внешней нормали к поверхности S на ось Or)

$$v_{e,i} = \left[\frac{\partial A_1}{\partial n} + \frac{\partial A_2}{\partial n} + \left(1 + \frac{A_1 + A_2}{r} \right) n_r \right]_{e,i}$$

Последнее условие (1.3) принимает вид

$$(2.4) \quad \Delta = -\omega(v_e + v_i) = -2\omega \left[\frac{\partial A_1}{\partial n} + \frac{\partial A_2}{\partial n} + \left(1 + \frac{A_1 + A_2}{r} \right) n_r \right], \quad (x, r) \in L'$$

Здесь L' — кривая L (которая получается при пересечении поверхности S осевой плоскостью $\varphi = \text{const}$) с исключенными точками O и C .

Второе условие (1.3) приводит к уравнению

$$(2.5) \quad \frac{1}{2} r + A_1(x, r) + A_2(x, r) = 0, \quad (x, r) \in L$$

Итак, получена система уравнений (2.4) и (2.5) относительно неизвестных функций $\omega(x)$ и $f(x)$ и ($r = f(x)$ — уравнение кривой L), в которую входит неизвестный параметр W .

Рассмотрим граничные условия, которым должны удовлетворять функции f и ω . Граница области вихревого течения в точках ее пересечения с осью симметрии O и C при $\Delta \neq 0$ должна иметь носики с нулевыми углами заострения, т. е. производная функции должна обращаться в этих

точках в нуль. Действительно, в противном случае внутренние и внешние предельные значения скорости течения в этих точках обращались бы в нуль, что противоречило бы условию (1.1). Поскольку с внутренней стороны заострения поверхности S скорость обращается в нуль, то при $\Delta > 0$ из (1.1) следует, что в точках O и C $v_i = 0$, т. е. заострение направлено наружу от поверхности S и $v_e = \sqrt{\Delta}$. Итак имеем

$$f(0) = f(1) = f_x(0) = f_x(1) = 0, \quad \omega(0) = \omega(1) = -\sqrt{\Delta}$$

Выражение для параметра W через f и ω получим из условия $v_e(0) = \sqrt{\Delta}$. Для этого рассмотрим в некоторой точке N на оси симметрии скорость, обусловленную вихревой поверхностью S

$$(2.6) \quad v(N) = \frac{1}{r} \frac{\partial (rA_2)}{\partial r} \Big|_N$$

Можно показать (проводя интегрирование по частям), что

$$\frac{1}{r} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \vartheta}{R} d\vartheta = \int_0^{2\pi} \frac{r' \sin^2 \vartheta}{R^3} d\vartheta$$

Поэтому скорость (2.6) после дифференцирования по r и интегрирования по углу ϑ примет вид

$$v(N) = \frac{1}{2} \int_L \frac{\omega' r'^2}{R^3} dl \equiv I(\sigma) \quad (R^2 = (x' - \sigma)^2 + r'^2)$$

Покажем, что если интеграл

$$I(0) = \frac{1}{2} \int_L \frac{\omega' r'^2}{R_0^3} dl \quad (R_0^2 = x'^2 + r'^2)$$

сходится, то при приближении точки N извне заострения к точке O

$$(2.7) \quad \lim I(\sigma) = I(0), \quad \sigma \rightarrow 0$$

Из сходимости интеграла $I(0)$ следует, что для произвольной величины $\delta > 0$ существует такая ε -окрестность точки O , для которой $|I(0)|_{L_\varepsilon} < \delta/3$. Здесь

$$I(0)|_{L_\varepsilon} = \frac{1}{2} \int_{L_\varepsilon} \frac{\omega' r'^2}{R_0^3} dl$$

