Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 1, 1981

УДК 531.36: 534

ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ВЫНУЖДЕННЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЯХ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

Меркин М. Р., Фридман В. М.

(Ленинград)

Рассматривается задача о вынужденных нестационарных колебаниях нелинейной системы при медленном изменении ее параметров и параметров внешнего периодического возмущения. Предполагается, что нестационарному колебательному процессу предшествуют стационарные периодические колебания. Излагается проекционный метод, позволяющий строить решения с любой степенью точности на конечном временном интервале.

1. Постановка задачи и описание метода. Задача описывается дифференциальным уравнением

(1.1) $$x^{\cdot}(t) = F(x(t), \tau(t), \varphi(t))$$

где x — m-мерный вектор, F — 2π-периодическая по φ вектор-функция, τ — «медленное время» — известная функция «быстрого» времени t, удовлетворяющая соотношениям

(1.2) $$\tau^{\cdot} = \varepsilon g(\tau), \quad t \geqslant 0; \quad \tau(t) = 0, \quad t \leqslant 0$$

(ε — малое неотрицательное число, $\varphi^{\cdot}(t) = \omega(\tau) > 0$ — частота возмущения, $\varphi(0) = 0$, функции $g(\tau)$ и $\omega(\tau)$ непрерывны, $g(\tau) > 0$).

По условию (1.2) при $t \leqslant 0$ параметры системы и частота возмущения $\omega(0) = \omega^\circ$ постоянны. При этом предполагается, что система совершает чисто периодические колебания $x(t) = \xi^\circ(\omega^\circ t)$ с частотой ω°, что определяет начальное условие

(1.3) $$x(0) = \xi^\circ(0)$$

Задача рассматривается при условии, что функция F определена и непрерывно-дифференцируема при x, принадлежащем открытой области Ω, и любых τ и φ. Предполагается также, что ее частные производные удовлетворяют условию Липшица по x в любой ограниченной части области определения.

Замена $t_1 = \varphi(t)$ независимой переменной приводит уравнение (1.1) к виду

$$\frac{dx}{dt_1} = F_1(x, \tau(t_1), t_1); \quad F_1 = \frac{F}{\omega}, \quad \frac{d\tau}{dt_1} = \varepsilon\frac{g(\tau)}{\omega(\tau)} = \varepsilon g_1(\tau)$$

или, если опустить индекс при t, g и F

(1.4) $$x^{\cdot} = F(x, \tau(t), t)$$

Система (1.4) при $t \leqslant 0$ и $\varepsilon > 0$, а также при любом t и $\varepsilon = 0$ представляет собой 2π-периодическую систему

$$\dot{x} = F(x, 0, t) \tag{1.5}$$

которая по предположению имеет 2π-периодическое решение $\xi^\circ(t)$.

Приближенное решение задачи (1.5) о стационарных колебаниях может быть найдено проекционным методом в виде

$$\xi_n^\circ(t) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_{kn}^\circ e^{ikt} \tag{1.6}$$

Постоянные α_{kn}° $(-n \leqslant k \leqslant n)$ определяются из системы нелинейных уравнений Галеркина (n — номер приближения (см., например, [1]))

$$F_{kn}(\alpha_{-nn}^\circ, \ldots, \alpha_{nn}^\circ, 0) = 0, \quad |k| \leqslant n \tag{1.7}$$

$$F_{kn}(\alpha_{-nn}, \ldots, \alpha_{nn}, \tau) = \int_0^{2\pi} F\left(\sum_{l=-n}^{n} \alpha_{ln} e^{ilt}, \tau, t\right) e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi} - ik\alpha_{kn} \tag{1.8}$$

Подразумевается, что $\alpha_{-kn} = \bar{\alpha}_{kn}$, если ищутся вещественные решения вещественной системы.

Для приближенного решения задачи (1.4), (1.3) о нестационарных колебаниях предлагается метод, согласно которому решения находятся в виде

$$x_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_{kn}(t) e^{ikt} \tag{1.9}$$

а коэффициенты α_{kn} определяются из системы с начальными условиями

$$\dot{\alpha}_{kn} = F_{kn}(\alpha_{-nn}, \ldots, \alpha_{nn}, \tau(t)), \quad |k| \leqslant n \tag{1.10}$$

$$\alpha_{kn}(0) = \alpha_{kn}^\circ \tag{1.11}$$

при F_{kn} из (1.8).

