Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 1, 1981

УДК 531.36 : 534

О ТОЧНОСТИ СОХРАНЕНИЯ АДИАБАТИЧЕСКОГО ИНВАРИАНТА

Нейштадт А. И.

(Москва)

Рассматривается гамильтонова система с одной степенью свободы, зависящая от параметра ξ, который медленно изменяется со временем t : $\xi = \xi(\varepsilon t)$, $0 < \varepsilon \ll 1$ и достаточно регулярно стремится к определенным пределам при $t \to \pm\infty$. Адиабатический инвариант действия вдоль траектории такой системы имеет предельные значения $I_\pm$ при $t \to \pm\infty$. Оценивается их разность $\Delta I = I_+ - I_-$.

Задача об оценке ΔI возникает в классической механике [1, 2], квантовой механике [3], теории волноводов [4]. Для случая, когда зависимость ξ от εt финитная ($\xi(\varepsilon t) = \text{const}$ для достаточно больших εt) бесконечно дифференцируемая, в [5] показано, что ΔI убывает при $\varepsilon \to 0$ быстрее любой степени ε. Для линейных систем с аналитически зависящей от εt частотой известна асимптотика ΔI, оказавшаяся экспоненциальной: $\Delta I = O(\exp(-c/\varepsilon))$, $c = \text{const}$ [3, 6]. В [1] дано неверное доказательство экспоненциальной малости ΔI в случае аналитической $\xi(\varepsilon t)$ для общих нелинейных систем.

Ниже задача об оценке ΔI рассматривается с помощью процедуры возмущений в переменных действие — угол. Для случая, когда зависимость ξ от εt финитная и имеет конечную гладкость, вычислена степенная асимптотика ΔI, а для случая аналитической $\xi(\varepsilon t)$ доказана экспоненциальная малость ΔI по ε.

1. Уравнения в переменных действие — угол. Гамильтониан рассматриваемой задачи имеет вид

$$E = E(p, q, \xi), \quad \xi = \xi(\lambda), \quad \lambda = \varepsilon t \tag{1.1}$$

(p, q — канонические переменные). Предполагаем, что E — аналитическая функция p, q, ξ.

Пусть на фазовой плоскости невозмущенной ($\xi = \text{const}$) задачи при каждом ξ есть область, заполненная замкнутыми траекториями. В этой области определены переменные действие—угол невозмущенной задачи [1]. Действие $I = I(p, q, \xi)$ — это поделенная на 2π площадь, ограниченная невозмущенной траекторией, проходящей через точку (p, q). Угол $\varphi = \varphi(p, q, \xi) \bmod 2\pi$ — равномерно меняющаяся в невозмущенной системе угловая координата вдоль траектории. Замена переменных $p, q \to I, \varphi$ — каноническая, зависящая от времени. Изменение переменных I, φ в исходной задаче описывается гамильтоновой системой с гамильтонианом

$$H(I, \varphi, \lambda) = H_0(I, \lambda) + \varepsilon H_1(I, \varphi, \lambda) \tag{1.2}$$

где H_0 — старый гамильтониан E, выраженный через I, λ

$$H_1 = (d\xi/d\lambda)\, G(I, \varphi, \lambda) \tag{1.3}$$

$$G = \frac{1}{\omega}\left[-\int_0^\varphi \frac{\partial E}{\partial \xi}\, d\varphi + \frac{\varphi}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial E}{\partial \xi}\, d\varphi\right]$$

$$\omega = \omega(I, \lambda) = \partial H_0 / dI$$

H — аналитическая функция I, φ, по φ — 2π-периодическая.

Для 2π-периодических функций φ будем обозначать угловыми скобками $\langle\cdot\rangle^\varphi$ осреднение по φ, фигурными скобками $\{\cdot\}^\varphi$ — взятие чисто периодической части: $\{\cdot\}^\varphi = (\cdot) - \langle\cdot\rangle^\varphi$. В дальнейшем, чтобы не загромождать обозначений, будем считать, что $\langle H_1\rangle^\varphi = 0$. Иначе в последующих выкладках надо заменить H_0 на $H_0 + \varepsilon\langle H_1\rangle^\varphi$, а H_1 — на $\{H_1\}^\varphi$.

