

УДК 531.36 : 534

**ВЫНУЖДЕННЫЕ СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА**

Златоустов В. А., Сазонов В. В., Сарычев В. А.

(Москва)

Рассматриваются симметричные субгармонические решения дифференциального уравнения второго порядка, описывающего колебания математического маятника под действием внешней синусоидальной силы. В случае, когда амплитуда вынуждающей силы мала, субгармонические решения определены аналитически, затем с помощью численных расчетов эти решения продолжены в область больших амплитуд вынуждающей силы. Исследуется ветвление найденных решений.

1. Введение. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(1.1) \quad x'' + \mu \sin x = e \sin t$$

где x — неизвестная функция, t — независимая переменная, e и μ — параметры. Периодические решения этого уравнения, совпадающие при $e = 0$ с периодическими решениями соответствующего однородного уравнения, разыскивались в [1]. Найденные решения были обозначены $x_z(t, e)$, $x_{n/m}^{(r)}(t, e)$, $\bar{x}_{n/m}^{(r)}(t, e)$. Решение $x_z(t, e)$ имеет период 2π , существует при $|e| \ll 1$, $\mu \neq n^2$ ($n = 1, 3, 5, \dots$) и удовлетворяет условию $x_z(t, 0) = 0$. В обозначениях $x_{n/m}^{(r)}(t, e)$, $\bar{x}_{n/m}^{(r)}(t, e)$ m и n — взаимно простые натуральные числа, причем для $\bar{x}_{n/m}^{(r)}$ одно из этих чисел четно, $r = 0, 1, \dots, 2m - 1$. Решения $x_{n/m}^{(r)}$, $\bar{x}_{n/m}^{(r)}$ имеют период $2\pi m$, определены при $|e| \ll 1$, $\mu > n^2/m^2$ и совпадают при $e = 0$ с $2\pi m/n$ -периодическими решениями однородного уравнения. Решения x_z , $x_{n/m}^{(r)}$, $\bar{x}_{n/m}^{(r)}$ аналитически зависят от e в окрестности точки $e = 0$.

Численное построение решения x_z сводится [1] к решению для уравнения (1.1) краевой задачи

$$(1.2) \quad x(0) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Построение решений $x_{n/m}^{(r)}$ сводится к решению краевой задачи

$$(1.3) \quad x(0) = x\left(\frac{\pi m}{2}\right) = 0$$

если числа m и n нечетны, и к решению краевой задачи

$$(1.4) \quad x(0) = x(\pi m) = 0$$

если одно из этих чисел четно. Построение решений $\bar{x}_{n/m}^{(r)}$ сводится к решению краевой задачи

$$(1.5) \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = x\left(\frac{\pi}{2} + \pi m\right) = 0$$

Решения краевой задачи (1.2) можно задать в виде поверхности S в пространстве $R^3(x(0), e, \mu)$ или в виде поверхности S' в пространстве $R^3(x(\pi/2), e, \mu)$. Поверхности S и S' диффеоморфны. Решения краевых задач (1.3)–(1.5) будем задавать поверхностями $S_{n/m} \subset R^3(x(0), e, \mu)$ и $S'_{n/m} \subset R^3(x(\pi/2), e, \mu)$ соответственно. Если n нечетно, то $S_{n/1} \subset S$. Свойства поверхностей S , $S_{2/1}$ и $S'_{2/1}$ были исследованы в [1] (в [1] поверхности S' , $S_{2/1}$, $S'_{2/1}$ обозначались соответственно \bar{S} , S' , \bar{S}'). В данной работе рассматриваются поверхности $S_{n/m}$ и $S'_{n/m}$ при $m > 1$. Эти поверхности описывают зависимость симметричных субгармонических вынужденных колебаний математического маятника от параметров e и μ . Согласно [1], достаточно провести исследование этих поверхностей при $e \geq 0$.

2. Резонансные кривые. Пусть $x(t)$ — решение краевой задачи (1.1), (1.2). Тогда [1]

$$(2.1) \quad x(-t) = -x(t), \quad x(t + \pi) = -x(t)$$

Рассмотрим соответствующее уравнение в вариациях

$$(2.2) \quad y'' + \mu y \cos x(t) = 0$$

Здесь в силу (2.1) $\cos x(t)$ — четная π -периодическая функция. Пусть $y_1(t)$, $y_2(t)$ — решения (2.2) с начальными условиями $y_1(0) = y_2'(0) = 1$, $y_1'(0) = y_2(0) = 0$. Тогда $y_1(t)$ — четная, $y_2(t)$ — нечетная функции. Вследствие этого обстоятельства и соотношения (теорема Лиувилля)

$$(2.3) \quad y_1\left(\frac{\pi}{2}\right)y_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) - y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right)y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

матрицу монодромии уравнения (2.2)

$$C = \begin{vmatrix} y_1(\pi) & y_2(\pi) \\ y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{vmatrix}$$

можно представить следующим образом:

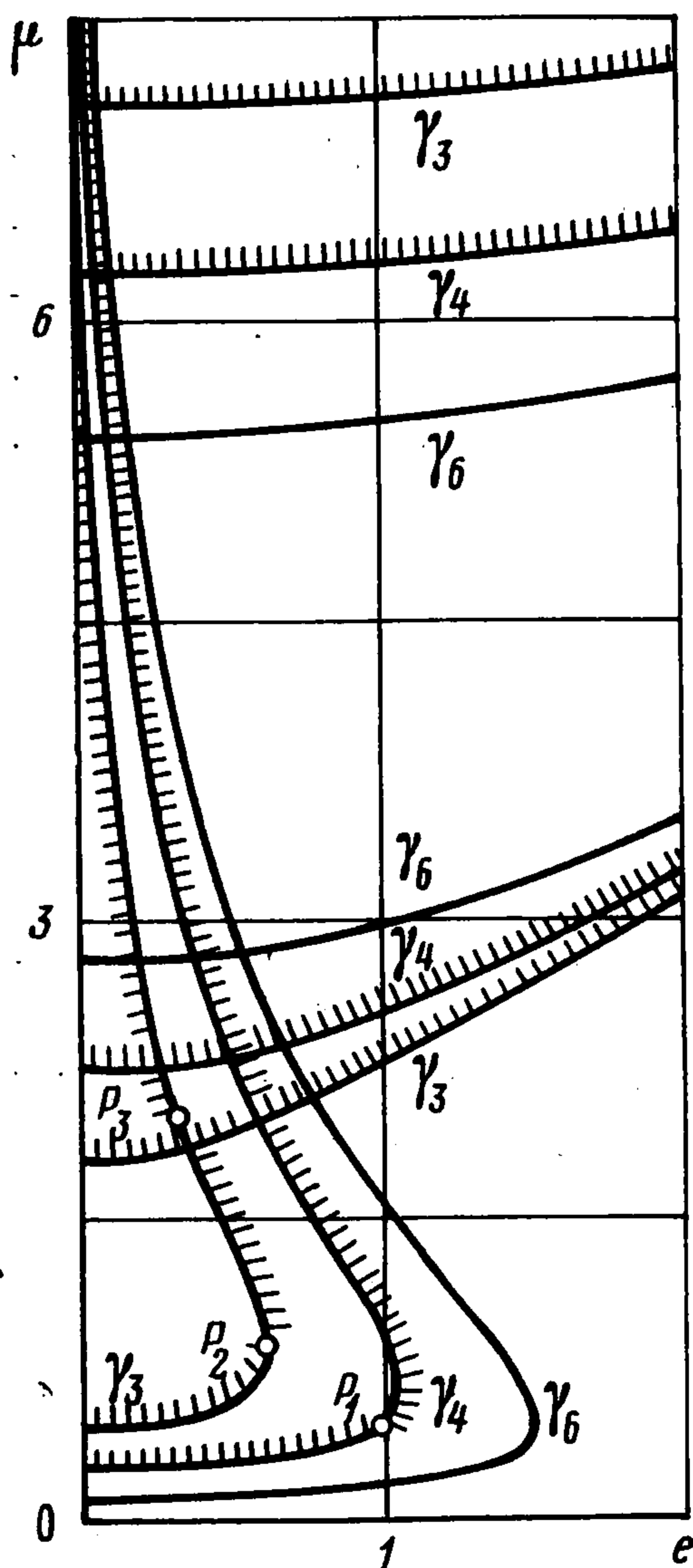
$$C = \begin{vmatrix} y_1\left(\frac{\pi}{2}\right)y_2''\left(\frac{\pi}{2}\right) + y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right)y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) & 2y_2\left(\frac{\pi}{2}\right)y_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ 2y_1\left(\frac{\pi}{2}\right)y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) & y_1\left(\frac{\pi}{2}\right)y_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) + y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right)y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{vmatrix}$$

