Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 1, 1981

УДК 531.36 : 534

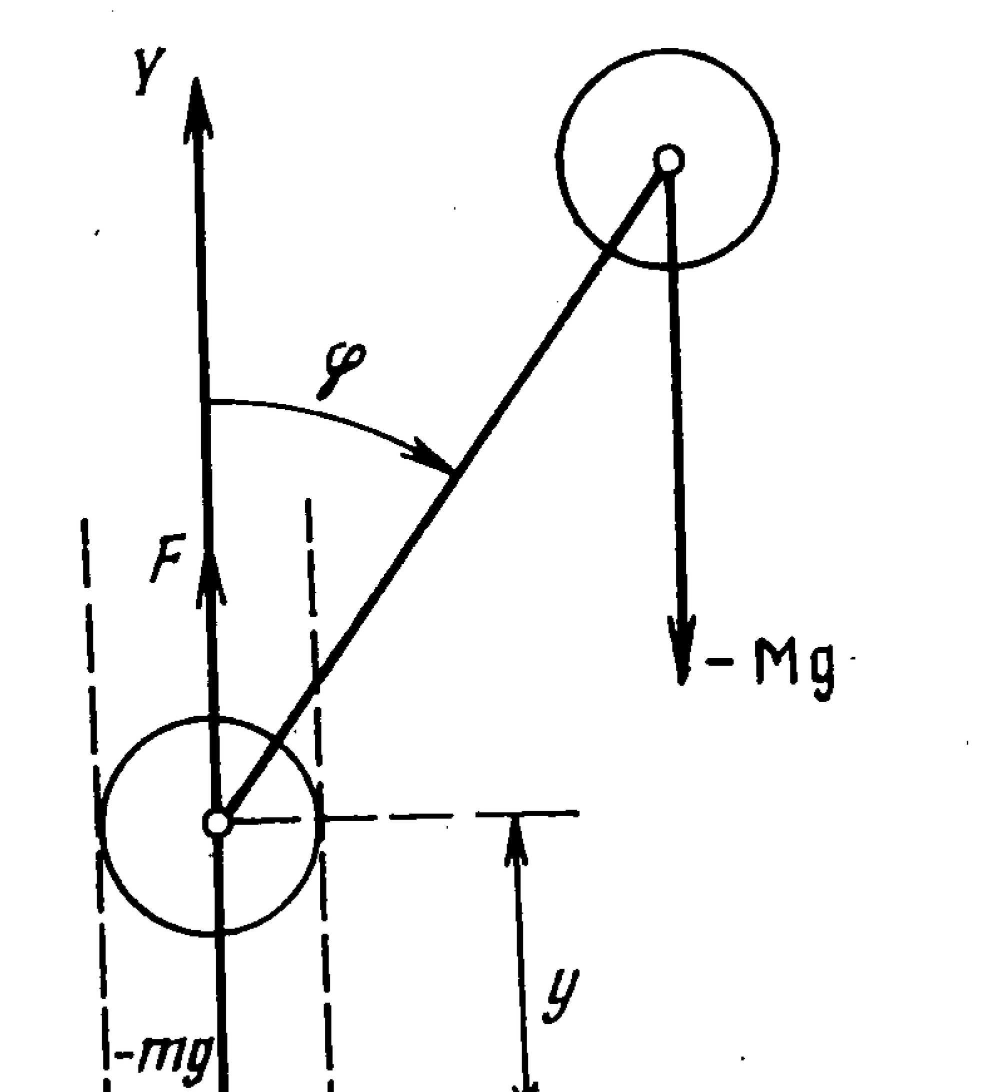
ОПТИМАЛЬНАЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ОБРАЩЕННОГО МАЯТНИКА

Розенблат Г.М.

(Москва)

Рассматривается задача оптимальной стабилизации неустойчивого верхнего положения равновесия маятника при помощи внешних периодических сил. В первом случае сила прикладывается к шарниру подвеса маятника (вибрирующая точка подвеса [1—3]), во втором случае моменты сил прикладываются к стержням, укрепленным в верхней точке маятника. Решается задача о нахождении таких сил (или моментов сил) из заданного класса функций, которые обеспечивают оптимальную (в смысле минимума генерального показателя [4]) стабилизацию маятника и, кроме того, ограничивают в заданных пределах перемещение вибрирующих элементов конструкции.