2. Процедура теории возмущений. Оценки изменения адиабатического инварианта будут получены с помощью описанной в этом пункте процедуры асимптотического интегрирования системы с гамильтонианом (1.2) аналогичной процедуре [7].

Сделаем в системе с гамильтонианом (1.2) каноническую, близкую к тождественной замену переменных с не определенной пока производящей функцией $W = J\varphi + \varepsilon S(J, \varphi, \lambda)$. Здесь J, ψ — новые канонические переменные, связанные с I, φ соотношениями

$$I = J + \varepsilon\frac{\partial S}{\partial\varphi}, \quad \psi = \varphi + \varepsilon\frac{\partial S}{\partial J} \tag{2.1}$$

Изменение J, ψ описывается гамильтоновой системой с гамильтонианом

$$\Phi(J, \psi, \lambda) = \varepsilon^2\frac{\partial S}{\partial\lambda} + H_0\left(J + \varepsilon\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right) + \varepsilon H_1\left(J + \varepsilon\frac{\partial S}{\partial\varphi}, \varphi, \lambda\right) \tag{2.2}$$

В правой части (2.2) надо выразить φ через J, ψ согласно (2.1). Выберем

$$S = \frac{1}{\partial H_0/\partial I}\left\{\int_0^\varphi H_1 d\varphi\right\}^\varphi$$

Так как $\langle H_1\rangle^\varphi = 0$, то это определение корректно и S — 2π-периодическая функция φ с нулевым средним. При таком выборе S будет

$$\Phi = H_0(J, \lambda) + \varepsilon^2 F \tag{2.3}$$

$$\varepsilon^2 F = \varepsilon^2\frac{\partial S}{\partial\lambda} + \left(H_0\left(J + \varepsilon\frac{\partial S}{\partial\varphi}, \lambda\right) - H_0(J, \lambda) - \varepsilon\frac{\partial H_0(J, \lambda)}{\partial J}\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right) + \\ + \varepsilon\left(H_1\left(J + \varepsilon\frac{\partial S}{\partial\varphi}, \varphi, \lambda\right) - H_1(J, \varphi, \lambda)\right), \quad F = O(1)$$

Обозначим

$$\Phi_0 = H_0 + \varepsilon^2\langle F\rangle^\psi, \quad \Phi_1 = \{F\}^\psi$$

Тогда гамильтониан примет вид

$$\Phi = \Phi_0(J, \lambda) + \varepsilon^2\Phi_1(J, \psi, \lambda)$$

вполне аналогичный (1.2). Но член, зависящий от фазы ψ, имеет уже порядок ε^2.

Повторяя еще раз описанную процедуру, получим гамильтониан, в котором зависимость от фазы содержится лишь в членах порядка ε^3.

Наконец, сделав n шагов описанной процедуры, приведем гамильтониан к виду

$$\Phi(J, \psi, \lambda) = \Phi_0(J, \lambda) + \varepsilon^{n+1}\Phi_1(J, \psi, \lambda) \tag{2.4}$$

Здесь для новых переменных и гамильтониана сохранены обозначения J, ψ, Φ.

Если пренебречь в гамильтониане (2.4) последним членом, то для изменения J, ψ со временем получатся соотношения

$$J=\text{const},\quad \psi=\psi_0+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{\partial\Phi_0(J,\nu)}{\partial J}\,d\nu,\quad \psi_0=\text{const} \tag{2.5}$$

Анализ поправок, которые вносит следующий шаг процедуры, показывает, что соотношения (2.5) описывают изменение J с точностью $O(\varepsilon^{n+1})$, а ψ — с точностью $O(\varepsilon^n)$ на временах порядка $1/\varepsilon$ (если можно сделать этот следующий шаг).

Из (2.3) видно, что каждый шаг процедуры понижает гладкость гамильтониана по λ на 1. Поэтому число шагов, которое можно сделать, зависит от гладкости H по λ.