Характеристическое уравнение для (2.2) имеет вид $\rho^2 - 2A\rho + 1 = 0$, где

$$(2.4) \quad A = \bar{y}_1\left(\frac{\pi}{2}\right)y_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) + y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right)y_2\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Решение $x(t)$ при $|A| < 1$ устойчиво в линейном приближении, а при $|A| > 1$ — неустойчиво. Границы областей устойчивости — кривые на поверхности S , определяемые уравнениями $A = 1$ и $A = -1$. При $A = 1$ в силу соотношений (2.3), (2.4) $y_1'(\pi/2)y_2(\pi/2) = 0$. Если $y_1'(\pi/2) = 0$, то функция $y_1(t)$ будет π -периодической; если $y_2(\pi/2) = 0$, то этим свойством будет обладать функция $y_2(t)$. Таким образом, кривые $A = 1$ могут быть двух типов: Γ_1^+ и Γ_1^- . На кривой Γ_1^+ (Γ_1^-) уравнение (2.2) имеет четное (нечетное) π -периодическое решение. Аналогично при $A = -1$ имеем $y_1(\pi/2)y_2'(\pi/2) = 0$. Если $y_1(\pi/2) = 0$, то функция $y_1(t)$ будет

π -антипериодической (и следовательно, 2π -периодической); если $y_2(\pi/2) = 0$, то этим свойством будет обладать функция $y_2(t)$. Кривые $A = -1$ могут быть двух типов: Γ_2^+ и Γ_2^- . На кривой Γ_2^+ (Γ_2^-) уравнение (2.2) имеет четное (нечетное) π -антипериодическое решение. Результаты вычисления кривых Γ_m^\pm ($m = 1, 2$) приведены в [1].



Фиг. 1

Пусть $|A| < 1$. Определим ω из условия $A = \cos \pi\omega$. Тогда в силу соотношений (2.3), (2.4) матрицу C можно представить в виде (ср. [2], п. 179)

$$C = \begin{vmatrix} \cos \pi\omega & \frac{1}{a} \sin \pi\omega \\ -a \sin \pi\omega & \cos \pi\omega \end{vmatrix}$$

где $a \neq 0$ — некоторое число. Рассмотрим решения уравнения (2.2) $u_1(t) = y_1(t)$, $u_2(t) = ay_2(t)$. Можно доказать, что

$$(2.5) \quad \begin{aligned} u_1(t) &= \psi_1(t) \cos \omega t - \psi_2(t) \sin \omega t, \\ u_2(t) &= \psi_1(t) \sin \omega t + \psi_2(t) \cos \omega t \end{aligned}$$

Здесь $\psi_1(t)$ — четная, $\psi_2(t)$ — нечетная π -периодические функции.

Пусть m — натуральное число. Рассмотрим кривые $\Gamma_m \subset S$, на которых уравнение (2.2) имеет нетривиальные периодические решения с наименьшим периодом πm . Такие кривые называются резонансными кривыми m -го порядка. Если $m = 1, 2$, то $\Gamma_m = \Gamma_m^+ \cup \Gamma_m^-$. Если $m > 2$, то резонансные кривые определяются соотношениями $\cos \pi m\omega = 1$, $\cos k\pi\omega \neq 1$ ($k = 1, \dots, m-1$).

В силу этих соотношений $\omega = 2n/m$, где n — целое число, взаимно простое с m . Как следует из (2.5), при $m > 2$ на кривых Γ_m все решения уравнения (2.2) будут πm -периодическими.

Численное построение кривых Γ_m при $m > 2$ сводится к решению для системы, образованной уравнением (1.1) и двумя уравнениями (2.2), краевой задачи (1.2) и $A = \cos 2\pi n/m$. Здесь величина A определена формулой (2.4). Существуют и другие способы построения резонансных кривых, например, можно решать для системы (1.1), (2.2) краевую задачу (1.2), $y(0) = y(\pi m/2) = 0$. Однако первый способ требует меньших затрат машинного времени.

Проекцию кривой Γ_m на плоскость (e, μ) обозначим γ_m . Некоторые из кривых γ_m приведены на фиг. 1.

3. Периодические решения второго рода. Согласно [2], кривые γ_m могут быть кривыми разветвления πm -периодических (если m четно) и $2\pi m$ -периодических (если m нечетно) решений уравнения (1.1). При $m > 2$ такие решения называются [2] периодическими решениями второго рода. Для исследования этих решений сделаем следующие преобразования.

Пусть $(e_*, \mu_*) \in \gamma_m$, $x_*(t)$ — соответствующее точке (e_*, μ_*) решение краевой задачи (1.2): $(x_*(0), e_*, \mu_*) \in \Gamma_m$. Тогда с помощью обозначений

$$q = x - x_*(t), \quad \varepsilon = e - e_*, \quad \delta = \mu - \mu_*, \quad f(t) = \mu_* \cos x_*(t)$$

$$H(q, t, \varepsilon, \delta) = \varepsilon \sin t + \mu_* \sin x_*(t) + f(t)q -$$

$$- (\mu_* + \delta) \sin [x_*(t) + q]$$

уравнение (1.1) можно записать в виде

$$(3.1) \quad q'' + f(t)q = H(q, t, \varepsilon, \delta)$$

Здесь

$$(3.2) \quad f(t + \pi) = f(t), \quad H(q, t + \pi, \varepsilon, \delta) = -H(-q, t, \varepsilon, \delta)$$

$$(3.3) \quad f(t) = f(-t), \quad H(q, t, \varepsilon, \delta) = -H(-q, -t, \varepsilon, \delta)$$

Функция $H(q, t, \varepsilon, \delta)$ — аналитическая по q, ε, δ в точке $q = \varepsilon = \delta = 0$, причем $H(q, t, \varepsilon, \delta) = O(q^2 + |\varepsilon| + |\delta|)$. Исследование периодических решений уравнения (1.1), совпадающих при $e = e_*$, $\mu = \mu_*$ с решением $x_*(t)$, эквивалентно исследованию периодических решений уравнения (3.1), переходящих при $\varepsilon = \delta = 0$ в нуль.

Уравнение (3.1) на кривых Γ_1 рассматривалось в [1]. Проведенное в этой работе исследование позволило уточнить взаимное расположение поверхностей $S, S_{2/1}$ и $S', S_{2/1}'$. Анализ уравнения (3.1) на кривых Γ_2^- (кривые Γ_2^+ обнаружены не были) дает возможность исследовать поверхность S . Такое исследование приводит к результатам, аналогичным [3]. Ниже будем рассматривать уравнение (3.1) на кривых Γ_m при $m > 2$.

Пусть m — натуральное число, $m > 2$. Исследуем ветвление $2\pi m$ -периодических решений уравнения (3.1) на кривых γ_{2m} и γ_m (кривые γ_m рассматриваются только при нечетном m). На этих кривых линейно-независимые решения уравнения (ср. (2.2)) $q'' + f(t)q = 0$ можно взять в виде (2.5), где $\omega = n/m$, n — целое число, взаимно простое с m . На кривых γ_m число n должно быть четным. Рассмотрим вспомогательную систему

$$q'' + f(t)q = H(q, t, \varepsilon, \delta) - p_1 u_1(t) - p_2 u_2(t)$$

$$\int_0^{2\pi m} q u_1(t) dt = a_1, \quad \int_0^{2\pi m} q u_2(t) dt = a_2$$

Здесь q — неизвестная функция, p_1, p_2 — неизвестные постоянные, a_1, a_2 — произвольные постоянные. При достаточно малых $|a_1|, |a_2|, |\varepsilon|, |\delta|$ эта система имеет [4,5] единственное $2\pi m$ -периодическое по t решение

$$(3.4) \quad q = q_*(t, a_1, a_2, \varepsilon, \delta), \quad p_j = p_j^*(a_1, a_2, \varepsilon, \delta) \quad (j = 1, 2)$$

аналитически зависящее от $a_1, a_2, \varepsilon, \delta$ и удовлетворяющее условиям $q_*(t, 0, 0, 0, 0) = 0, p_j^*(0, 0, 0, 0) = 0$. Отыскание $2\pi m$ -периодических решений уравнения (3.1), переходящих при $\varepsilon = \delta = 0$ в нуль, эквивалентно [4,5] отысканию корней $a_j = a_j(\varepsilon, \delta)$ ($j = 1, 2$) системы

$$(3.5) \quad p_1^*(a_1, a_2, \varepsilon, \delta) = 0, \quad p_2^*(a_1, a_2, \varepsilon, \delta) = 0$$

таких, что $a_j(0, 0) = 0$. Пусть $a_j(\varepsilon, \delta)$ — корни этой системы и $a_j(0, 0) = 0$. Тогда $q = q_*[t, a_1(\varepsilon, \delta), a_2(\varepsilon, \delta), \varepsilon, \delta]$ — $2\pi m$ -периодическое решение уравнения (3.1). Характеристические показатели λ этого решения имеют вид

$$\lambda^2 = - \frac{M^4}{(2\pi m W)^2} \frac{\partial(p_1^*, p_2^*)}{\partial(a_1, a_2)} [a_1(\varepsilon, \delta), a_2(\varepsilon, \delta), \varepsilon, \delta] (1 + o(1))$$

$$M = \int_0^{2\pi m} u_1^2(t) dt = \int_0^{2\pi m} u_2^2(t) dt = m \int_0^\pi [\psi_1^2(t) + \psi_2^2(t)] dt$$

$$W = u_1 u_2' - u_1' u_2 = \text{const}$$

Здесь W — вронскиан функций (2.5), через $o(1)$ обозначена функция ε и δ , стремящаяся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0$.