1. Уравнения движения. *Маятник с подвижной точкой подвеса.* На фиг. 1 в плоскости XOY представлены две массы M и m, соединенные невесомым жестким стержнем длины l. Масса m может перемещаться без трения вдоль оси y в пазу, имеющем щель для свободного движения стержня. В точке m имеется шарнир, позволяющий стержню перемещаться лишь в плоскости XOY. Обобщенные координаты описанной системы суть φ и y, где φ — угол между стержнем и положительным направлением оси y, а y — ордината подвижной массы m. Внешние силы, действующие на систему: силы тяжести $(0, -Mg)$ и $(0, -mg)$, приложенные соответственно к массам M и m, управляющая сила $(0, F(t))$, приложенная к массе m, сила трения вращения в шарнире m, создающая момент относительно оси шарнира, пропорциональный $\varphi^{\cdot}$.



Фиг. 1

Запишем кинетическую энергию системы и обобщенные силы ($k > 0$ — коэффициент трения)

$$L_1 = {}^1/_2 m y^{\cdot 2} + {}^1/_2 M\,[l^2 \cos^2 \varphi \varphi^{\cdot 2} + (y^{\cdot} - l \sin \varphi \varphi^{\cdot})^2]$$

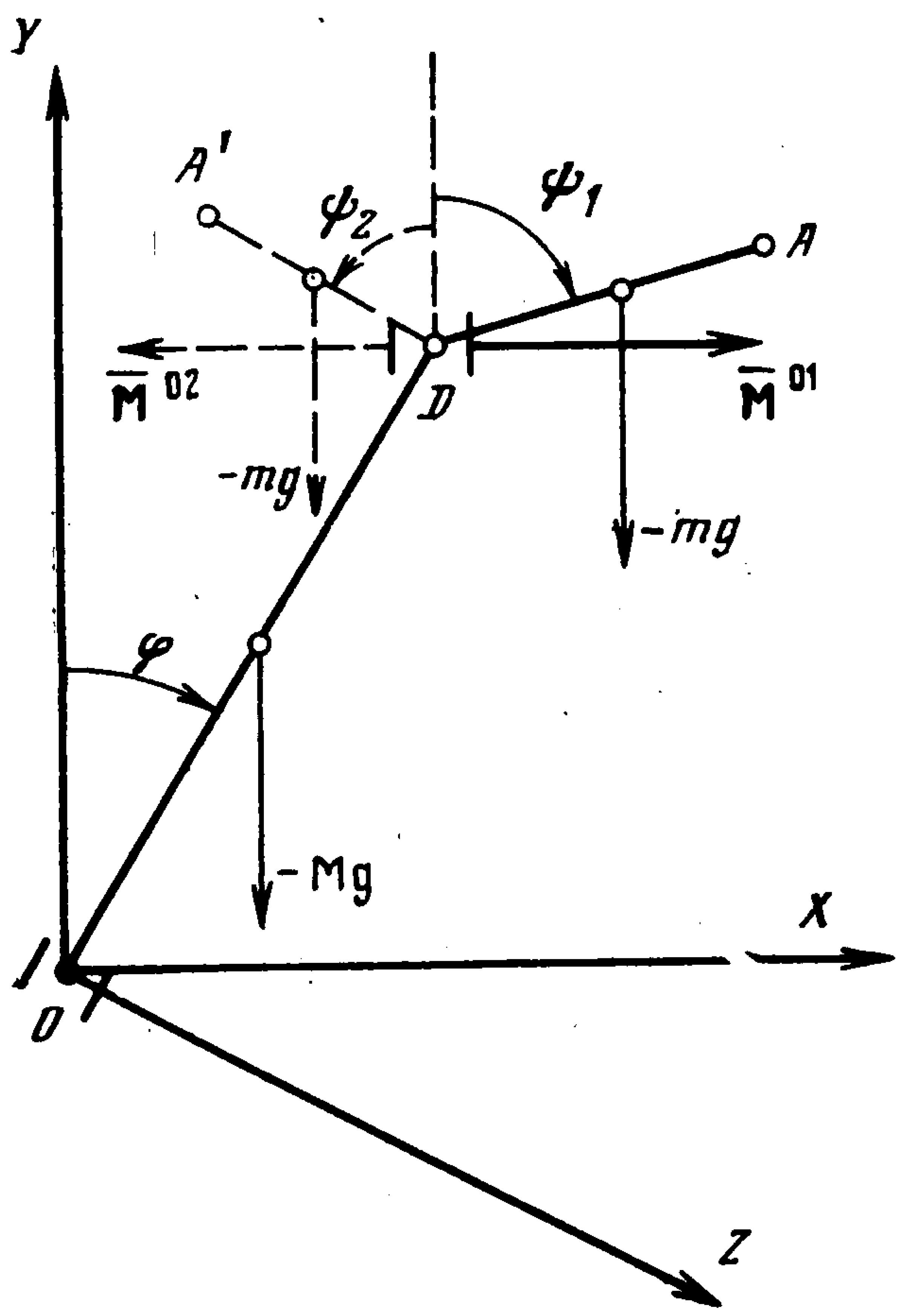
$$Q_y = -(m + M)g + F(t), \quad Q_\varphi = Mgl \sin \varphi - k\varphi^{\cdot}$$