3. Асимптотика изменения адиабатического инварианта для финитного возмущения конечной гладкости. Пусть возмущение финитно: $\xi(\lambda)\equiv\equiv\text{const}$ при $\lambda<\lambda_-$ и $\lambda>\lambda_+$, $\lambda_\pm$ — постоянные. Пусть в точках $\lambda_\pm$ первые $n-1$ производных $\xi(\lambda)$ непрерывны (и, следовательно, обращаются в 0), а n-я производная терпит разрывы; $n\geqslant 1$. Пусть при $\lambda\in(\lambda_-,\lambda_+)$ функция $\xi(\lambda)$ дифференцируема $n+2$ раза и ее производные ограничены. Вычислим асимптотику изменения адиабатического инварианта.

Обозначим $I(\lambda)$, $\varphi(\lambda)$ — решение системы с гамильтонианом (1.2), $I_\pm=I(\lambda_\pm)$, $\varphi_-=\varphi(\lambda_-)$, $\Delta I=I_+-I_-$. Для 2π-периодической функции $f(\varphi)$ с нулевым средним будем обозначать

$$(Lf)(\varphi)=-\left\{\int\limits_0^{\varphi}f(\gamma)\,d\gamma\right\}^{\varphi}$$

Теорема 1. Величина ΔI имеет асимптотику

$$\Delta I=\varepsilon^n(R(\lambda_+-0)-R(\lambda_-+0))+O(\varepsilon^{n+1}) \tag{3.1}$$

$$R(\lambda)=-\frac{\xi^{(n)}(\lambda)}{\omega^n(I_-,\lambda)}(L^{n-1}G)(I_-,\varphi_*(\lambda),\lambda)$$

где L^{n-1} — $(n-1)$-я степень оператора L, G дается формулой (1.3)

$$\varphi_*(\lambda)=\varphi_-+\varepsilon^{-1}\int\limits_{\lambda_-}^{\lambda}\omega\left(I_-+\varepsilon\frac{H_1(I_-,\varphi_-,\lambda_-+0)}{\omega(I_-,\lambda_-)},\ \nu\right)d\nu$$

Доказательство. При $\lambda\in(\lambda_-,\lambda_+)$ имеющаяся гладкость позволяет сделать $n+1$ шаг процедуры п. 2. Обозначим (J,ψ) — переменные, введенные на n-м шаге, $W=J\varphi+\varepsilon S(J,\varphi,\lambda)$ — производящую функцию замены $(I,\varphi)\to(J,\psi)$. Пусть $J(\lambda)$, $\psi(\lambda)$ — запись решения $I(\lambda)$, $\varphi(\lambda)$ в переменных (J,ψ).

Из формул замены переменных следует, что

$$I(\lambda_+)-I(\lambda_-)=J(\lambda_+-0)-J(\lambda_-+0)+\varepsilon\left.\frac{\partial S(J(\lambda),\varphi(\lambda),\lambda)}{\partial\varphi}\right|_{\lambda_-+0}^{\lambda_+-0} \tag{3.2}$$

Из утверждения п. 2 о точности соотношений (2.5) имеем

$$J(\lambda_+-0)-J(\lambda_-+0)=O(\varepsilon^{n+1})$$

Анализ процедуры п. 2 показывает, что

$$S(I,\ \varphi,\ \lambda_\pm \mp 0) = \frac{\varepsilon^{n-1}}{\omega^n(I,\ \lambda_\pm)} \left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial\lambda^{n-1}} L^n H_1\right)_{\lambda=\lambda_\pm \mp 0}$$

Подставим это выражение в правую часть (3.2) и заменим в S $J(\lambda)$ на I_-, $\varphi(\lambda_+)$ на $\varphi_*(\lambda_+)$. Допускаемая при этом погрешность есть $O(\varepsilon^{n+1})$. Учитывая выражение для H_1 (1.3), получим требуемое выражение (3.1).

Замечание. Формулу (3.1) можно переписать в виде

$$\Delta I = -\int\limits_{\lambda_-}^{\lambda_+} \frac{\partial H_1(I_-,\ \varphi_*(\lambda),\ \lambda)}{\partial\varphi}\, d\lambda + O(\varepsilon^{n+1})$$

так как асимптотика интеграла здесь дается правой частью (3.1).