Укажем некоторые свойства решения (3.4). С помощью соотношений (3.3) и свойств четности функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$ можно доказать, что

$$(3.6) \quad -q_*(-t, a_1, a_2, \varepsilon, \delta) = q_*(t, -a_1, a_2, \varepsilon, \delta) \\ p_1^*(-a_1, a_2, \varepsilon, \delta) = -p_1^*(a_1, a_2, \varepsilon, \delta), \quad p_2^*(-a_1, a_2, \varepsilon, \delta) = \\ = p_2^*(a_1, a_2, \varepsilon, \delta)$$

Введем обозначения

$$Q = - \begin{vmatrix} \cos \pi \omega & \sin \pi \omega \\ -\sin \pi \omega & \cos \pi \omega \end{vmatrix}, \quad a = (a_1, a_2)^T, \quad \beta = (\varepsilon, \delta)^T$$

$$p_*(a, \beta) = (p_1^*(a_1, a_2, \varepsilon, \delta), p_2^*(a_1, a_2, \varepsilon, \delta))^T$$

$$q_*(t, a, \beta) = q_*(t, a_1, a_2, \varepsilon, \delta)$$

В силу (2.5) и (3.2) при любом целом k имеем

$$(3.7) \quad q_*(t + \pi k, a, \beta) = (-1)^k q_*(t, Q^k a, \beta) \\ p_*(Q^k a, \beta) = Q^k p_*(a, \beta)$$

Перейдем к исследованию системы (3.5). Из (3.7) следует, что $Q p_*(0, \beta) = p_*(0, \beta)$, и так как единица не является собственным числом матрицы Q , то $p_*(0, \beta) = 0$. Таким образом, $q_*(t, 0, \beta)$ — нечетное (ср. (3.6)) π -антипериодическое (ср. (3.7)) решение уравнения (3.1). Это решение удовлетворяет условию $(x_*(0) + q_*(0, 0, \beta), e_* + \varepsilon, \mu_* + \delta) \in S$. Исследуемая кривая γ_m или γ_{2m} в плоскости (ε, δ) задается уравнением

$$\frac{\partial(p_1^*, p_2^*)}{\partial(a_1, a_2)}(0, 0, \varepsilon, \delta) = 0$$

Пусть $b(\varepsilon, \delta)$ — корень уравнения

$$(3.8) \quad p_2^*(0, b, \varepsilon, \delta) = 0$$

не тождественно равный нулю и удовлетворяющий условию $b(0, 0) = 0$. Введем обозначения: $a^{(0)}(\beta) = (0, b(\varepsilon, \delta))^T$, $a^{(k)}(\beta) = Q^k a^{(0)}(\beta)$ ($k = 1, 2, \dots$). Тогда в силу (3.6), (3.7) $p_*[a^{(k)}(\beta), \beta] = 0$. Матрица Q^{2m} — единичная, поэтому среди векторов $a^{(k)}(\beta)$ ($k = 0, 1, \dots$) не более $2m$ различных. Если $a^{(k)}(\beta) = a^{(l)}(\beta)$, то $\cos[\pi(m+n)(k-l)/m] = 1$ или, что то же самое, $(m+n)(k-l) \equiv 0 \pmod{2m}$. Так как m и n —

взаимно простые целые числа, то $m + n$ и m тоже взаимно просты. Отсюда $k - l = rm$, где $r(m + n) \equiv 0 \pmod{2}$.

Пусть m и n нечетны. Тогда $m + n$ четно и $k \equiv l \pmod{m}$. В этом случае среди векторов $a^{(k)}(\beta)$ ($k = 0, 1, \dots$) только m различных (например, $a^{(2k)}(\beta)$, $k = 0, 1, \dots, m - 1$). Если одно из чисел m и n четно (другое в силу взаимной простоты m и n нечетно), то $m + n$ нечетно и $k \equiv l \pmod{2m}$. В этом случае среди векторов $a^{(k)}(\beta)$ ($k = 0, 1, \dots$) — $2m$ различных (например, $a^{(k)}(\beta)$, $k = 0, 1, \dots, 2m - 1$). Первый из рассмотренных случаев возможен только на кривых γ_{2m} , второй — как на кривых γ_{2m} (m четно, n нечетно), так и на кривых γ_m (m нечетно, n четно).

Корням $a^{(k)}(\beta)$ системы (3.5) отвечают $2\pi m$ -периодические решения уравнения (1.1) $x^{(k)}(t) = x_*(t) + q_*[t, a^{(k)}(\beta), \beta]$ ($k = 0, 1, \dots$). Решение $x^{(0)}(t)$ нечетно и удовлетворяет краевым условиям (1.4). Остальные решения связаны с $x^{(0)}(t)$ формулой $x^{(k)}(t) = (-1)^k x^{(0)}(t + \pi k)$. Если одно из чисел m и n четно, то среди решений $x^{(k)}(t)$ ($k = 0, 1, \dots$) — $2m$ различных, если же оба эти числа нечетны, то различных решений будет только m . В последнем случае решения $x^{(k)}(t)$ ($k = 0, 1, \dots$) — πm -антипериодические, решение $x^{(0)}(t)$ удовлетворяет краевым условиям (1.3).

Рассмотрим подробнее случай, когда одно из чисел m и n четно. Тогда $(-Q^m)$ — единичная матрица и при $k = m$ второе соотношение (3.7) принимает вид $p_*(-a, \beta) = -p_*(a, \beta)$. Сравнивая это соотношение с (3.6), находим

$$(3.9) \quad p_j^*(a_1, a_2, \varepsilon, \delta) = a_j \varphi_j(a_1^2, a_2^2, \varepsilon, \delta) \quad (j = 1, 2)$$

Здесь $\varphi_j(z_1, z_2, \varepsilon, \delta)$ — аналитические функции $z_1, z_2, \varepsilon, \delta$ в точке $z_1 = z_2 = \varepsilon = \delta = 0$, $\varphi_j(0, 0, 0, 0) = 0$. В силу (3.9) уравнение (3.8) при $b \neq 0$ имеет вид

$$(3.10) \quad \varphi_2(0, b^2, \varepsilon, \delta) = 0$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$(3.11) \quad \varphi_1(b^2, 0, \varepsilon, \delta) = 0$$

Пусть $b(\varepsilon, \delta)$ — его корень, не тождественно равный нулю и удовлетворяющий условию $b(0, 0) = 0$. Введем векторы $\bar{a}^{(0)}(\beta) = (b(\varepsilon, \delta), 0)^T$, $\bar{a}^{(k)}(\beta) = Q^k \bar{a}^{(0)}(\beta)$ ($k = 1, 2, \dots$). Можно доказать, что $p_*[\bar{a}^{(k)}(\beta), \beta] = 0$ и среди векторов $\bar{a}^{(k)}(\beta)$ ($k = 0, 1, \dots, 2m - 1$) нет равных. Корням $\bar{a}^{(k)}(\beta)$ системы (3.5) отвечают $2\pi m$ -периодические решения уравнения (1.1) $\bar{x}^{(k)}(t) = x_*(t) + q_*[t, \bar{a}^{(k)}(\beta), \beta]$ ($k = 0, 1, \dots$). Все эти решения выражаются через $\bar{x}^{(0)}(t)$ с помощью формулы $\bar{x}^{(k)}(t) = (-1)^k \bar{x}^{(0)}(t + \pi k)$, и среди них есть только $2m$ различных.