Метод Лагранжа дает следующие уравнения движения:

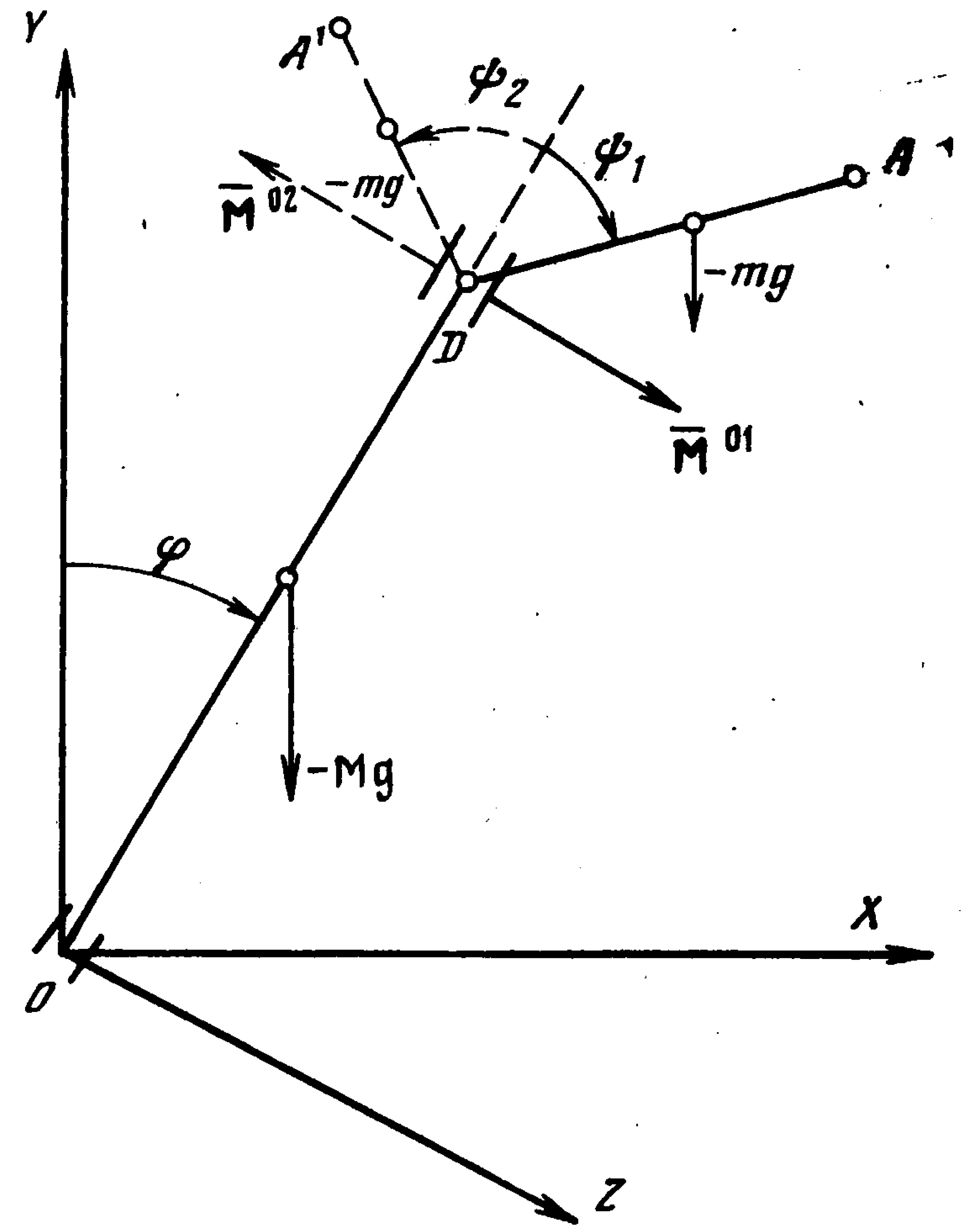
$$(m + M)y^{\cdot\cdot} - Ml\,(\cos \varphi \varphi^{\cdot 2} + \sin \varphi \varphi^{\cdot\cdot}) = -(m + M)g + F(t) \tag{1.1}$$

$$Ml^2\varphi^{\cdot\cdot} - Mly^{\cdot\cdot} \sin \varphi = Mgl \sin \varphi - k\varphi^{\cdot} \tag{1.2}$$