При естественных предположениях, обеспечивающих асимптотическую устойчивость стационарного режима колебаний, коэффициенты $\alpha_{kn}(t)$ оказываются медленными функциями времени. Поэтому задача Коши (1.10), (1.11) может решаться одним из численных пошаговых методов.

Если ищутся вещественные решения, то удобно ввести новые (вещественные) неизвестные a_{kn} $(0 \leqslant k \leqslant n)$ и b_{kn} $(1 \leqslant k \leqslant n)$ или r_{kn} $(0 \leqslant k \leqslant n)$ и ψ_{kn} $(1 \leqslant k \leqslant n)$, определенные равенствами

$$2\alpha_{kn} = a_{kn} - ib_{kn} = r_{kn} \exp(-i\psi_{kn}) \quad (0 \leqslant k \leqslant n, \ b_{0n} = \psi_{0n} = 0)$$

Соотношения (1.9) и (1.10) дают в этом случае

$$x_n(t) = \frac{1}{2} a_{0n}(t) + \sum_{k=1}^{n} (a_{kn}(t) \cos kt + b_{kn}(t) \sin kt) =$$

$$= \frac{1}{2} r_{0n}(t) + \sum_{k=1}^{n} r_{kn}(t) \cos(kt - \psi_{kn})$$

$$\dot{a}_{kn} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F\left(\frac{1}{2} a_{0n} + \sum_{l=1}^{n} (a_{ln} \cos l\varphi + b_{ln} \sin l\varphi), \tau(t),\right. \tag{1.12}$$

$$\left.\varphi\right) \cos k\varphi \, d\varphi - kb_{kn}$$

(1.13) $$b_{kn}^{\cdot}=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}F\left(\frac{1}{2}a_{0n}+\sum_{l=1}^{n}(a_{ln}\cos l\varphi+b_{ln}\sin l\varphi),\right.$$
$$\left.\tau(t),\ \varphi\right)\sin k\varphi d\varphi+ka_{kn}$$

(1.14) $$r_{kn}^{\cdot}=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}F\left(\frac{1}{2}r_{0n}+\sum_{l=1}^{n}r_{ln}\cos(l\varphi-\psi_{ln}),\tau(t),\ \varphi\right)\cos(\psi_{kn}-k\varphi)\,d\varphi$$

(1.15) $$\psi_{kn}^{\cdot}=k-\frac{1}{\pi r_{kn}}\int\limits_0^{2\pi}F\left(\frac{1}{2}r_{0n}+\sum_{l=1}^{n}r_{ln}(\cos(l\varphi-\psi_{ln}),\right.$$
$$\left.\tau(t),\ \varphi\right)\sin(\psi_{kn}-k\varphi)\,d\varphi$$

В случае, когда исходная система (1.4) линейна или квазилинейна, этим же свойством обладает система (1.12), (1.13). Система (1.14), (1.15) нелинейна всегда, но обладает тем преимуществом, что позволяет непосредственно находить амплитуды и фазы, определяющие характер колебаний. Описанный метод можно рассматривать как проекционный, если перейти к семейству задач, аналогичных (1.4), (1.3), зависящих от параметра.

2. Проекционная трактовка метода. Семейство уравнений

(2.1) $$x^{\cdot}(t,\psi)=F(x(t,\psi),\tau(t),t+\psi)$$

зависящих от параметра ψ, имеет при $t\leqslant 0$ семейство периодических решений $\xi^\circ(t+\psi)$. Их продолжение при $t\geqslant 0$ определяется из начальных условий

(2.2) $$x(0,\psi)=\xi^\circ(\psi)$$

Задаче Коши (2.1), (2.2) соответствует укороченная задача

(2.3) $$x_n^{\cdot}(t,\psi)=P_nF(x_n(t,\psi),\tau(t),t+\psi),\quad x_n(0,\psi)=\xi_n^\circ(\psi)$$

где P_n — оператор Фурье, сопоставляющий с 2π-периодической функцией аргумента ψ ее n-ю сумму Фурье, ξ_n° — приближение (1.6) стационарной задачи

(2.4) $$x_n(t,\psi)=\sum_{k=-n}^{n}\alpha_{kn}(t)\,e^{ik(t+\psi)}=\sum_{k=-n}^{n}\beta_{kn}(t)\,e^{ik\psi}$$

Задача (2.3) равносильна системе (1.10), (1.11) для коэффициентов $\alpha_{kn}(t)$, поэтому для приближения исходной задачи (1.4), (1.3) $x_n(t)=$ $=x_n(t,0)$.