Если n четно, то совокупности решений $\{\bar{x}^{(k)}(t) : k = 0, 1, \dots\}$ и $\{x^{(k)}(t) : k = 0, 1, \dots\}$ не пересекаются при любом выборе порождающих их корней уравнений (3.10), (3.11). Решение $\bar{x}^{(s)}(t)$, где $s \equiv (m - 1) / 2 \pmod{2m}$, удовлетворяет краевым условиям (1.5).

Если m четно, то

$$(3.12) \quad Q^{m/2} = \pm \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Отсюда в силу соотношений (3.7) при $k = m/2$ и (3.9) получаем

$$(3.13) \quad \varphi_1(z_1, z_2, \varepsilon, \delta) = \varphi_2(z_2, z_1, \varepsilon, \delta)$$

Следовательно, уравнения (3.10), (3.11) эквивалентны. Пусть $b(\varepsilon, \delta)$ — корень этих уравнений, такой, что $b(0, 0) = 0$. Тогда в силу (3.12) отвечающие этому корню совокупности решений $\{x^{(k)}(t): k = 0, 1, \dots\}$ и $\{x_*^{(k)}(t): k = 0, 1, \dots\}$ совпадают.

При четном m рассмотрим уравнение

$$(3.14) \quad \varphi_2(b_*^2, b_*^2, \varepsilon, \delta) = 0$$

Пусть $b_*(\varepsilon, \delta)$ — его корень, не тождественно равный нулю и удовлетворяющий условию $b_*(0, 0) = 0$, $a_*^{(0)}(\beta) = (b_*(\varepsilon, \delta), b_*(\varepsilon, \delta))^T$, $a_*^{(k)}(\beta) = Q^k a_*^{(0)}(\beta)$ ($k = 1, 2, \dots$). Тогда $p_*[a_*^{(k)}(\beta), \beta] = 0$, причем среди векторов $a_*^{(k)}(\beta)$ ($k = 0, 1, \dots$) — $2m$ различных. Этим векторам отвечают $2\pi m$ -периодические решения уравнения (1.1) $x_*^{(k)}(t) = x_*(t) + q_*[t, a_*^{(k)}(\beta), \beta]$ ($k = 0, 1, \dots$), для которых $x_*^{(k)}(t) = (-1)^k x_*^{(0)}(t + \pi k)$.

Если $m \equiv 2 \pmod{4}$, то совокупности $\{x^{(k)}(t): k = 0, 1, \dots\}$ и $\{x_*^{(k)}(t): k = 0, 1, \dots\}$ различны при любом выборе порождающих их корней уравнений (3.10), (3.14). Решение $x_*^{(s)}(t)$, где

$$s \equiv (-1)^{(n-1)/2} m / 4 - 1/2 \pmod{2m}$$

удовлетворяет краевым условиям (1.5).

Если $m \equiv 0 \pmod{4}$, то $Q^{3m/4}(0, b)^T = (b_*, b_*)^T$ при любых b и b_* , связанных соотношением $b^2 = 2b_*^2$. Таким образом, если $b_*(\varepsilon, \delta)$ — корень уравнения (3.14), то в силу (3.7), (3.9), (3.13) $b(\varepsilon, \delta) = b_*(\varepsilon, \delta)\sqrt{2}$ — корень уравнений (3.10), (3.11). Отвечающие этим корням совокупности решений $\{x^{(k)}(t): k = 0, 1, \dots\}$ и $\{x_*^{(k)}(t): k = 0, 1, \dots\}$ совпадают.

Укажем еще одно свойство функций φ_1 и φ_2 , которое будет использовано ниже. С помощью соотношений (3.7) можно доказать, что при четном m и $m \geq 3$

$$(3.15) \quad \varphi_1(0, 0, \varepsilon, \delta) = \varphi_2(0, 0, \varepsilon, \delta) \\ \frac{\partial \varphi_l(0, 0, \varepsilon, \delta)}{\partial z_j} = \frac{\partial \varphi_s(0, 0, \varepsilon, \delta)}{\partial z_k} \quad (j, k, s, l = 1, 2)$$

4. 4π -периодические решения второго рода. Рассмотрим кривые γ_4 . Здесь $m = 2$, $n = 1, 3, 5, \dots$. Функции φ_1 и φ_2 в (3.9) представим в виде (ср. (3.13))

$$(4.1) \quad \varphi_1(z_1, z_2, \varepsilon, \delta) = C_1 z_1 + C_2 z_2 + A\varepsilon + B\delta + O(z_1^2 + z_2^2 + \varepsilon^2 + \delta^2) \\ \varphi_2(z_1, z_2, \varepsilon, \delta) = C_2 z_1 + C_1 z_2 + A\varepsilon + B\delta + O(z_1^2 + z_2^2 + \varepsilon^2 + \delta^2)$$

Коэффициенты A, B, C_1, C_2 вычислялись вдоль кривых γ_4 по специальной программе (для расчетов использовалась ЭВМ БЭСМ-6). Как оказалось, на кривых γ_4 , приведенных на фиг. 1, $A^2 + B^2 > 0$, коэффициент C_1 обращается в нуль только в точке P_1 ($e \simeq 0,985$, $\mu \simeq 0,492$), меняя в ней знак.

Если $C_1 \neq 0$, то в области $\{\varepsilon, \delta : C_1 \varphi_2(0, 0, \varepsilon, \delta) < 0\}$ уравнение (3.10) имеет два действительных корня

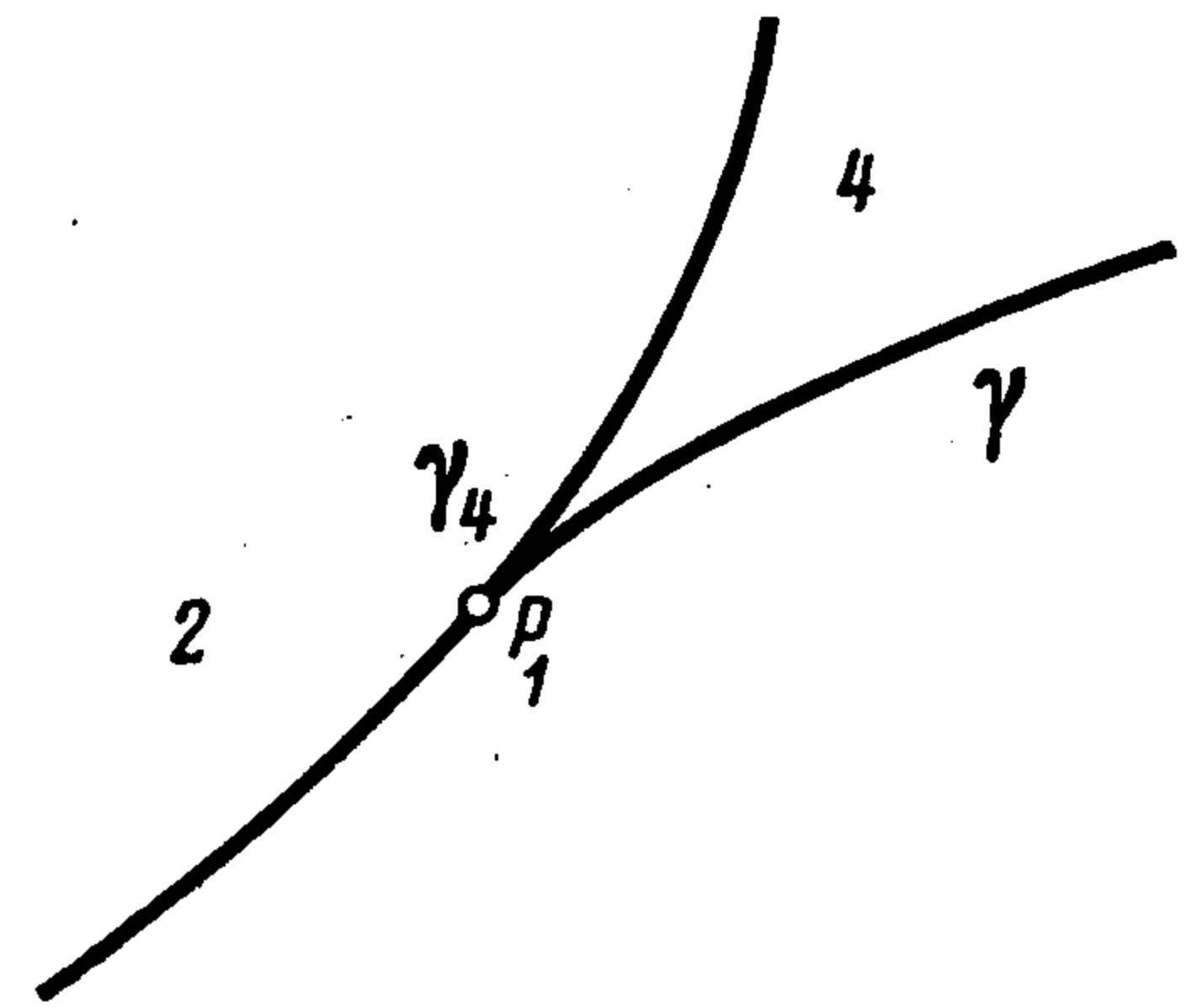
$$b'(\varepsilon, \delta) = [-C_1^{-1} \varphi_2(0, 0, \varepsilon, \delta) (1 + o(1))]^{1/2}, \quad b''(\varepsilon, \delta) = -b'(\varepsilon, \delta)$$