а L_ε — часть кривой L , принадлежащая ε -окрестности точки O . В силу непрерывности подынтегральной функции для достаточно малых значений σ имеем

$$|I(\sigma)|_{L-L_\varepsilon} - I(0)|_{L-L_\varepsilon} < \delta/3$$

Поскольку точка N находится вне заострения поверхности S , в малой окрестности точки O имеем $R \geq R_0$, и поэтому $|I(\sigma)|_{L_\varepsilon} \leq |I(0)|_{L_\varepsilon}$. В результате получаем

$$\begin{aligned} |I(\sigma) - I(0)| &= |I(\sigma)|_{L-L_\varepsilon} - I(0)|_{L-L_\varepsilon} + I(\sigma)|_{L_\varepsilon} - I(0)|_{L_\varepsilon} \leq \\ &\leq |I(\sigma)|_{L-L_\varepsilon} - I(0)|_{L-L_\varepsilon} + 2|I(0)|_{L_\varepsilon} < \delta \end{aligned}$$

что и доказывает (2.7).

Заметим, что сходимость несобственного интеграла $I(0)$ является не только достаточным, но и необходимым условием существования конечных предельных значений скорости в точке O . На самом деле, можно показать, что если интеграл $I(0)$ расходится, то скорость $v(N)$ неограниченно возрастает при стремлении точки N к нулю.

С учетом (2.7) скорость внешнего течения в точке O запишется следующим образом:

$$(2.8) \quad v_e(O) = \sqrt{\Delta} = 1 + \frac{1}{2} \int_L \frac{\omega' r'^2}{R_0^3} dl + \frac{W}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{r'^2}{R_0^3} d\Omega$$

3. После некоторых преобразований уравнения (2.4), (2.5) и (2.8) примут вид

$$(3.1) \quad \frac{\Delta}{\omega} = - \frac{2}{\sqrt{1+r_x^2}} \left\{ 1 + \frac{1}{4\pi r} \iint_S \frac{\omega' \cos \vartheta}{R} dS + \right. \\ \left. + \frac{1}{4\pi} \iint_S \omega' \cos \vartheta [r_x(x-x') + r' \cos \vartheta - r] R^{-3} dS + \right. \\ \left. + \frac{W}{4\pi} \iiint_{\Omega} r' [r' - r \cos \vartheta + r_x \cos \vartheta (x-x')] R^{-3} d\Omega \right\}$$

$$(3.2) \quad r = - \frac{W}{2\pi} \iiint_{\Omega} \frac{r' \cos \vartheta}{R} d\Omega - \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{\omega' \cos \vartheta}{R} dS$$

$$(3.3) \quad \sqrt{\Delta} = 1 - \frac{W}{2} + \frac{W}{2} \int_0^1 \frac{r^2 + 2x^2}{(r^2 + x^2)^{1/2}} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\omega r^2 (1 + r_x^2)^{1/2}}{(r^2 + x^2)^{3/2}} dx$$

$$(r = f(x), \quad r' = f(x'))$$

При $\Delta = 0$ эта система уравнений имеет своим решением сферический вихрь Хилла

$$f(x) = [1/4 - (x - 1/2)^2]^{1/2}, \quad \omega(x) \equiv 0, \quad W = -30 \\ \psi(x, r) = \begin{cases} -3r^2(1/4 - \rho^2), & \rho \leq 1/2 \\ 1/2 r^2 (1 - 1/8 \rho^{-3}), & \rho \geq 1/2 \end{cases} \quad (\rho^2 = (x - 1/2)^2 + r^2)$$

При $\Delta > 0$ система уравнений (3.1) — (3.3) решалась численно методом итераций.