Полагая $\Phi(x,t,\psi)=F(x,\tau(t),t+\psi)$, задачу (2.1), (2.2) и задачу (2.3) можно записать в общем виде

(2.5) $$x^{\cdot}(t,\psi)=\Phi(x(t,\psi),t,\psi),\quad x(0,\psi)=\xi^\circ(\psi)$$

(2.6) $$x_n^{\cdot}(t,\psi)=P_n\,\Phi(x_n(t,\psi),t,\psi),\quad x_n(0,\psi)=\xi_n^\circ(\psi)$$

Эти задачи рассматриваются в предположении, что функция Φ непрерывна и имеет непрерывные частные производные по x и ψ, удовлетворяющие условию Липшица по x в любой ограниченной части области определения, что обеспечивается свойствами F.

Уравнения задач (2.5) и (2.6) могут быть интерпретированы как уравнения в банаховом пространстве функций параметра ψ. Пусть $E=$

$= W_{1.2}{}^m$ — пространство Соболева m-мерных 2π-периодических вектор-функций $\xi(\psi)$, абсолютно непрерывных и почти везде имеющих квадратично-суммируемую производную.

Норма задается равенством

$$\|\xi\|^2_{W^m_{1,2}} = \|\xi\|^2_{L^m_2} + \left\|\frac{d\xi}{d\psi}\right\|^2_{L^m_2} = \int\limits_0^{2\pi}\left(|\xi(\psi)|^2 + \left|\frac{d\xi}{d\psi}\right|^2\right)d\psi \tag{2.7}$$

По теореме вложения [2] эта норма сильнее нормы равномерной сходимости

$$\|\xi\|_C = \max_{0\leqslant\psi\leqslant 2\pi} |\xi(\psi)| \leqslant K\|\xi\|_{W^m_{1,2}} \tag{2.8}$$

Пусть H — открытое множество функций из E, значения которых лежат в Ω. Для любого ξ из H и любого t определим функцию $\eta(\psi) = \Phi(\xi(\psi), t, \psi)$. Из (2.8) и сделанных предположений о свойствах Φ следует, что $\eta = f(\xi, t)$ — функция со значениями в E, заданная при ξ из H и всех t. Кроме того, $f(\xi, t)$ — непрерывная функция своих аргументов, удовлетворяющая условию Липшица по ξ в каждой ограниченной части области определения.

Вводя функции времени со значениями в H

$$\xi(t)(\psi) = x(t, \psi), \quad \xi_n(t)(\psi) = x_n(t, \psi) \tag{2.9}$$

задачам (2.5) и (2.6) можно поставить в соответствие задачи Коши в H

$$\xi^\cdot(t) = f(\xi(t), t), \quad \xi(0) = \xi^\circ \tag{2.10}$$

$$\xi^\cdot_n(t) = P_n f(\xi(t), t), \quad \xi_n(0) = \xi_n^\circ \tag{2.11}$$

Используя теорему существования и единственности для задачи Коши в банаховом пространстве [3], можно доказать следующее утверждение.

Лемма 1. Задачи (2.10) и (2.11) эквивалентны задачам (2.5) и (2.6), т. е. их решения определены (и единственны) на одном и том же временном интервале и связаны соотношением (2.9).

3. Сходимость метода. Пусть E — любое банахово пространство, $f(\xi, t)$ — непрерывная функция, заданная на его открытом подмножестве H и временном интервале $J = [0, b)$, принимающая значения в E и удовлетворяющая условию Липшица по ξ в любой ограниченной части области определения.