которым отвечают 4π -периодические решения уравнения (1.1)

$$x^{(0)}(t) = x_*(t) + q_*[t, 0, b'(\varepsilon, \delta), \varepsilon, \delta]$$

$$x^{(2)}(t) = x_*(t) + q_*[t, 0, b''(\varepsilon, \delta), \varepsilon, \delta] = x^{(0)}(t + 2\pi)$$

Кривая γ_4 в плоскости (ε, δ) задается уравнением $\varphi_2(0, 0, \varepsilon, \delta) = 0$ и является кривой разветвления решений $x^{(k)}(t)$ ($k = 0, 1, \dots$). Области существования этих решений в окрестности кривых γ_4 указаны штриховкой на фиг. 1. Можно доказать [3], что из точки P_1 выходит еще одна кривая разветвления решений $x^{(k)}(t)$ ($k = 0, 1, \dots$), отличная от кривой γ_4 (фиг. 2, кривая γ ; эта фигура носит условный характер). В точке P_1 кривые γ_4 и γ касаются одна другой. Число корней уравнения (3.10) в областях, ограниченных этими кривыми, указано цифрами на фиг. 2.



Фиг. 2

Рассмотрим теперь уравнение (3.14). Как показали численные расчеты, на исследуемых кривых γ_4 $C_1 + C_2 \neq 0$. В области $\{\varepsilon, \delta : (C_1 + C_2) \varphi_2(0, 0, \varepsilon, \delta) < 0\}$ уравнение (3.14) имеет два действительных корня

$$b_*'(\varepsilon, \delta) = [-(C_1 + C_2)^{-1} \varphi_2(0, 0, \varepsilon, \delta) (1 + o(1))]^{1/2}, \quad b_*''(\varepsilon, \delta) = -b_*'(\varepsilon, \delta)$$

которым отвечают 4π -периодические решения

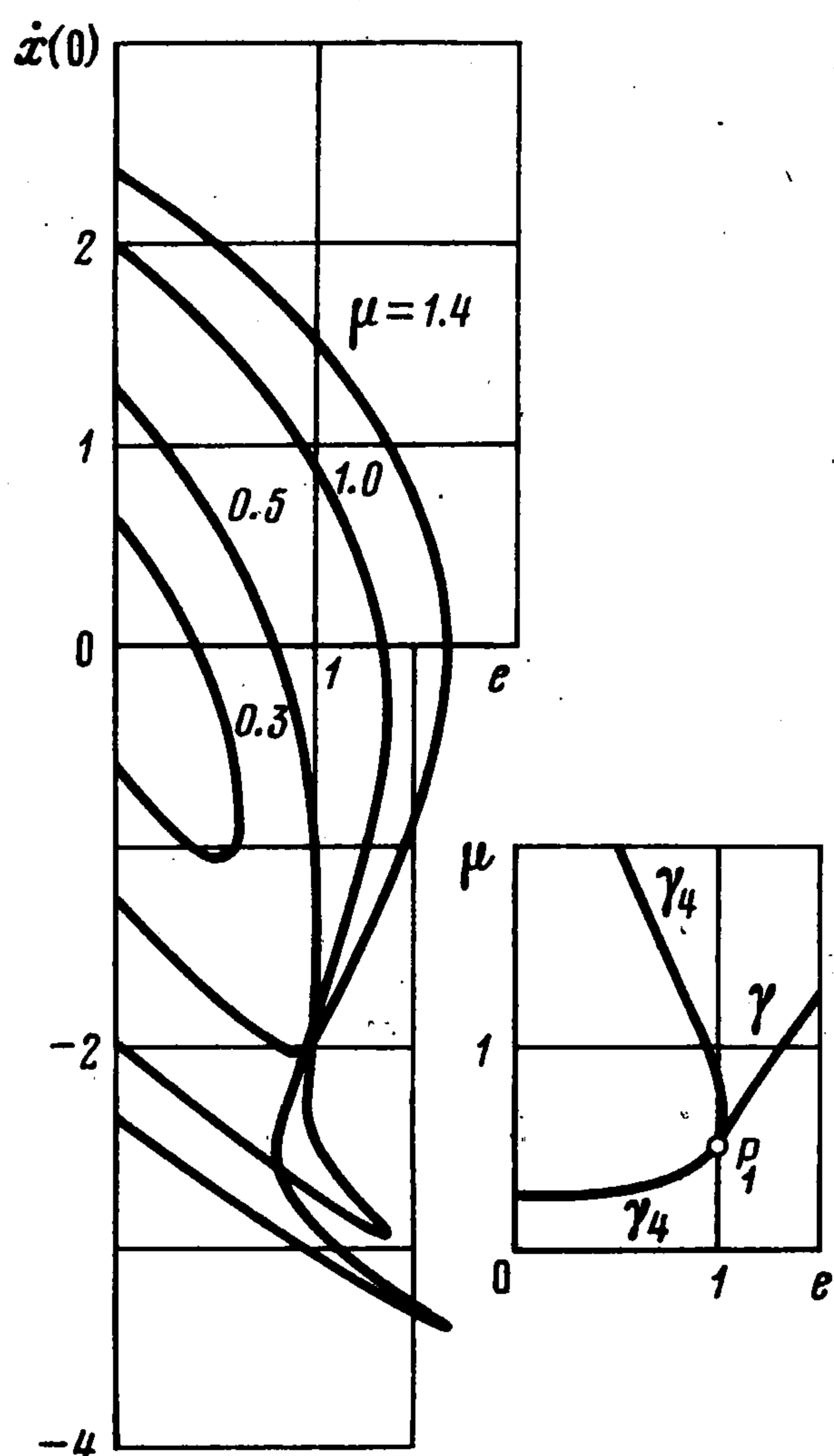
$$x_*^{(0)}(t) = x_*(t) + q_*[t, b_*'(\varepsilon, \delta), b_*'(\varepsilon, \delta), \varepsilon, \delta]$$

$$x_*^{(2)}(t) = x_*(t) + q_*[t, b_*''(\varepsilon, \delta), b_*''(\varepsilon, \delta), \varepsilon, \delta] = x_*^{(0)}(t + 2\pi)$$