Маятник с подвижными стержнями. На фиг. 2, 3 в системе неподвижных осей $OXYZ$ изображен стержень, имеющий в точке O шарнир. Ось этого шарнира направлена вдоль оси z, обеспечивая движение стержня OD в плоскости XOY. В точке D шарнирно укреплены стержни DA и DA'. Ось шарниров, крепящих стержни DA и DA', лежит в плоскости XOY и направлена либо параллельно оси x (фиг. 2), либо перпендикулярно стержню OD (фиг. 3). Стержни DA и DA' предполагаем однородными,



Фиг. 2



Фиг. 3

жесткими и одинаковыми, длины $2l$ и массы m каждый. Масса и длина однородного, жесткого стержня OD равны M и L. Таким образом, шарнирные крепления в системе таковы, что позволяют стержню OD двигаться только в плоскости XOY, а стержням DA и DA' — либо в плоскости параллельной YOZ (фиг. 2), либо в плоскости перпендикулярной XOY и проходящей через OD (фиг. 3).

В соответствии с описанной конструкцией введем обобщенные координаты системы: φ — угол между OD и положительным направлением оси y, ψ_1 — угол между DA и либо вертикалью, либо прямой OD (фиг. 2, 3), ψ_2 — тот же угол для стержня DA'. Предположим, что на систему действуют следующие внешние силы: силы тяжести $(0, -Mg, 0)$, $(0, -mg, 0)$, управляющие моменты $M^{01}(t)$ и $M^{02}(t)$, приложенные, соответственно, к стержням DA и DA' и направленные по оси шарниров в D, сила трения в шарнире O, создающая момент относительно оси шарнира, пропорциональный $\dot\varphi$. Для упрощения выкладок предполагаем, что движение стержней DA и DA' происходит симметрично относительно плоскости XOY. Это заведомо выполнено, когда $M^{01}(t) = -M^{02}(t) = M^0(t)$, и начальные условия (координаты и скорости) DA и DA' симметричны относительно плоскости XOY. Такое предположение позволяет ввести вместо двух обобщенных координат ψ_1, ψ_2 одну: $\psi = \psi_1 = -\psi_2$.

Кинетические энергии и обобщенные силы для систем на фиг. 2 и 3 соответственно равны

$$L_2 = {}^1/_6 ML^2\varphi^{\cdot 2} + 2\,[{}^1/_2 mL^2\varphi^{\cdot 2} + mlL \sin\varphi \sin\psi\varphi^\cdot\psi^\cdot + {}^2/_3 ml^2\psi^{\cdot 2}]$$

$$Q_\varphi = (MgL/2 + 2mgL)\sin\varphi - k\varphi^\cdot,\; Q_\psi = 2[M^\circ(t) + mgl\sin\psi]$$

$$L_3 = {}^1/_6 ML^2\varphi^{\cdot 2} + 2\,[{}^2/_3\, ml^2\psi^{\cdot 2}(1+\cos^2\psi) + {}^1/_2 mL^2\varphi^{\cdot 2} + mlL\cos\psi\varphi^{\cdot 2}]$$

$$Q_\varphi = (MgL/2 + 2mgL + 2mgl\,(\cos\psi)\sin\varphi - k\varphi^\cdot$$

$$Q_\psi = 2\,[M^\circ(t) + mgl\cos\varphi\sin\psi]$$

Множитель 2 перед квадратными скобками в выражениях для L_2 и L_3 обусловлен наличием двух симметрично движущихся стержней DA, DA'.