Пусть также $P_n : E \to E_n$ — последовательность линейных ограниченных операторов, отображающих E в замкнутое инвариантное подпространство $(P_n E_n \subset E_n)$. Введем обозначение

$$\|\xi(t)\|_T = \max_{0\leqslant t\leqslant T} \|\xi(t)\|$$

Теорема 1. Пусть $\xi(t)$ — решение задачи (2.10) на (конечном или бесконечном) интервале $J = [0, b)$ и при $n \to \infty$

$$P_n\xi \to \xi, \quad \forall\xi \text{ из } E \tag{3.1}$$

$$\xi_n^\circ \to \xi^\circ \tag{3.2}$$

Тогда на любом конечном интервале $[0, T] \subset J$ для всех достаточно больших n существует решение $\xi_n(t)$ задачи (2.11) и $\xi_n(t) \to \xi(t)$ при $n \to \infty$. При этом скорость сходимости определяется неравенством (c_1 и c_2 — постоянные)

$$\| \xi_n(t) - \xi(t) \|_T \leqslant \| \xi_n^\circ - P_n \xi^\circ \| c_1 + \| P_n \xi(t) - \xi(t) \|_T c_2 \tag{3.3}$$

Доказательство. Пусть $r > 0$ такое, что r-окрестность $\xi(t)$ не выходит из H при $0 \leqslant t \leqslant T$. В силу (3.1) $\| P_n \| \leqslant L$ и $\| P_n \xi(t) - \xi(t) \|_T \to 0$, поэтому при больших n функция $P_n \xi(t)$ не выходит из области $H_M = \{\xi \in H \mid \| \xi \| < M\}$, где $M = \| \xi(t) \|_T + r$. Отсюда следует, что $P_n \xi(t)$ является ε_n-решением уравнения (2.11) при $0 \leqslant t \leqslant T$, где $\varepsilon_n = LK \| \xi(t) - P_n \xi(t) \|$, K — постоянная Липшица $f(\xi, t)$ в H_M при $0 \leqslant t \leqslant T$. Используя теорему о сравнении ε-решений [3], можно показать, что при больших n функция $\xi_n(t)$ определена и не выходит из H_M на $[0, T]$ и вывести оценку сверху для $\| P_n \xi(t) - \xi_n(t) \|$, а как следствие оценку (3.3).

Теорема 2. Пусть правая часть уравнения (2.5) удовлетворяет условиям гладкости, сформулированным ранее, и $\xi_n^\circ \to \xi^\circ$ по норме (2.7). Тогда решение $x_n(t, \psi)$ задачи (2.6) сходится к решению $x(t, \psi)$ задачи (2.5) в том смысле, что для любого $T > 0$ при $n \to \infty$

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \left[\int_0^{2\pi} | x_n(t, \psi) - x(t, \psi) |^2 d\psi + \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial x_n(t, \psi)}{\partial \psi} - \frac{\partial x(t, \psi)}{\partial \psi} \right|^2 d\psi \right] \to 0 \tag{3.4}$$

При этом скорость сходимости определяется скоростью сходимости $\xi_n^\circ \to \xi^\circ$ и рядов Фурье для $x(t, \psi)$ и $\partial x(t, \psi)/\partial \psi$.

Доказательство. В силу леммы 1 достаточно проверить справедливость условия (3.1) теоремы 1 для $E = W_{1,2}{}^m$ и операторов Фурье P_n. Но это равносильно сходимости рядов Фурье в $L_2{}^m$ для ξ и $d\xi/d\psi$ при $\xi \in W_{1,2}{}^m$.

Следствия. 1°. При выполнении условий теоремы 2 имеет место равномерная сходимость $x_n(t, \psi) \to x(t, \psi)$, т. е.

$$\max_{\substack{0 \leqslant t \leqslant T \\ 0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi}} | x_n(t, \psi) - x(t, \psi) | \to 0, \quad n \to \infty \tag{3.5}$$

2°. При выполнении условий теоремы 2 имеет место равномерная сходимость решения $x_n(t)$, определяемого из (1.9), (1.10), (1.11) к решению $x(t)$ задачи (1.3), (1.4), т. е.

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} | x_n(t) - x(t) | \to 0, \quad n \to \infty \tag{3.6}$$

Первое следствие вытекает из теоремы 2 в силу неравенства (2.8). Второе вытекает из первого, так как $x_n(t) = x_n(t, 0)$, $x(t) = x(t, 0)$.