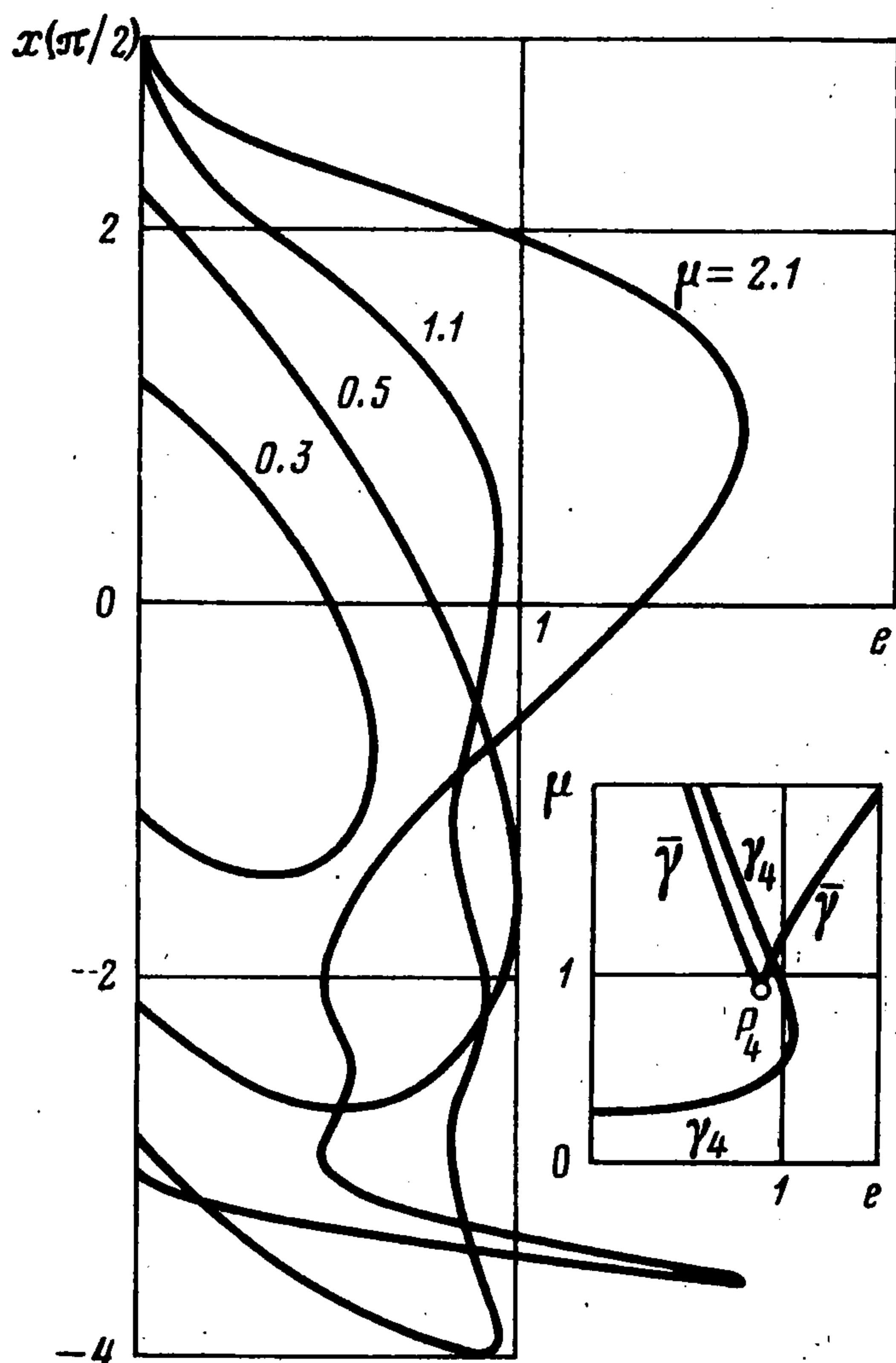
Кривая γ_4 является кривой разветвления этих решений. При малых ε, δ области существования решений $x_*^{(k)}(t)$ ($k = 0, 1, \dots$) лежат выше кривых γ_4 (фиг. 1).

5. 6π -периодические решения второго рода. Кривыми разветвления этих решений могут быть кривые γ_3 и γ_6 . Поведение 6π -периодических решений уравнения (1.1) в окрестности кривых γ_6 аналогично поведению 6π -периодических решений уравнения, изучавшегося в [3], и здесь исследоваться не будет. Рассмотрим кривые γ_3 . На этих кривых $m = 3$, $n = 2, 4, 8, \dots$. Функции φ_1 и φ_2 в (3.9) представим в виде (4.1) при $C_1 = C_2 = C$ (ср. (3.15)).

Коэффициенты A, B, C вычислялись вдоль кривых γ_3 по специальной программе. Как оказалось, на кривых γ_3 , приведенных на фиг. 1, $A^2 + B^2 > 0$, коэффициент C обращается в нуль только в точках P_2 ($e \approx 0,590, \mu \approx 0,897$) и P_3 ($e \approx 0,322, \mu \approx 2,01$), меняя в них знак. Ветвление корней уравнений (3.10), (3.11) на кривых γ_3 аналогично ветвлению корней уравнения (3.10) на кривых γ_4 , исследованному в п. 4.



Фиг. 3



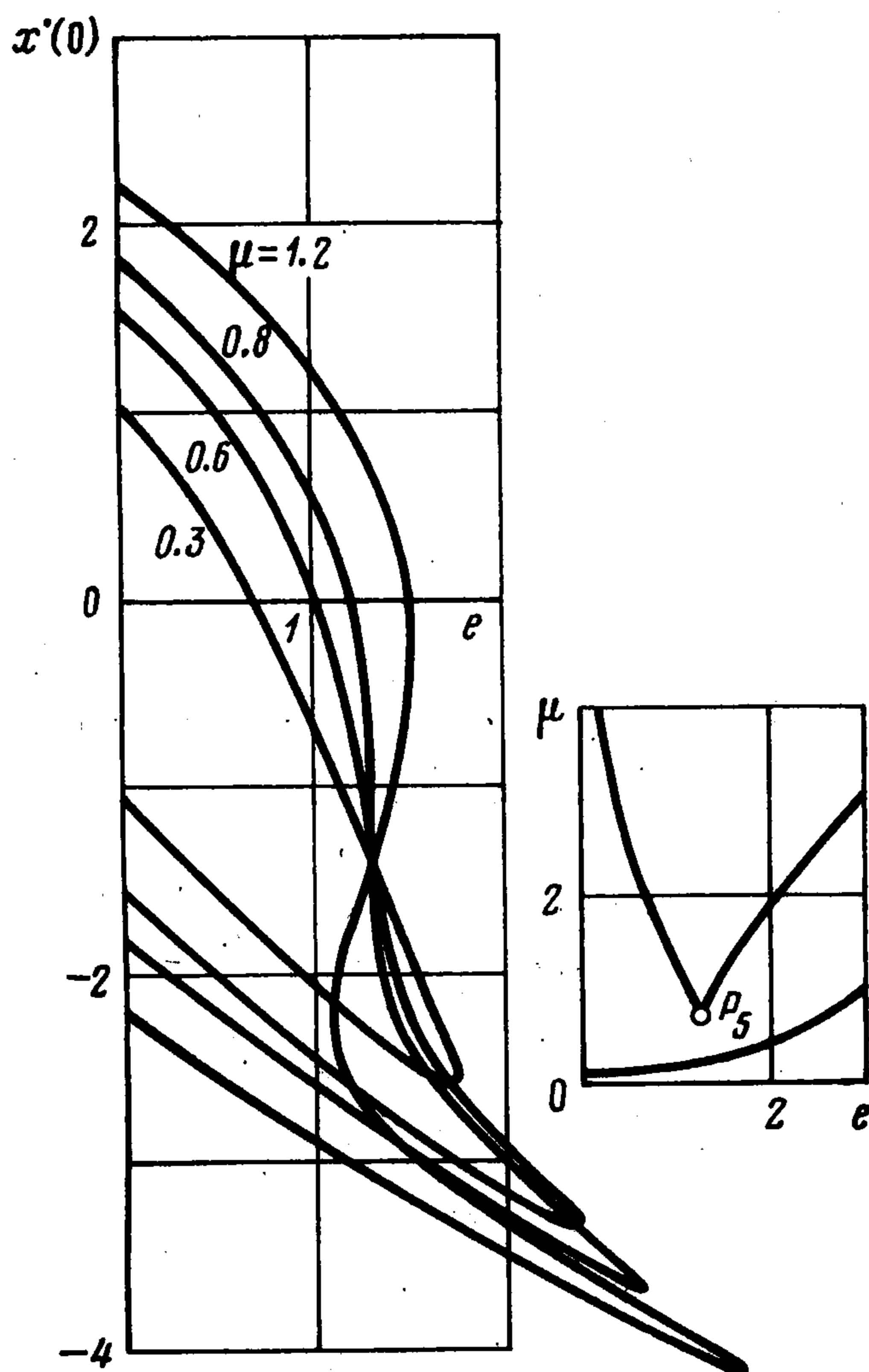
Фиг. 4

Области существования бл-периодических решений $x^{(k)}$, $x^{(k)}$ ($k = 0, 1, \dots$) в окрестности кривых γ_3 указаны штриховкой на фиг. 1.