Уравнения Лагранжа:

для конструкции на фиг. 2

$$(ML/3 + 2mL)\varphi^{\cdot\cdot} + k\varphi^\cdot/L + 2ml\,(\sin\varphi\cos\psi\psi^{\cdot 2} + \sin\varphi\sin\psi\psi^{\cdot\cdot}) = (M/2 + 2m)g\sin\varphi \tag{1.3}$$

$$ {}^4/_3 ml^2\psi^{\cdot\cdot} + mlL\,(\cos\varphi\sin\psi\varphi^{\cdot 2} + \sin\varphi\sin\psi\varphi^{\cdot\cdot}) = M^\circ(t) + mgl\sin\psi \tag{1.4}$$

для конструкции на фиг. 3

$$(ML/3 + 2mL + 4ml\cos\psi)\varphi^{\cdot\cdot} + (k/L - 4ml\sin\psi\psi^\cdot)\varphi^\cdot = (M/2 + 2m\,(1 + l\cos\psi/L))g\sin\varphi \tag{1.5}$$

$$ {}^4/_3 ml^2\,(1+\cos^2\psi)\psi^{\cdot\cdot} - {}^4/_3\, ml^2\psi^{\cdot 2}\cos\psi\sin\psi + 2mlL\sin\psi\varphi^{\cdot 2} = M^\circ(t) + mgl\cos\varphi\sin\psi \tag{1.6}$$

2. Постановка задач. *Маятник с подвижной точкой подвеса.* Будем рассматривать движения, описываемые уравнениями (1.1) и (1.2), в малой окрестности точки $\varphi = \varphi^\cdot = 0$. Пренебрегая в (1.1) малыми первого порядка и выше по φ и $\varphi^\cdot$, получим

$$y^{\cdot\cdot} = -g + \frac{F(t)}{m+M} \tag{2.1}$$

В (1.2) пренебрежем малыми второго порядка и выше по φ и подставим $y^{\cdot\cdot}$ из (2.1). Получим

$$\varphi^{\cdot\cdot} + k_1\varphi^\cdot = \frac{F(t)}{l\,(m+M)}\,\varphi,\quad k_1 = \frac{k}{Ml^2} \tag{2.2}$$

Пусть управляющая сила $F(t)$ удовлетворяет ограничениям

$$-F_1 \leqslant F(t) \leqslant F_2,\quad F_1 > 0,\quad F_2 > 0,\quad t \in [0, \infty) \tag{2.3}$$

Зададимся периодом $T > 0$ и поставим следующую задачу: найти T-периодическую функцию $F(t)$, удовлетворяющую условиям (2.3), обеспечивающую наилучшую (в смысле минимума генерального показателя) устойчивость решений уравнения (2.2) и такую, что уравнение (2.1) имеет T-периодическое решение, лежащее в заданной окрестности $|y| \leqslant \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 > 0$.

Отметим, что в работах [1—3] движение точки подвеса заранее задавалось в виде $y(t) = \varepsilon \sin \omega t$ или какой-либо другой периодической функции. Следовательно, не возникала задача о нахождении оптимальных управляющих сил.

Маятник с подвижными стержнями. Будем рассматривать движение конструкций на фиг. 2, 3 в малой окрестности точки $\varphi = \varphi^{\cdot} = 0$, $\psi = \pi/2$. Таким образом, изучается движение стержня OD вблизи вертикали при вибрации стержней DA и DA' вблизи горизонтали. Осуществляя линеаризацию уравнений (1.3) — (1.6) аналогично указанному выше, получим после элементарных преобразований

$$\left(\frac{ML}{3} + 2mL\right)\varphi^{\cdot\cdot} + \frac{k}{L}\varphi^{\cdot} = \left[\frac{M+m}{2} g - \frac{3}{2}\frac{M^{\circ}(t)}{l}\right]\varphi \tag{2.4}$$

$$\frac{4}{3} ml^2 \Delta\psi^{\cdot\cdot} = -M^{\circ}(t) - mgl, \quad \Delta\psi \equiv \frac{\pi}{2} - \psi \tag{2.5}$$

$$\left(\frac{ML}{3} + 2mL\right)\varphi^{\cdot\cdot} + \left(\frac{k}{L} + 4ml\Delta\psi^{\cdot}\right)\varphi^{\cdot} = \left(\frac{M}{2} + 2m\right)g\varphi \tag{2.6}$$

Линеаризация уравнения (1.6) дает уравнение (2.5).

Пусть управляющий момент $M^{\circ}(t)$ удовлетворяет ограничениям

$$-M_1^{\circ} \leqslant M^{\circ}(t) \leqslant M_2^{\circ}, \; M_1^{\circ} > 0, \; M_2^{\circ} > 0, \; t \in [0, \infty) \tag{2.7}$$

Зададимся периодом $T > 0$ и поставим следующую задачу: найти T-периодическую функцию $M^{\circ}(t)$, удовлетворяющую условиям (2.7), обеспечивающую наилучшую (в смысле минимума генерального показателя) устойчивость решений уравнения (2.4) или (2.6) и такую, что уравнение (2.5) имеет T-периодическое решение, лежащее в заданной окрестности $|\Delta\psi| \leqslant \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 > 0$.