Требование гладкости правой части (1.1) можно ослабить, если использовать модификацию предлагаемого метода, в которой вместо операторов Фурье P_n используются операторы Фейера, сопоставляющие с 2π-периодической функцией $\xi(\psi)$ ее сумму Фейера (α_k — коэффициенты Фурье)

$$\sum_{k=-n}^{n} (1 - k/(n+1))\, \alpha_k e^{ik\psi}$$

Если при этом правая часть системы (1.1) непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по x на ограниченных множествах, то, беря в качестве E пространство непрерывных функций от ψ, можно убедиться в справедливости леммы 1. Поэтому из теоремы 1 следует утверждение, аналогичное теореме 2, но вместо (3.4) имеет место только (3.5) и как следствие (3.6).

4. Медленность изменения коэффициентов $\alpha_{kn}(t)$. При малых ε коэффициенты $\alpha_{kn}(t)$ — медленные функции времени t на любом конечном интервале. В самом деле, из непрерывности решений по параметру ε следует, что при $\varepsilon \to 0$ для любого $T > 0$, $\alpha_{kn}(t) \to \alpha_{kn}^\circ(t)$ равномерно по $t \in [0, T]$. Поэтому $\alpha_{kn}^{\boldsymbol\cdot}(t) \to F_{kn}(\alpha_{-nn}^\circ, \ldots, \alpha_{nn}^\circ, 0) = 0$.

Однако в ряде случаев (например, при переходе через резонанс) необходимо рассматривать решение на конечном интервале медленного времени τ, т. е. на асимптотически неограниченном при $\varepsilon \to 0$ интервале времени t

Пусть (для простоты изложения, но без уменьшения общности) $\tau = \varepsilon t$ при $\varepsilon \geqslant 0$. Полагая $\alpha_n = (\alpha_{-nn}, \ldots, \alpha_{nn})$, уравнения (1.4) и (1.10) можно записать в виде

$$\varepsilon \frac{dx}{d\tau} = F(x, \tau, t), \quad \varepsilon \frac{d\alpha_n}{d\tau} = F_n(\alpha_n, \tau) \tag{4.1}$$

Пусть уравнение $F_n(\alpha_n, \tau^*) = 0$ имеет изолированный корень $\alpha_n^*(\tau^*)$ при $0 \leqslant \tau^* \leqslant T$, который является равномерно по параметру τ^* асимптотически устойчивым стационарным решением уравнения

$$d\alpha_n/dt = F_n(\alpha_n, \tau^*) \tag{4.2}$$

Тогда по теореме А. Н. Тихонова [5] решение $\alpha_n(t)$ второй системы (4.1) стремится к $\gamma_n(t) = \alpha_n^*(\varepsilon t) = \alpha_n^*(\tau)$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно по τ для $0 < t_1 \leqslant \tau \leqslant T$.

Более того, если в качестве начального условия α_n° для (4.2) берется решение системы (1.7), так, что $\alpha_n^*(0) = \alpha_n(0)$, то сходимость будет равномерной на всем интервале $0 \leqslant \tau \leqslant T$.

Таким образом, $\alpha_n(t) = \gamma_n(t) + \delta_n(t)$, где $d\gamma_n/dt$, $\delta_n \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно по τ при $0 \leqslant \tau \leqslant T$. В этом смысле можно говорить об асимптотической медленности решения $\alpha_n(t)$.

Условия теоремы А. Н. Тихонова могут быть проверены непосредственно по автономному уравнению (4.2). Однако представляет интерес вывод этих условий из свойств уравнения

$$dx/dt = F(x, \tau^*, t) \tag{4.3}$$

получаемого из (1.4) «замораживанием» τ ($\tau^* = \text{const}$).