4. Экспоненциальная оценка изменения адиабатического инварианта для аналитического возмущения. Пусть теперь функция $\xi(\lambda)$ аналитична в некоторой полосе $|\mathrm{Im}\,\lambda| < \rho$, для прямых $\mathrm{Im}\,\lambda = \mathrm{const}$ в этой полосе равномерно ограничен интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{d\xi}{d\lambda}\right| d\lambda \tag{4.1}$$

и $d\xi/d\lambda \to 0$ при $\mathrm{Re}\,\lambda \to \pm\infty$. По-прежнему будем предполагать, что исходный гамильтониан $E(p,\ q,\ \xi)$ — аналитическая функция своих аргументов, так что при переходе к переменным действие — угол получается гамильтониан H (1.2), аналитичный в комплексной области

$$|\,\mathrm{Im}\,\lambda\,| < \rho, \quad |\,I - I_0\,| < \varkappa, \quad |\,\mathrm{Im}\,\varphi\,| < \sigma$$

где $\varkappa > 0$, $\sigma > 0$, I_0 — постоянные, величина I_0 вещественна.

Пусть $I(\lambda)$, $\varphi(\lambda)$ — решение рассматриваемой гамильтониановой системы, $I(0) = I_0$. Из сходимости интеграла (4.1) вытекает существование величин

$$I_\pm = \lim\nolimits_{\lambda\to\pm\infty} I(\lambda), \quad \Delta I = I_+ - I_-$$

Теорема 2. Изменение адиабатического инварианта ΔI экспоненциально мало: $\Delta I = O(\exp(-c_1/\varepsilon))$, $c_1 > 0$ — постоянная.

Доказательство основано на процедуре п. 3 и использует технику оценок из [7, 8]. После большого ($\sim 1/\varepsilon$) числа шагов процедуры зависимость гамильтониана от фазы переносится в экспоненциально малые члены. Отсюда вытекает экспоненциальная малость ΔI.

Перейдем к оценкам. Обозначим через $\rho_0, \varkappa_0, \sigma_0, \vartheta, \Theta, M_0$ положительные постоянные, такие, что при

$$|\,\mathrm{Im}\,\lambda| < \rho_0, \quad |\,I - I_0\,| < \varkappa_0, \quad |\,\mathrm{Im}\,\varphi\,| < \sigma_0$$

выполнены неравенства

$$\vartheta < |\,\partial H_0/\partial I\,| < \Theta, \quad |\,H_1\,| < M_0 \tag{4.2}$$

Рассмотрим процедуру п. 2. Пусть сделано $N \geqslant 0$ шагов этой процедуры и после k-го шага гамильтониан приводится к виду

$$\Phi^{(k)}(I,\ \varphi,\ \lambda) = \Phi_0^{(k)}(I,\ \lambda) + \varepsilon\Phi_1^{(k)}(I,\ \varphi,\ \lambda)$$

$$\langle\Phi_1^{(k)}\rangle^\varphi = 0, \quad |\,\Phi_1^{(k)}| < M_k = M_k(\varepsilon).$$

в области

(4.3) $\quad |\operatorname{Im}\lambda| < \rho_k, \quad |I - I_0| < \varkappa_k, \quad |\operatorname{Im}\varphi| < \sigma_k$

$$\rho_k = \rho_0 - k\Delta, \quad \varkappa_k = \varkappa_0 - 4\sum_{i=1}^{k}\delta_i, \quad \sigma_k = \sigma_0 - 4\sum_{i=1}^{k}\beta_i$$

$$\delta_i = 2^{-i}\delta, \quad \beta_i = 2^{-i}\beta, \quad \delta = {}^1/_8\varkappa_0, \quad \beta = {}^1/_8\sigma_0$$

Докажем, что при подходящем выборе $\Delta = \Delta(\varepsilon)$, $M_i = M_i(\varepsilon)$ можно выбрать $N \sim 1/\varepsilon$ и на всех шагах процедуры будут выполняться оценки

(4.4) $\quad {}^1/_2\vartheta < |\partial\Phi_0^{(i)}/\partial I| < 2\Theta$

(4.5) $$\frac{\varepsilon M_i}{\delta_{i+1}} < \frac{\vartheta}{2}, \quad \frac{\varepsilon M_i}{\delta_{i+1}\beta_{i+1}} < \frac{\vartheta}{\pi}, \quad \frac{\Delta M_i}{\delta_{i+1}} < \frac{\pi\vartheta}{2\Theta}$$