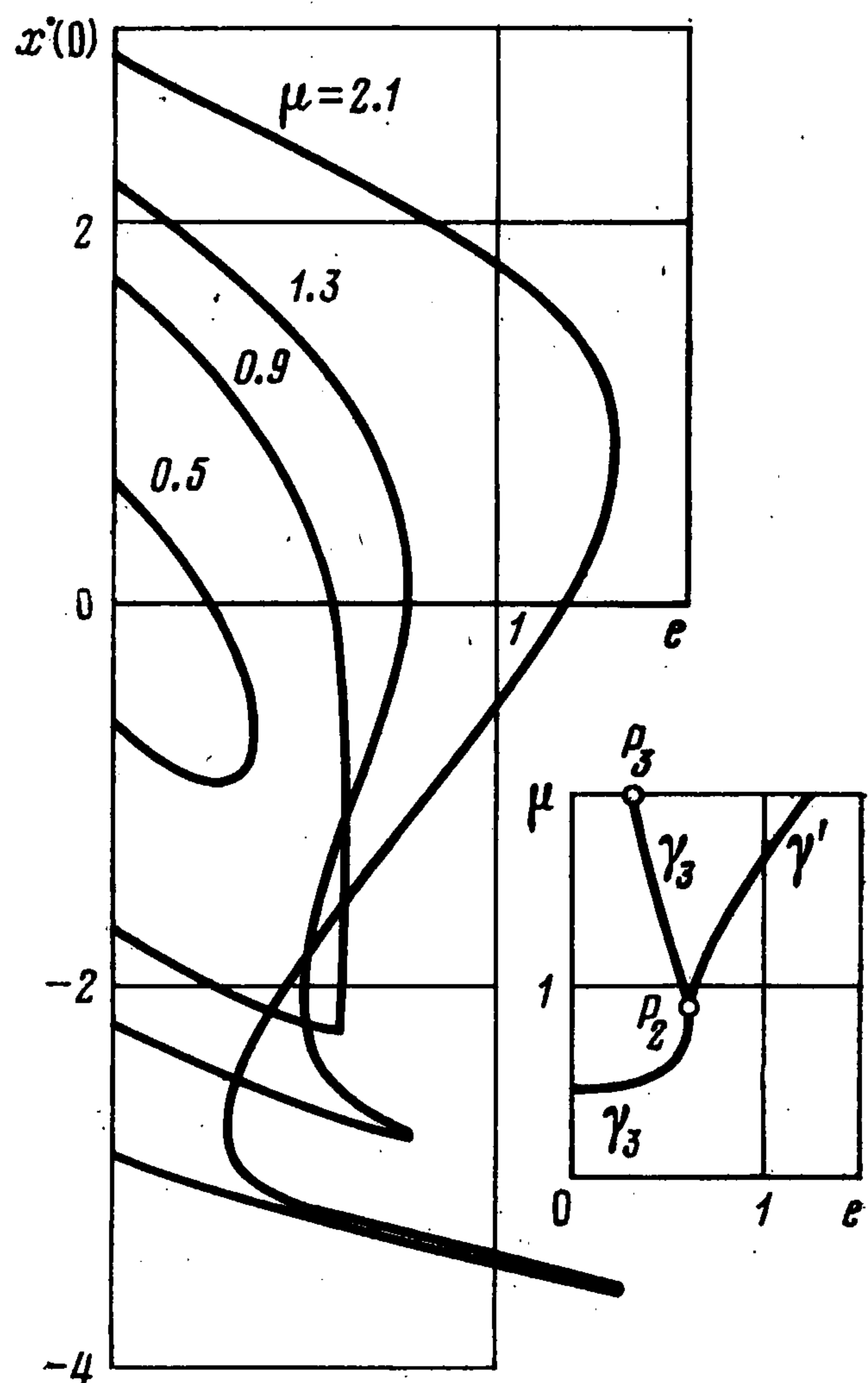
6. Численные расчеты 4л-периодических решений. На фиг. 3, 4 приведены решения краевых задач (1.4), (1.5) для $m = 2$, совпадающие при $e \ll 1$ с решениями $x_{1/2}^{(0)}$, $x_{1/2}^{(2)}$ и $\bar{x}_{1/2}^{(0)}$, $\bar{x}_{1/2}^{(2)}$ соответственно. Здесь указаны зависимость начальных условий этих решений от e для различных значений μ и разбиение плоскости (e, μ) на области, в которых существует одинаковое число решений. В области, обозначенной E_k , существует k решений, область E_0 не указана. Кривые, осуществляющие такое разбиение, называются кривыми разветвления.

Рассмотрим решения задачи (1.4) для $m = 2$ (фиг. 3). Решение, удовлетворяющее при $e = 0$ неравенству $x'(0) > 0$ ($x'(0) < 0$), совпадает при $e \ll 1$ с решением $x_{1/2}^{(0)}$ ($x_{1/2}^{(2)}$). Эти решения образуют в пространстве $R^3(x'(0), e, \mu)$ поверхность $S_{1/2}$. Кривые, изображенные на фиг. 3, можно интерпретировать следующим образом. Кривые в плоскости $(e, x'(0))$ — это сечения поверхности $S_{1/2}$ плоскостями $\mu = \text{const}$. Кривые в плоскости (e, μ) — это ортогональные проекции на плоскость (e, μ) таких кривых, принадлежащих поверхности $S_{1/2}$, в точках которых касательная плоскость к $S_{1/2}$ параллельна оси $x'(0)$. Можно доказать, что поверхность $S_{n/2}$ ($n = 1, 3, 5, \dots$) пересекает поверхность S по кривой Γ_4 , выходящей из точки $(0, 0, n^2/4)$. Нечетные 4л-периодические решения второго рода $x^{(0)}$, $x^{(2)}$, обнаруженные в пп. 3, 4, являются решениями краевой задачи (1.4) при $m = 2$, начальные скорости которых лежат на поверхности $S_{n/2}$ в окрестности кривой $\Gamma_4 = S_{n/2} \cap S$. Соответствующая кривая γ_4 — кривая разветвления этих решений. Решения, приведенные на фиг. 3, имеют еще кривую разветвления γ , выходящую из точки P_1 (см. п. 4). На кривую γ одновременно проектируются две различные кривые, лежащие на поверхности $S_{1/2}$.

Поверхность $S_{n/2}$ обладает следующим свойством. Пусть $x = X(t, \alpha, e, \mu)$ — решение уравнения (1.1) с начальными условиями $X(0, \alpha, e, \mu) = 0$, $X'(0, \alpha, e, \mu) = \alpha$. Тогда, если точка $Q_0 = (\alpha, e, \mu) \in S_{n/2}$, то и точка $Q_1 = (X(2\pi, \alpha, e, \mu), e, \mu) \in$



Фиг. 5



Фиг. 6

$\in S_{n/2}$. Если при этом $Q_0 \in S$, то точки Q_0 и Q_1 лежат на $S_{n/2}$ по разные стороны от S . Одна из этих точек соответствует решению, продолженному из $x_{n/2}^{(0)}$, другая — решению, продолженному из $x_{n/2}^{(2)}$. В силу указанного свойства кривые на поверхности $S_{n/2}$, в точках которых касательная плоскость к $S_{n/2}$ параллельна оси $x'(0)$, либо совпадают с Γ_4 (на этой кривой решения, продолженные из $x_{n/2}^{(0)}$, $x_{n/2}^{(2)}$, сливаются и вырождаются в 2π -периодические), либо существуют парами. Проекция кривых такой пары на плоскость (e, μ) совпадают.

Рассмотрим решения краевой задачи (1.5) для $m = 2$ (фиг. 4). Решение, удовлетворяющее при $e = 0$ неравенству $x(\pi/2) > 0$ ($x(\pi/2) < 0$), совпадает при $e \ll 1$ с решением $\bar{x}_{1/2}^{(0)}$ ($\bar{x}_{1/2}^{(2)}$). Этим решениям соответствует поверхность $S_{1/2}' \subset R^3(x(\pi/2), e, \mu)$. Кривые γ_4 суть кривые разветвления решений краевой задачи (1.5) при $m = 2$ (см. пп. 3, 4). Решения, приведенные на фиг. 4, имеют еще кривую разветвления $\bar{\gamma}$, происхождение которой не связано с кривой γ_4 . Отображение проектирования поверхности $S_{1/2}'$ на плоскость (e, μ) имеет в точках, переходящих при таком отображении в точку $P_4(e \approx 0,884, \mu = 0,894) \in \bar{\gamma}$ (фиг. 4), особенность типа сборки.