Если OD, DA и DA' интерпретировать, соответственно, как тело и руки человека, то стабилизация тела осуществляется при помощи периодических взмахов руками «вверх-вниз». В работе [5] описан случай, когда человек обеспечивает стабилизацию своего тела, вращая руками с все возрастающей угловой скоростью.

3. Формулировка и решение обобщенной задачи. Пусть C — класс всех кусочно-непрерывных скалярных вещественных функций на $[0, \infty)$. Рассмотрим следующие подмножества C:

$$R(T, m_1, m_2) = \{u \in C : u(t) \equiv u(t+T), \; -m_1 \leqslant u(t) \leqslant m_2, \; t \in [0, \infty)\}$$

$$R_h(T, m_1, m_2) = \left\{u \in R(T, m_1, m_2) : \frac{1}{T}\int_t^{t+T} u(\tau)\,d\tau = h \right.$$

$$\left. h \in [-m_1, m_2]\right\}$$

Требуется найти функцию $u \in R(T, m_1, m_2)$, обеспечивающую минимум генерального показателя уравнения

(3.1) $$x^{\cdot\cdot} = [a + bu(t)]\, x, \ a > 0, \ b > 0$$

и такую, что уравнение

(3.2) $$y^{\cdot\cdot} = u(t) - c, \ c > 0$$

имеет T-периодическое решение, удовлетворяющее условию

(3.3) $$|y(t)| \leqslant \varepsilon_0, \quad t \in [0, \infty)$$

Отметим, что в (3.1) — (3.3) a, b, c, ε_0 — заданные положительные постоянные, причем $c \leqslant m_2$ (при $c > m_2$ уравнение (3.2) заведомо не имеет периодических решений, если $u \in R(T, m_1, m_2)$).

Приступим к решению поставленной задачи. Зададим произвольно $h \in [-m_1, m_2]$ и введем обозначения

$$M_1 = a - bm_1, \quad M_2 = a + bm_2$$

$$\sigma_1 = M_2^{1/2} \frac{h + m_1}{m_2 + m_1}, \quad \sigma_2 = |M_1|^{1/2} \frac{m_2 - h}{m_2 + m_1}$$

$$\gamma = \frac{1}{2}\left(\left|\frac{M_2}{M_1}\right|^{1/2} + \left|\frac{M_1}{M_2}\right|^{1/2} \operatorname{sign} M_1\right)$$

Справедлива следующая лемма, доказательство которой приведено в [6].

Лемма. Если $M_1 \geqslant 0$, то наименьший генеральный показатель уравнения (3.1), достижимый на функциях из $R_h(T, m_1, m_2)$, есть

(3.4) $$\mu^0 = \frac{1}{T} \ln (A + \sqrt{A^2 - 1})$$

$$A = \operatorname{ch}(\sigma_1 T) \operatorname{ch}(\sigma_2 T) + \gamma \operatorname{sh}(\sigma_1 T) \operatorname{sh}(\sigma_2 T)$$

Функция $u^0 \in R_h(T, m_1, m_2)$, на которой достигается μ^0, единственна (с точностью до сдвигов во времени) и определяется равенствами

(3.5) $$u^0(t) = m_2, \quad 0 \leqslant t < \frac{h + m_1}{m_2 + m_1} T$$

$$u^0(t) = -m_1, \quad \frac{h + m_1}{m_2 + m_1} T \leqslant t < T$$

Если $M_1 < 0$, то соответствующий наименьший генеральный показатель уравнения (3.1) есть

(3.6) $$\mu^0 = \min_k \frac{k}{T} \ln |A_k + \sqrt{A_k^2 - 1}|$$

$$A_k = \operatorname{ch}\left(\frac{\sigma_1 T}{k}\right) \cos\left(\frac{\sigma_2 T}{k}\right) + \gamma \operatorname{sh}\left(\frac{\sigma_1 T}{k}\right) \sin\left(\frac{\sigma_2 T}{k}\right), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Соответствующая функция u° определяется формулами (3.5), где T заменяется на T/k (k — натуральное число, доставляющее min в (3.6)).

В (3.4) — (3.6) присутствует неопределенный параметр $h \in [-m_1, m_2]$. Выберем h и начальные условия для уравнения (3.2) так, чтобы обеспечить существование периодического решения уравнения (3.2) при $u = u^\circ(t)$.