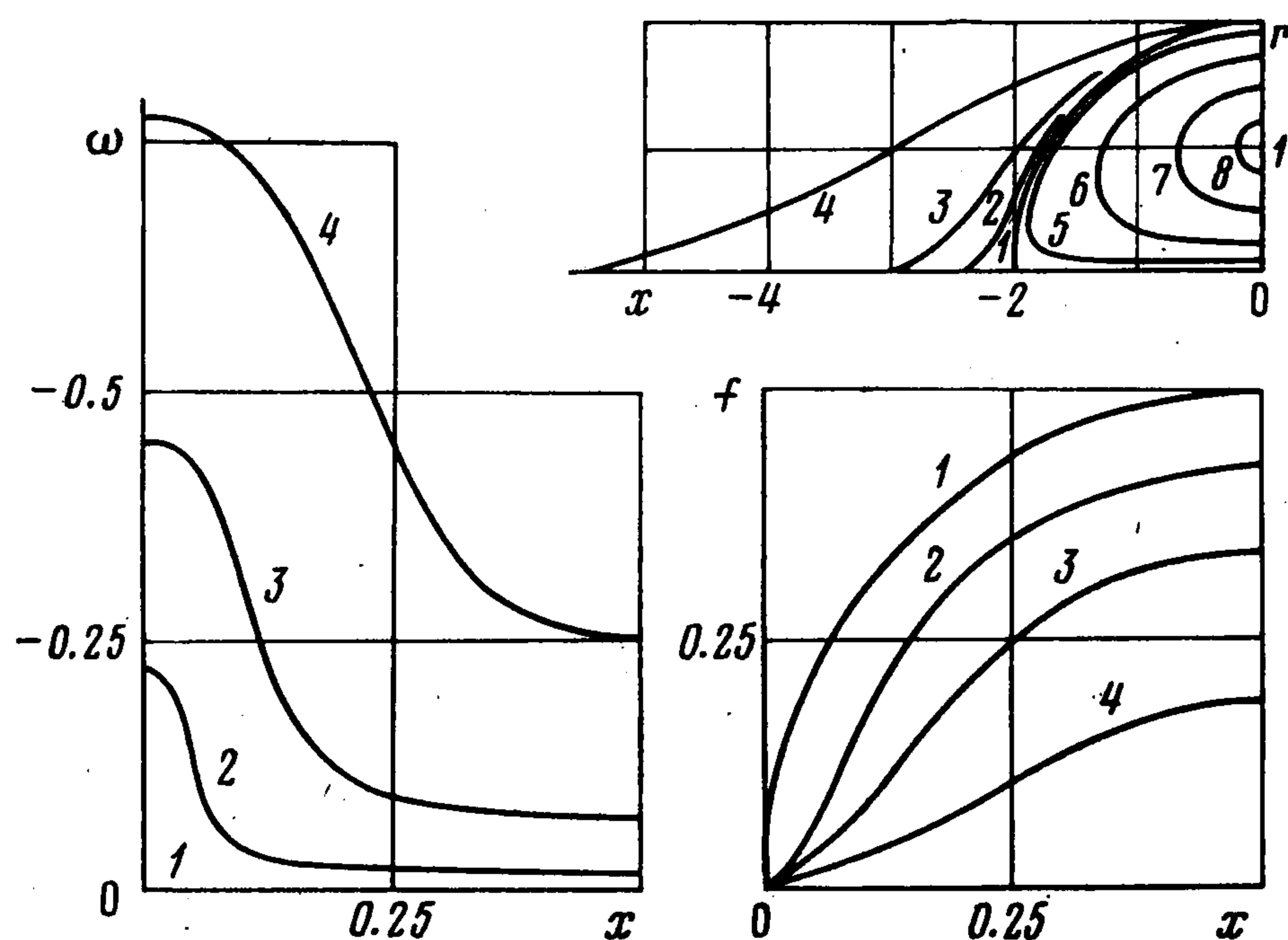
Последующие приближения для функций f и ω находились из уравнений (3.1) и (3.2), правые части которых вычислялись с использованием предыдущих приближений и параметра W , определенного из уравнения (3.3). Функции f и ω предполагались симметричными относительно прямой $x = 1/2$. Для вычисления интегралов по углу ϑ использовались известные соотношения, в которых скорости и функция тока вихревого кольца выражены через полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Особенности при $(x', r') = (x, r)$ были устранены аналитическим интегрированием по малой окрестности точки (x, r) . Для интерполирования функций f и ω использовались кубические сплайны. В целях сокращения времени счета для каждого узла сплайна строилась своя сетка интегрирования таким образом, чтобы в ее узлах параметр полных эллиптических интегралов принимал заранее заданные значения. Это позволило использовать при интегрировании таблицы полных эллиптических интегралов.