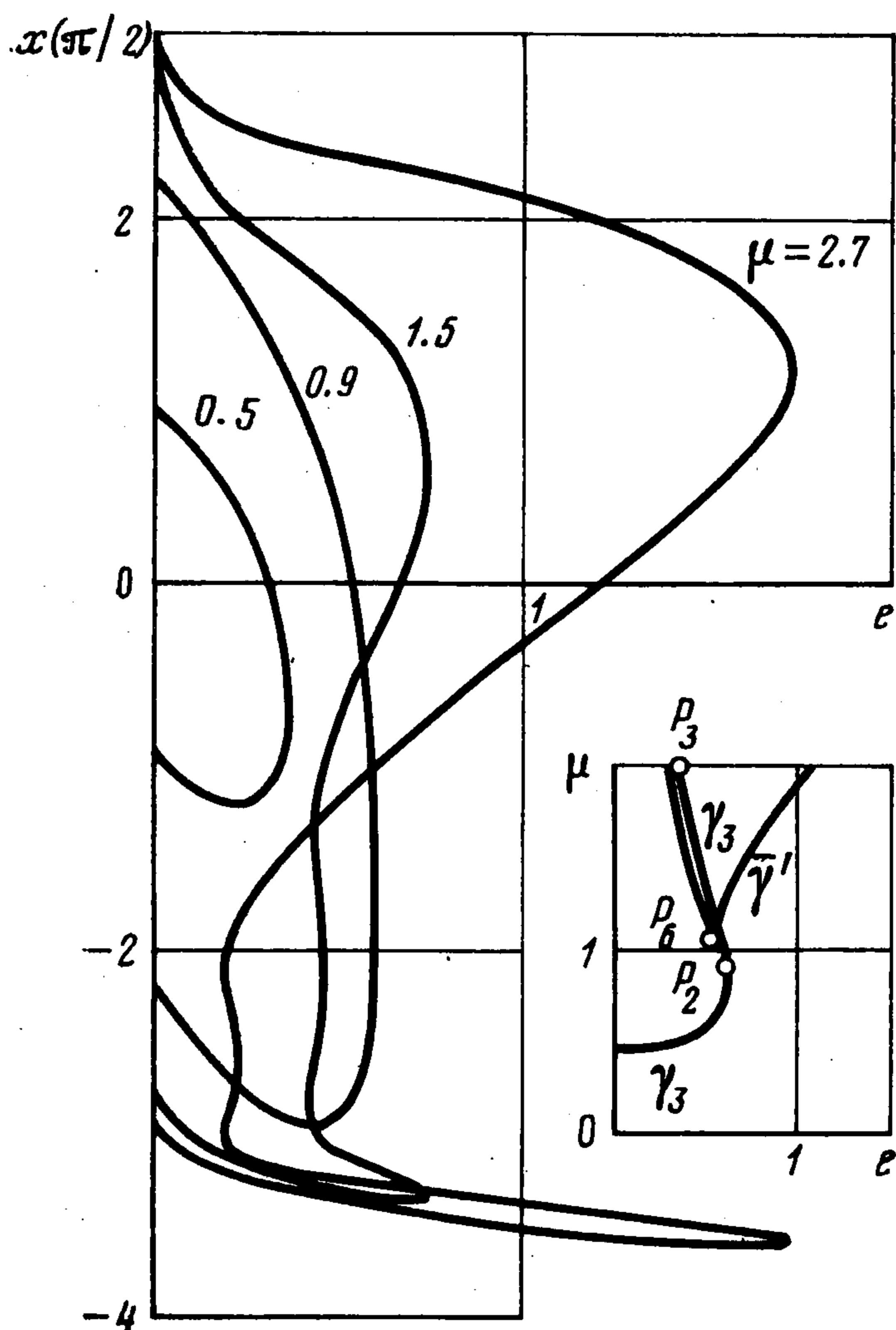
7. Численные расчеты 6π -периодических решений. На фиг. 5—7 приведены решения краевых задач (1.3) — (1.5) для $m = 3$, совпадающие при $e \ll 1$ с решениями $x_{1/3}^{(0)}$, $x_{1/3}^{(3)}$ (фиг. 5), $x_{2/3}^{(0)}$, $x_{2/3}^{(3)}$ (фиг. 6) и $\bar{x}_{2/3}^{(0)}$, $\bar{x}_{2/3}^{(3)}$ (фиг. 7). Содержание этих фигур аналогично содержанию фиг. 3, 4.

Рассмотрим решения краевой задачи (1.3) для $m = 3$ (фиг. 5). Решение, удовлетворяющее при $e = 0$ условию $x'(0) > 0$ ($x'(0) < 0$), совпадает при $e \ll 1$ с решением $x_{1/3}^{(0)}$ ($x_{1/3}^{(3)}$). Этим решениям отвечает поверхность $S_{1/3} \subset R^3(x'(0), e, \mu)$, причем кривая $S \cap S_{1/3}$ является кривой Γ_6 , выходящей из точки $(0, 0, 1/9)$. Отображение проектирования поверхности $S_{1/3}$ на плоскость (e, μ) имеет в точке $P_5(e \approx 1,267, \mu \approx 0,698)$ (фиг. 5) особенность типа сборки.]

Перейдем к решениям задачи (1.4) для $m = 3$ (фиг. 6). Решение, у которого при $e = 0$ $x'(0) > 0$ ($x'(0) < 0$), совпадает при $e \ll 1$ с решением $x_{2/3}^{(0)}$ ($x_{2/3}^{(3)}$). Эти ре-

шения задаются поверхностью $S_{2/3} \subset R^3(x^*(0), e, \mu)$. Поверхность $S_{n/3}$ ($n = 2, 4, 8, \dots$) пересекает поверхность S по кривой Γ_3 , выходящей из точки $(0, 0, n^2/9)$. Нечетные бл-периодические решения] второго рода $x^{(0)}, x^{(3)}$, обнаруженные в пп. 3, 5, являются решениями] краевой задачи (1.4) при $m = 3$, начальные скорости которых лежат на поверхности $S_{n/3}$ в окрестности кривой $\Gamma_3 = S \cap S_{n/3}$. Соответствующая кривая γ_3 — кривая разветвления этих решений.

Поверхность $S_{n/3}$ обладает следующим свойством. Пусть $X(t, \alpha, e, \mu)$ — функция, определенная в п. 6. Тогда, если точка $Q_0 = (\alpha, e, \mu) \in S_{n/3}$, то и точка $Q_1 = (-X(3\pi, \alpha, e, \mu), e, \mu) \in S_{n/3}$. Если при этом $Q_0 \in S$, то точки Q_0 и Q_1 лежат на $S_{n/3}$ по разные стороны от S . Одна из этих точек соответствует решению, продолженному из $x_{n/3}^{(0)}$, другая — решению, продолженному из $x_{n/3}^{(3)}$. В силу указанного свойст-



Фиг. 7

ва кривые на поверхности $S_{n/3}$, в точках которых касательная плоскость к $S_{n/3}$ параллельна оси $x^*(0)$, либо совпадают с кривой Γ_3 , либо существуют парами. Для поверхности $S_{2/3}$ была обнаружена одна такая пара, проектирующаяся на кривую γ_3' (фиг. 6), выходящую из точки P_2 (см. п. 5). Из точки P_3 также выходит кривая разветвления, расположенная слева от кривой γ_3 и идущая в сторону возрастания μ . Однако в масштабе фиг. 6 эта кривая разветвления и кривая γ_3 не различимы.

Рассмотрим для $m = 3$ решения краевой задачи (1.5) (фиг. 7). Решение, у которого при $e = 0$ $x(\pi/2) > 0$ ($x(\pi/2) < 0$), совпадает при $e \ll 1$ с решением $\bar{x}_{2/3}^{(0)}$ ($\bar{x}_{2/3}^{(3)}$). Эти решения задаются поверхностью $S_{2/3}' \subset R^3(x(\pi/2), e, \mu)$. Проекция кривой $S' \cap S_{n/3}$ на плоскость (e, μ) является кривой γ_3 , выходящей из точки $(0, n^2/9)$, и служит кривой разветвления решениям краевой задачи (1.5) при $m = 3$.

Решения, приведенные на фиг. 7, имеют еще две кривые разветвления. Одна из этих кривых соединяет точки P_2 и P_3 и расположена справа от кривой γ_3 . На фиг. 7 эта кривая и кривая γ_3 не различимы. Другая кривая разветвления (кривая $\bar{\gamma}'$, фиг. 7) аналогична кривой $\bar{\gamma}$ на фиг. 4. Отображение проектирования поверхности $S_{2/3}'$ на плоскость (e, μ) имеет в точках, переходящих в точку P_6 ($e \approx 0,548, \mu \approx 1,029$), особенность типа сборки.

Решения, приведенные на фиг. 7, имеют еще две кривые разветвления.

Одна из этих кривых соединяет точки P_2

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Златоустов В. А., Сазонов В. В., Сарычев В. А. Вынужденные периодические колебания математического маятника.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 2.
2. Пуанкаре А. Избр. труды. Т. 1, 2. Новые методы небесной механики. М.: Наука, 1971—1972.
3. Сарычев В. А., Сазонов В. В., Златоустов В. А. Периодические колебания спутника в плоскости эллиптической орбиты.— Космич. исследования, 1977, т. 15, вып. 6.
4. Hölder E. Mathematische Untersuchungen zur Himmelsmechanik.— Math. Z., 1929, В. 31, р. 197.
5. Hale J. K. Ordinary differential equations. New York, Wiley, 1969.

Поступила в редакцию
18.I.1980