Теорема 3. Пусть уравнение (4.3) имеет при $0 \leqslant \tau^* \leqslant T$ периодическое решение $x(\tau^*, t)$, непрерывно зависящее от τ^*, и все мультипликаторы уравнения в вариациях лежат внутри единичного круга при $0 \leqslant \tau^* \leqslant T$. Тогда для достаточно большого n решение $\alpha_n(t)$ второго уравнения (4.1) с $\alpha_n(0) = \alpha_n^*(0)$ является асимптотически медленным при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Уравнение (4.3) можно заменить эквивалентным интегральным уравнением вида $x = Bx$ в пространстве $E = C(W_{1,2}{}^m)$ непрерывных функций от τ^* со значениями в пространстве $W_{1,2}{}^m$ функций от t. Уравнение $F_n(\alpha_n, \tau^*) = 0$ равносильно уравнению Галеркина $x_n = P_n B x_n$. Поэтому в силу теоремы 19.1 из [4] при больших n существует изолированное непрерывное по τ^* стационарное решение $\alpha_n{}^*(\tau^*)$ уравнения (4.2).

Для доказательства его асимптотической устойчивости, равномерной по τ^*, рассмотрим уравнение $x^\cdot = F(x, \tau^*, t + \psi)$ и его решение $x(\tau^*, t + \psi)$, периодическое по t и ψ и непрерывное по τ^*. Можно показать, что оператор монодромии $U(\tau^*, \psi)$ соответствующего уравнения в вариациях при любом ψ подобен оператору $U(\tau^*, 0)$, и значит, его спектр лежит внутри единичного круга. С другой стороны, из теоремы 1 следует, что оператор монодромии $U_n(\tau^*, \psi)$ уравнения $x_n{}^\cdot = P_n F(x_n, \tau^*, t + \psi)$, соответствующий решению $x_n(\tau^*, t + \psi)$, сходится к оператору $U(\tau^*, \psi)$ в пространстве $E = C(L_2{}^{m \times m})$ непрерывных по τ^* и квадратично-суммируемых по ψ оператор-функций. Отсюда следует, что его спектр при больших n лежит внутри единичного круга. Поэтому решение $x_n(\tau^*, t + \psi)$, а значит и $\alpha_n{}^*(\tau^*)$ равомерно по τ^* асимптотически устойчиво.

При более жестких условиях устойчивости решения $x(\tau^*, t)$ можно гарантировать медленность всех $\alpha_n(t)$ (для которых $\alpha_n{}^*(\tau^*)$ существует), а не только для достаточно больших n. Ниже использованы обозначения: $\operatorname{Re} B = (B + B^*)/2$, B^* — оператор, сопряженный к B.

Теорема 4. Пусть для положительного оператора W оператор $\operatorname{Re}[W\partial F \cdot (x, \tau^*, t)/\partial x]$ отрицателен для $x \in \Omega$, $0 \leqslant \tau^* \leqslant T$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Тогда при любом n, для которого существует изолированное непрерывное по τ^* решение $\alpha_n{}^*(\tau^*)$ уравнения $F_n(\alpha_n, \tau^*) = 0$, решение $\alpha_n(t)$ уравнения (4.1) с $\alpha_n(0) = \alpha_n{}^*(0)$ является асимптотически медленным при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Необходимо установить только асимптотическую устойчивость стационарного решения $\alpha_n{}^*(\tau^*)$ уравнения (4.2). Уравнение в вариациях для (4.2) записывается в виде системы

$$\beta_{kn}{}^\cdot = A_{k-l}(\tau^*)\beta_{ln} - ik\beta_{kn} \quad (|k|, \ |l| \leqslant n)$$

или сокращенно $\beta_n{}^\cdot = A^{(n)}(\tau^*)\beta_n$, где $A^{(n)}(\tau^*) = (A_{k,l}{}^{(n)}(\tau^*))$ — оператор матричного вида, $A_{k,l}{}^{(n)}(\tau^*) = A_{k-l,n}(\tau^*) - ik\delta_{kl}$, $A_{p,n}(\tau^*)$ — коэффициенты Фурье для

$$\partial F/\partial x\,(x_n(\tau^*, t), \tau^*, t)$$

По условию

$$y^* \operatorname{Re}\left[W \frac{\partial F}{\partial x}(x, \tau^*, t)\right] y \leqslant -\rho y^* y, \quad \rho > 0$$