Вначале было получено близкое к вихрю Хилла течение при $\Delta = 0,01$. Для получения последующих решений в качестве нулевых приближений использовались измененные в нужную сторону предыдущие решения. Вычисления прекращались при

совпадении пяти значащих цифр у двух последующих приближений. При $\Delta \leq 0,4$ для этого требовалось 20—30 итераций. С дальнейшим ростом параметра Δ необходимое число итераций увеличивалось, и в связи с большими затратами машинного времени решения при $\Delta > 0,6$ получены не были. На фиг. 2 показаны граница области вихревого течения f и интенсивность вихревой поверхности ω для разных значений параметра Δ . Соответствующие цифровым обозначениям величины Δ приведены ниже

№	Δ	W	r^*	α
1	0	-30	0,5	2
2	0,05	-40,5	0,4255	1,443
3	0,2	-59,0	0,3380	1,533
4	0,6	-136,3	0,1875	1,931

Здесь даны также максимальные значения r_* функции f и значения параметра α , введенного [4] при рассмотрении семейства вихревых колец по формуле $S_0 = \pi r_0^2 \alpha^2$,



Фиг. 2

где S_0 — площадь осевого сечения области вихревого движения жидкости, а r_0 — средний радиус поперечного сечения области в месте ее максимального утолщения. Для рассматриваемых вихревых течений $r_0 = r_* / 2$.

Как видно, с ростом скачка постоянной Бернулли параметр α монотонно возрастает от значения $\sqrt{2}$. Для однопараметрического семейства вихревых колец [4] параметр α изменяется в диапазоне от нуля (круговая вихревая нить) до $\sqrt{2}$ (сферический вихрь Хилла).

Таким образом, рассмотренное семейство вихревых течений с поверхностью разрыва постоянной Бернулли сопрягается с семейством вихревых колец при $\alpha = \sqrt{2}$.

На фиг. 2 показаны также границы осевых сечений областей вихревого течения для разных значений параметра α . Кривым 5—8 соответствуют значения $\alpha = 1,35, 1, 0,6, 0,2$. Линейные размеры отнесены к r_0 . Круговая вихревая нить проходит через точку $x = 0, r = 1$. При $0 < \alpha < \sqrt{2}$ область вихревого течения имеет тороидальную форму, при $\alpha > \sqrt{2}$ она присоединена к оси симметрии, и граница области в местах пересечения с ней имеет особые точки. Эти два семейства течений связаны сферическим вихрем Хилла ($\alpha = \sqrt{2}$), у которого область вихревого течения присоединена к оси симметрии, но ввиду отсутствия разрыва постоянной Бернулли ($\Delta = 0$) имеет гладкую границу.

Автор благодарит Г. И. Таганова за постановку задачи и В. С. Садовского за постоянное внимание к работе и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fraenkel L. E.* On steady vortex rings of small cross-section in an ideal fluid.— Proc. Roy. Soc. London. Ser. A., 1970, v. 316, No. 1524, p. 29.
2. *Fraenkel L. E.* Examples of steady vortex rings of small cross-section in an ideal fluid.— J. Fluid Mech., 1972, v. 51, p. 1.
3. *Norbury J.* A steady vortex ring close to Hill's spherical vortex.— Proc. Cambridge Philos. Soc., 1972, v. 72, p. 2.
4. *Norbury J.* A family of steady vortex rings.— J. Fluid Mech., 1973, v. 57, p. 3.
5. *Таганов Г. И.* Вязкая диссипация и законы сопротивления тел при $Re \rightarrow \infty$. В сб.: Численные методы механики сплошной среды. Т. 4, № 4. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1973.
6. *Садовский В. С., Кожуро Л. А.* О двух однопараметрических семействах вихревых течений невязкой жидкости. В сб.: Численные методы механики сплошной среды. Т. 8, № 7. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1977.

Поступила в редакцию
26.VI.1978