Доказательство проведем по индукции. Оценки (4.4), (4.5), очевидно, выполнены для исходного гамильтониана. Предположим, что они выполнены на k шагах. Предположим, что $\rho_{k+1} = \rho_k - \Delta > 0$. Рассмотрим $(k+1)$-й шаг. Новые переменные будем обозначать J, ψ. Производящая функция замены переменных W имеет вид

(4.6) $$W = J\varphi + \varepsilon S(J, \varphi, \lambda), \quad \frac{\partial S}{\partial\varphi} = -\frac{\Phi_1^{(k)}}{\partial\Phi_0^{(k)}/\partial I}, \quad \langle S\rangle^{\varphi} = 0$$

Используя предположения (4.4), (4.5), можно показать, что при

$$|I - I_0| < \varkappa_k - 2\delta_{k+1}, \quad |\operatorname{Im}\varphi| < \sigma_k - 2\beta_{k+1}$$

замена с производящей функцией W определена и область изменения новых переменных J, ψ содержит область

$$|J - I_0| < \varkappa_k - 3\delta_{k+1}, \quad |\operatorname{Im}\psi| < \sigma_k - 3\beta_{k+1}$$

Доказательство повторяет известное рассуждение ([7], § 4) и здесь опускается.

Получим оценки для нового гамильтониана. Из оценок Коши [7], определения S (4.6) и оценок (4.4), (4.5) найдем, что при

$$|\operatorname{Im}\lambda| < \rho_k - \Delta, \quad |I - I_0| < \varkappa_k - 2\delta_{k+1}, \quad |\operatorname{Im}\varphi| < \sigma_k$$

выполнены неравенства

(4.7) $$\left|\frac{\partial\Phi_1^{(k)}}{\partial I}\right| < \frac{M_k}{2\delta_{k+1}}, \quad \left|\frac{\partial^2\Phi_0^{(k)}}{\partial I^2}\right| < \frac{\Theta}{\delta_{k+1}}$$

$$\left|\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right| < \frac{2M_k}{\vartheta}, \quad |S| < \frac{2\pi M_k}{\vartheta}, \quad \left|\frac{\partial S}{\partial\lambda}\right| < \frac{2\pi M_k}{\Delta\vartheta}$$

Новый гамильтониан вычисляется согласно (2.3). Оценивая правую часть (2.3) в области

$$|\operatorname{Im}\lambda| < \rho_k - \Delta, \ |J - I_0| < \varkappa_k - 3\delta_{k+1}, \quad |\operatorname{Im}\varphi| < \sigma_k$$

получим с помощью (4.4), (4.5), (4.7), что

$$|\varepsilon F| < \varepsilon\left(\frac{2\pi M_k}{\Delta\vartheta} + \frac{M_k^2}{\delta_{k+1}\vartheta} + \frac{2M_k^2\Theta}{\delta_{k+1}\vartheta^2}\right) =$$
$$= \frac{2\pi\varepsilon M_k}{\Delta\vartheta}\left(1 + \frac{\Delta M_k}{2\pi\delta_{k+1}} + \frac{\Delta M_k\Theta}{\pi\delta_{k+1}\vartheta}\right) < \frac{4\pi\varepsilon M_k}{\Delta\vartheta}$$

Отсюда получим

$$|\Phi_1^{(k+1)}| = |\{\varepsilon F\}^{\psi}| < \frac{8\pi\varepsilon M_k}{\Delta\vartheta} \tag{4.8}$$

$$|\Phi_0^{(k)} - \Phi_0^{(k+1)}| = |\langle\varepsilon^2 F\rangle^{\psi}| < \frac{4\pi\varepsilon^2 M_k}{\Delta\vartheta} \tag{4.9}$$