Для упрощения записи зададим систему координат $OXYZ$ так, чтобы $y(0) = 0$. Тогда решение системы (3.2) имеет вид

$$y^{\cdot}(t) = y^{\cdot}(0) + \int_0^t u^0(\tau)\,d\tau - ct \tag{3.7}$$

$$y(t) = y^{\cdot}(0)\,t + \int_0^t (t-\tau)\,u^\circ(\tau)\,d\tau - \frac{ct^2}{2} \tag{3.8}$$

Для T-периодического решения $y^{\cdot}(T) = y^{\cdot}(0)$. Поэтому из (3.7) при $t = T$ получим $h = c$. Далее, так как, $y(T) = y(0) = 0$, то из (3.8) при $t = T$ получим

$$y^{\cdot}(0) = \frac{cT}{2} - \frac{1}{T}\int_0^T (T-\tau)\,u^\circ(\tau)\,d\tau = \frac{T(c-m_2)(c+m_1)}{2(m_1+m_2)} \tag{3.9}$$

Находим теперь экстремумы функции $y(t)$ из (3.8), где $y^{\cdot}(0)$ дается формулой (3.9), а $u^\circ(\tau)$ — равенствами (3.5) при $h = c$. Точки экстремума суть решения уравнения $y^{\cdot}(t) = 0$. Проводя элементарные выкладки, получим

$$\min_t y(t) = -\frac{T^2}{8}\left(\frac{c+m_1}{m_2+m_1}\right)^2 (m_2 - c) \tag{3.10}$$

$$\max_t y(t) = \frac{T^2}{8}\left(\frac{m_2-c}{m_2+m_1}\right)^2 (m_1 + c)$$

Условие (3.3) будет выполнено, если $\max y(t) \leqslant \varepsilon_0$, а $\min y(t) \geqslant -\varepsilon_0$. Эти два неравенства, согласно (3.10), можно заменить одним

$$T < 2\sqrt{2\varepsilon_0}\,\frac{m_1+m_2}{B} \tag{3.11}$$

$$B = \min\{(m_1+c)\sqrt{m_2-c},\ (m_2-c)\sqrt{m_1+c}\}$$

Таким образом, получаем следующий результат.

Теорема. Если $M_1 \geqslant 0$, то искомое управление $u^\circ(t)$ дается формулой (3.5) при $h = c$. Минимум генерального показателя находится из (3.4), причем период T должен удовлетворять неравенству (3.11).

Если $M_1 < 0$, то искомое управление $u^\circ(t)$ находится из (3.5) при $h = c$, где T заменяется на T/k (k — натуральное число, доставляющее min в (3.6)). Минимум генерального показателя находится из (3.6), причем период T/k должен удовлетворять (3.11).

Приведем оценку фундаментальной матрицы $X(t)$ системы (3.1). Пусть при $u = u^\circ(t)$ система устойчива. В этом случае $\mu^\circ = 0$ ($\mu^\circ < 0$ невозможно, так как система (3.1) не может быть асимптотически устойчивой). Ясно, что имеет место случай $M_1 < 0$ леммы. Из (3.6) получим $|A_k + \sqrt{A_k^2 - 1}| = 1$, следовательно, $|A_k| < 1$, и оба мультипликатора системы (3.1) по модулю равны единице [7]. Тогда справедлива оценка

$$\|X(t)\| < C_0(1 - A_k^2)^{-1/2}, \quad t \in [0, \infty) \tag{3.12}$$

где C_0 — постоянная, зависящая от параметров a, b, m_1, m_2, h, T/k.

Оценка (3.12) получается следующим образом. Находим в явном виде матрицу $X(T/k)$ (это можно сделать, ввиду кусочной постоянности функции $u^\circ(t)$), затем приводим эту матрицу второго порядка к диагональной форме и возводим ее в произвольную степень n. Аналогичные оценки нетрудно получить и в случае $\mu^\circ > 0$. Эти оценки необходимы для проверки корректности линеаризации исходных нелинейных уравнений.

4. Решение задач п. 2. Применим теорему из п. 3 для решения задач п. 2.