Подставляя

$$y = \sum_{|k| \leqslant n} \beta_{kn} e^{ikt}, \quad x = x_n(t)$$

и интегрируя на отрезке $[0, 2\pi]$ по t, получаем

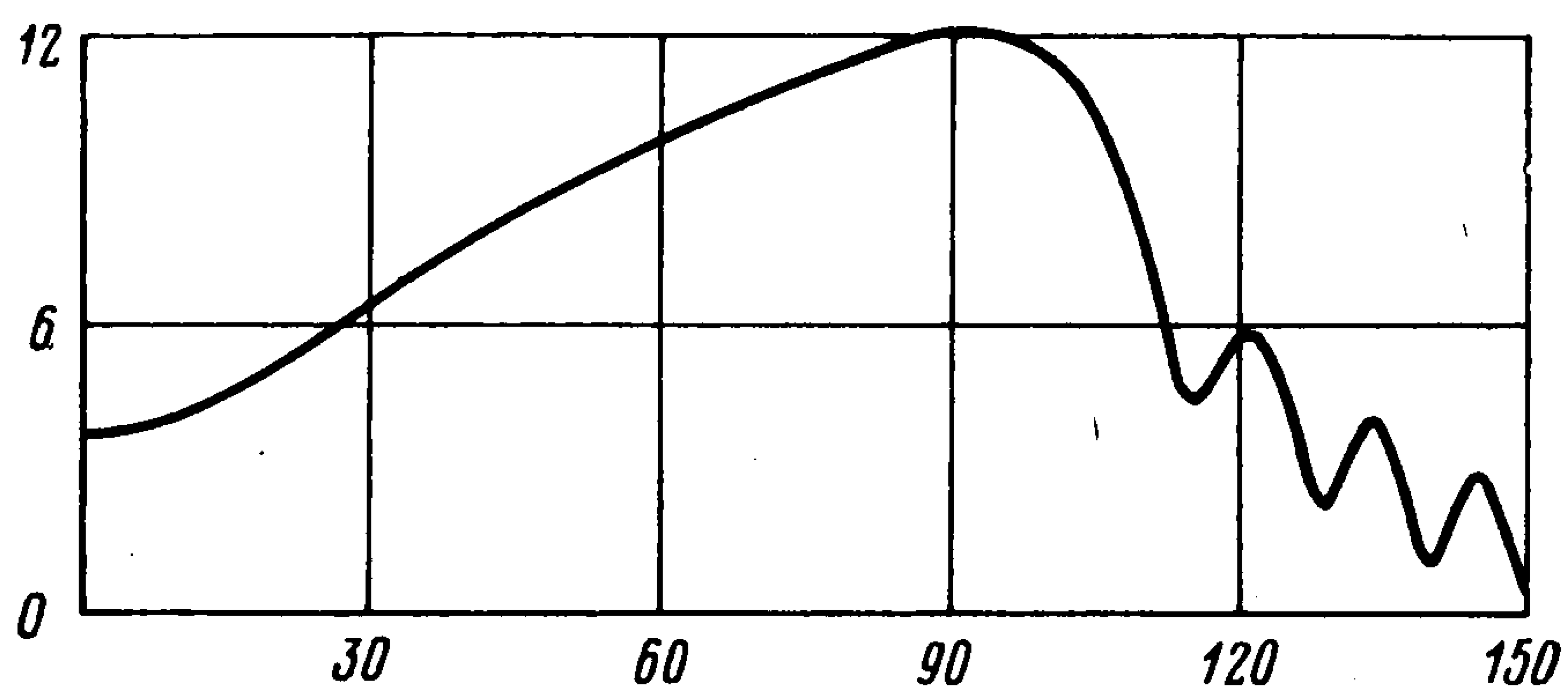
$$\sum_{|k|, |l| \leqslant n} \beta_{ln}^* \operatorname{Re}[W A_{k-l,n}]\beta_{kn} \leqslant -\rho \sum_{|k| \leqslant n} |\beta_{kn}|^2 \tag{4.4}$$

Пусть $W^{(n)} = W \oplus \ldots \oplus W$ ($2n+1$ раз), тогда из (4.4) следует, что оператор $\operatorname{Re}[W^{(n)}A^{(n)}(\tau^*)]$ отрицательно определен и по теореме Ляпунова (см. теорему 5.1 из [6]) спектр $A^{(n)}(\tau^*)$ лежит в левой полуплоскости. Значит решение $\alpha_n^*(\tau^*)$ асимптотически устойчиво. Равномерный по τ^* характер устойчивости становится понятен, если все уравнения рассматривать в банаховом пространстве функций от τ^*, как в доказательстве теоремы 3.