Из (4.9) с помощью оценки Коши найдем, что при $|J - I_0| < \varkappa_k - 4\delta_{k+1}$ будет

$$\left|\frac{\partial\Phi_0^{(k)}}{\partial J} - \frac{\partial\Phi_0^{(k+1)}}{\partial J}\right| < \frac{4\pi\varepsilon^2 M_k}{\Delta\vartheta\delta_{k+1}} \tag{4.10}$$

Выберем

$$\Delta = \frac{32\pi}{\vartheta}\varepsilon, \quad M_{k+1} = \frac{8\pi\varepsilon}{\Delta\vartheta} M_k = {}^1/_4 M_k \tag{4.11}$$

Тогда

$$M_i = \left(\frac{1}{4}\right)^i M_0, \quad \frac{M_i}{\delta_{i+1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}\frac{M_0}{\delta}, \quad \frac{M_i}{\delta_{i+1}\beta_{i+1}} = \frac{4M_0}{\delta\beta}, \quad 0 \leqslant i \leqslant k+1 \tag{4.12}$$

откуда видно, что соотношения (4.5) остаются справедливыми и для $(k+1)$-го шага процедуры. Далее, из (4.2), (4.10) — (4.12) получим

$$\left|\frac{\partial\Phi_0^{(k+1)}}{\partial J}\right| > \vartheta - {}^1/_4\varepsilon\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^i\frac{M_0}{\delta} > \vartheta - \frac{\varepsilon M_0}{2\delta}$$

$$\left|\frac{\partial\Phi_0^{(k+1)}}{\partial J}\right| < \Theta + \frac{\varepsilon M_0}{2\delta}$$

Так как $\delta = {}^1/_8\varkappa = \mathrm{const}$, то отсюда следует, что при достаточно малом ε условия (4.4) выполняются и для $(k+1)$-го шага.

Таким образом, замены переменных можно повторять до тех пор, пока $\rho_k > 0$. Значит, можно сделать

$$N = \left[\frac{\rho_0}{\delta}\right] \geqslant \frac{\rho_0\vartheta}{32\pi\varepsilon} - 1$$

шагов. После N-го шага будет

$$|\Phi_1^{(N)}| < M_0\left(\frac{1}{4}\right)^N = O(\exp(-c_1/\varepsilon))$$

т. е. $\Phi_1^{(N)}$ — экспоненциально малая величина.

Покажем теперь, что функция $\Phi_1^{(N)}$ экспоненциально мала и в интегральной норме

$$\|\Phi_1^{(k)}\| = \sup_{|\mathrm{Im}\lambda|<\rho_k}\int_{-\infty}^{\infty}\sup_{I,\varphi}|\Phi_1^{(k)}|\,d\lambda$$

где верхняя грань под интегралом берется по всем I, φ из области определения $\Phi_1^{(k)}$ (4.2), интеграл берется по прямой $\mathrm{Im}\,\lambda = \mathrm{const}$, а верхняя грань перед интегралом — по всем таким прямым с $|\mathrm{Im}\,\lambda| < \rho_k$.

Рассмотрим снова $(k+1)$-й шаг процедуры п. 2. Оценим интегральную норму функции $\partial S/\partial\lambda$ в полосе $|\mathrm{Im}\,\lambda| < \rho_{k+1} = \rho_k - \Delta$ через интегральную норму S в полосе $|\mathrm{Im}\,\lambda| < p_k$. Чтобы не загромождать формулы, будем временно обозначать $S(\lambda) = S(I, \varphi, \lambda)$. В силу интегральной формулы Коши

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{S(\lambda+\zeta)}{\zeta^2} d\zeta$$

где контур Γ — окружность радиуса Δ с центром в точке 0. Поэтому

$$\left\| \frac{\partial S}{\partial \lambda} \right\| = \frac{1}{2\pi} \sup_{|\operatorname{Im}\lambda| < \rho_{k+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \sup_{I,\varphi} \left| \oint_{\Gamma} \frac{S(\lambda+\zeta)}{\zeta^2} d\zeta \right| d\lambda$$

Меняя порядок интегрирования, получим

$$\left\| \frac{\partial S}{\partial \lambda} \right\| \leqslant \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \left(\sup_{|\operatorname{Im}\lambda| < \rho_{k+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \sup_{I,\varphi} |S(\lambda+\zeta)| \, d\lambda \right) \frac{|d\zeta|}{|\zeta|^2} =$$

$$= \frac{\|S\|}{2\pi} \oint_{\Gamma} \frac{|d\zeta|}{|\zeta|^2} = \frac{\|S\|}{\Delta}$$