Маятник с подвижной точкой подвеса. Сделаем в (2.2) замену $\varphi = x \exp(-{}^1/_2 k_1 t)$ и получим уравнение для x

$$x^{\cdot\cdot} = \left[\frac{F(t)}{l(m+M)} + \frac{k_1^2}{4}\right] x \tag{4.1}$$

Обозначим $u(t) = F(t)/(m + M)$. Тогда уравнения (4.1) и (2.1) эквивалентны уравнениям (3.1) и (3.2) при следующих значениях параметров:

$$m_i = \frac{F_i}{m+M} \ (i = 1, 2), \quad c = g, \quad a = \frac{k_1^2}{4}, \quad b = \frac{1}{l} \tag{4.2}$$

Подстановка (4.2) в (3.4) — (3.6) и (3.11) дает решение задачи. Для асимптотической устойчивости маятника при указанных ограничениях необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$\mu^\circ < {}^1/_2 \, k_1 \tag{4.3}$$

где μ° дается формулой (3.4) или (3.6) с параметрами из (4.2). Кроме того, так как при выполнении (4.3) линеаризованное уравнение (2.2) асимптотически устойчиво, то, согласно первому методу Ляпунова [7], решение $\varphi = \varphi^\cdot = 0$ соответствующего нелинейного уравнения (1.2) также асимптотически устойчиво.

Маятник с подвижными стержнями. Конструкция на фиг. 2 описывается линеаризованными уравнениями (2.4) и (2.5). Сделаем в (2.4) замену

$$\varphi = x \exp\left(-\frac{k}{2LR}\, t\right), \quad R = \frac{ML}{3} + 2mL$$

Получим следующее уравнение для x:

$$x^{\cdot\cdot} = \left[-\frac{3}{2}\frac{M^\circ(t)}{lR} + \frac{M+m}{2R} g + \frac{k^2}{4L^2R^2}\right] x \tag{4.4}$$

Обозначим $u(t) = -{}^3/_4 M^\circ(t)/(ml^2)$, тогда уравнения (4.4) и (2.5) эквивалентны уравнениям (3.1) и (3.2) при следующих значениях параметров:

$$\begin{gathered} m_1 = \frac{3M_2^\circ}{4ml^2}, \quad m_2 = \frac{3M_1^\circ}{4ml^2}, \quad c = \frac{3g}{4l} \\ a = \frac{M+m}{2R} g + \frac{k^2}{4L^2R^2}, \quad b = \frac{2lm}{R} \end{gathered} \tag{4.5}$$

Подстановка параметров (4.5) в (3.4) — (3.6) и (3.11) дает решение задачи. Кроме того, для асимптотической устойчивости стержня OD необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$\mu^\circ < k/(2LR) \tag{4.6}$$

где μ° дается формулой (3.4) или (3.6) с параметрами из (4.5).

Конструкция на фиг. 3 описывается линеаризованными уравнениями (2.6) и (2.5). Сделаем в (2.6) замену

$$\varphi = x \exp\left[-\frac{k}{2LR}\, t - \frac{2ml}{R} \Delta\psi(t)\right]$$

и в полученное уравнение для x подставим выражение для $\Delta\psi^{\cdot\cdot}$ из (2.5)

$$x^{\cdot\cdot} = \left[-\frac{3M^0(t)}{2lR} + \frac{M+m}{2R} g + \left(\frac{k}{2LR} + \frac{2ml}{R}\Delta\psi^\cdot\right)^2\right] x \tag{4.7}$$

Согласно формулам (3.7) и (3.9), величина $\Delta\psi^*$ мала при малых периодах T (предполагаем, что $\Delta\psi \equiv y(t)$). Следовательно, при больших частотах вибрации стержней DA и DA' в уравнении (4.7) можно положить $\Delta\psi^* = 0$, что приводит к уравнению (4.4). Из первого метода Ляпунова [7] следует, что при выполнении (4.6) решение $\varphi = \varphi^* = 0$ исходного нелинейного уравнения (1.3) или (1.5) асимптотически устойчиво. Для проверки корректности линеаризации должны применяться оценки типа (3.12).

Автор благодарит В. Г. Демина, А. М. Формальского и В. В. Александрова за обсуждение статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боголюбов Н. Н.* Теория возмущений в нелинейной механике.— Сб. тр. ин-та строительной механики АН УССР, 1950, № 14, с. 9.
2. *Капица П. Л.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса.— ЖЭТФ, 1951, т. 21, вып. 5, с. 588.
3. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1971. 239 с.
4. *Далецкий Ю. А., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970, 534 с.
5. *Белецкий В. В., Лавровский Э. К.* О задаче стояния шагающего аппарата.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 4, с. 591.
6. *Розенблат Г. М.* О стабилизации неустойчивых систем второго порядка.— Автоматика и телемеханика, 1979, № 10, с. 19.
7. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.—Л.: Гостехиздат, 1950. 472 с.

Поступила в редакцию
2.VI.1980