Следствия. 1°. Пусть уравнение (1.4) линейно: $x^{\cdot} = A(\tau, t)x + b(\tau, t)$ и для положительного оператора W оператор $\operatorname{Re}[WA(\tau, t)]$ отрицателен при $0 \leqslant \tau \leqslant T$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Тогда для любого $n = 0, 1, 2\ldots$ решение $\alpha_n(t)$ асимптотически медленное при $\varepsilon \to 0$.

2°. Пусть уравнение (1.4) имеет вид $x^{\cdot} = A(\tau)x + b(\tau, t)$, спектр $A(\tau)$ лежит в левой полуплоскости при $0 \leqslant \tau \leqslant T$. Тогда для любого $n = 1, 2\ldots$ решение $\alpha_n(t)$ асимптотически медленное при $\varepsilon \to 0$.

5. Пример. Описанный метод проиллюстрируем на примере нелинейного одномерного вибратора с жесткой кубической характеристикой восстанавливающей силы, совершающего вынужденные колебания под действием гармонической нагрузки



с медленно возрастающими амплитудой и частотой

$$x^{\cdot\cdot} + \rho x^{\cdot} + \lambda^2(x + dx^3) = p\cos\varphi, \quad p = p^\circ + \tau, \quad \varphi^{\cdot} = \omega = \omega^\circ + \tau$$

$$\tau = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0 \\ \varepsilon t, & t > 0 \end{cases}$$

Записывая уравнение второго порядка в виде системы относительно $x_1 = x$ и $x_2 = x^{\cdot}$, приходим к системе (1.14), (1.15), которая при $n = 1$ принимает вид

$$r_1' = \omega^{-1}r_2\cos(\psi_2 - \psi_1), \quad \psi_1' = 1 + \omega^{-1}r_1^{-1}r_2\sin(\psi_2 - \psi_1)$$

$$r_2' = \omega^{-1}\lambda^2 r_1(1 + 0{,}75\,dr_1^2)\sin(\psi_2 - \psi_1) - \omega^{-1}\rho r_2 + \omega^{-1}p\cos\psi_2$$

$$\psi_2' = 1 + \omega^{-1}r_2^{-1}\lambda^2 r_1(1 + 0{,}75\,dr_1^2)\sin(\psi_2 - \psi_1)$$

При этом

$$x(t) = r_1\cos(\varphi - \psi_1), \quad x^{\cdot}(t) = r_2\cos(\varphi - \psi_2)$$

На фигуре приведены результаты расчета (методом Рунге — Кутта) для r_1, полученные при $\lambda = 1$, $d = 0{,}006$, $\omega^\circ = 0{,}9$, $\rho = 0{,}08$, $\varepsilon = 0{,}005$, $p^\circ = 1$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant 150$, где система переходит через основной резонанс. Видно, что амплитуда r_1 изменяется значительно медленнее решения $x(t)$. Это позволяет решать систему с любой точностью за сравнительно небольшое число шагов, даже в тех случаях, когда ε не слишком мало и нельзя применять квазистационарное приближение.

Рассмотрение высших приближений ($n = 3$ и $n = 5$) дает заметное уточнение только при больших нелинейностях, а также при прохождении ультрагармонических резонансов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фридман В. М.* Методы функционального анализа в задаче о нелинейных неавтономных и автономных периодических колебаниях. Тр. 5-й Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. Киев, 1969. Т. 1, Киев: Изд-е Ин-та матем. АН УССР, 1970. 565 с.
2. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. 808 с.
3. *Бурбаки Н.* Элементы математики. Т. 4. Функции действительного переменного. М.: Наука, 1965, 424 с.
4. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 455 с.
5. *Тихонов А. Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных. Матем. сб., 1952, 31 (73), № 3, с. 575.
6. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М.: Наука, 1970. 534 с.

Поступила в редакцию
24.III.1980