Оценивая теперь $\| S \|$ через $\| \Phi_1^{(k)} \|$, с помощью (4.4), (4.6) получим, что на $(k+1)$-м шаге процедуры

$$\left\| \frac{\partial S}{\partial \lambda} \right\| \leqslant \frac{2\pi}{\Delta\vartheta} \| \Phi_1^{(k)} \| \tag{4.13}$$

Наконец, оценивая $\| \Phi_1^{(k+1)} \|$ с помощью (2.3), (4.13), (4.4), (4.5), (4.7), (4.11) получим

$$\| \Phi_1^{(k+1)} \| \leqslant {}^1/_4 \| \Phi_1^{(k)} \|$$

Поэтому

$$\| \Phi_1^{(N)} \| \leqslant \left(\frac{1}{4} \right)^N \| H_1 \| = O\left(\exp\left(-\frac{c_1}{\varepsilon} \right) \right) \sup_{|\operatorname{Im}\lambda| < \rho} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d\xi}{d\lambda} \right| d\lambda =$$

$$= O\left(\exp\left(-\frac{c_1}{\varepsilon} \right) \right)$$

что и требовалось.

Оценим теперь изменение адиабатического инварианта за бесконечное время. Обозначим через J, ψ переменные, введенные на N-м шаге процедуры. Область изменения этих переменных содержит область

$$| J - I_0 | < {}^1/_2 \varkappa_0, \quad | \operatorname{Im} \psi | < {}^1/_2 \sigma_0$$

Пусть $J(\lambda)$, $\psi(\lambda)$ — запись исходного решения $I(\lambda)$, $\varphi(\lambda)$ в переменных J, ψ. Так как $d\xi/d\lambda \to 0$ при $\lambda \to \pm\infty$, то замена $I, \varphi \to J, \psi$ стремится к тождественной при $\lambda \to \pm\infty$. Поэтому существуют величины

$$J_\pm = \lim J(\lambda) \text{ при } \lambda \to \pm\infty, \quad J_\pm = I_\pm.$$

Теперь

$$\Delta I = J_+ - J_- = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Phi_1^{(N)}(J(\lambda), \psi(\lambda), \lambda)}{\partial \psi} d\lambda$$

В силу оценки Коши при вещественных ψ

$$\left| \frac{\partial \Phi_1^{(N)}}{\partial \psi} \right| \leqslant \frac{2}{\sigma_0} \sup_{|\operatorname{Im}\psi| < {}^1/_2\sigma_0} | \Phi_1^{(N)} |$$

Отсюда получим

$$\Delta I = O(\|\Phi_1^{(N)}\|) = O(\exp(-c_1/\varepsilon))$$

что и утверждалось.

Автор благодарит В. И. Арнольда за предложенную тему.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика, Т. 1. Механика. М.: Наука, 1973. 208 с.
2. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
3. *Дыхне А. М.* Квантовые переходы в адиабатическом приближении.— ЖЭТФ, 1960, т. 38, вып. 2, с. 570.
4. *Боровиков В. А.* Высшие типы волн в плавнонерегулярных волноводах.— Радиотехника и электроника, 1978, т. 23, № 7, с. 1365.
5. *Lenard A.* Adiabatic invariance to all oders.— Ann. Phys., 1959, v. 6, No. 3, p. 276.
6. *Федорюк М. В.* Адиабатический инвариант системы линейных осцилляторов и теория рассеяния.— Дифференц. уравнения, 1976, т. 12, № 6, с. 1012.
7. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости в классической и небесной механике.— Успехи матем. наук, 1963, т. 18, вып. 6, с. 91.
8. *Нехорошев Н. Н.* Экспоненциальная оценка времени устойчивости гамильтоновых систем, близких к интегрируемым. II. Тр. семинара им. И. Г. Петровского. Вып. 5.: Изд-во МГУ, 1979, с. 5.

Поступила в редакцию
21.V.1980