Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 1, 1981

УДК 531.36

О РЕАЛИЗАЦИИ НЕГОЛОНОМНЫХ СВЯЗЕЙ СИЛАМИ ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ КЕЛЬТСКИХ КАМНЕЙ

Карапетян А.В.

(Москва)

Показано, что уравнения движения неголономных систем могут быть получены из уравнений движения освобожденных от неголономных связей систем, подверженных соответствующим образом выбранным диссипативным силам, если в последних коэффициент диссипации полагается равным бесконечности. Доказано, что при достаточно общих предположениях движения неголономных систем являются предельными для соответствующих движений голономных систем при стремлении коэффициента диссипации к бесконечности.

Исследована устойчивость вращения вокруг вертикали несимметричного тяжелого твердого тела (кельтского камня) на горизонтальной плоскости с трением. Проведено сравнение полученных условий устойчивости с ранее известными для случая вращения тела вокруг вертикали на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости.

1. Рассмотрим механическую систему, положение которой определяется n обобщенными координатами $q_1, \ldots, q_n$, а ее динамические свойства задаются функцией Лагранжа $L(q, q^\cdot) = T(q, q^\cdot) + U(q)$ и обобщенными силами $Q_s(q, q^\cdot)$ $(s = 1, \ldots, n)$. Предположим, что кинетическая энергия T представляет собой определенно-положительную квадратичную форму скоростей $q_1^\cdot, \ldots, q_n^\cdot$ обобщенных координат, коэффициенты которой, так же как и силовая функция U, дважды непрерывно дифференцируемы по q, а обобщенные силы Q_s непрерывно дифференцируемы по q, $q^\cdot$.

Предположим, что на систему наложены неинтегрируемые связи вида

$$q_\alpha^\cdot = \sum_{i=1}^{m} b_{\alpha i}(q)\, q_i^\cdot \quad (\alpha = m+1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

коэффициенты $b_{\alpha i}$ которых также дважды непрерывно дифференцируемы по q. Тогда система неголономна и ее движение можно описать, например, уравнениями Воронца

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial q_i^\cdot} = \frac{\partial(\Theta + U)}{\partial q_i} + \Pi_i + \sum_{\alpha=m+1}^{n}\left[\frac{\partial(\Theta+U)}{\partial q_\alpha} + \Pi_\alpha\right] b_{\alpha i} + \sum_{\alpha=m+1}^{n}\Theta_\alpha \sum_{j=1}^{m} \nu_{\alpha i j} q_j^\cdot \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{1.2}$$

$$\nu_{\alpha i j} = \frac{\partial b_{\alpha i}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{\alpha j}}{\partial q_i} + \sum_{\beta=m+1}^{n}\left(\frac{\partial b_{\alpha i}}{\partial q_\beta} b_{\beta j} - \frac{\partial b_{\alpha j}}{\partial q_\beta} b_{\beta i}\right)$$

к которым для получения замкнутой системы следует присоединить уравнения связей (1.1). Здесь Θ, Θ_α и Π_s получаются из T, $\partial T/\partial q_\alpha^{\cdot}$ и Q_s соответственно, исключением $q_\alpha^{\cdot}$ с помощью соотношений (1.1).

При указанных условиях система (1.1), (1.2) представляет собой замкнутую систему $(n+m)$-го порядка относительно $n+m$ неизвестных $q_1, \ldots, q_n, q_1^{\cdot}, \ldots, q_m^{\cdot}$, удовлетворяющую теоремам существования и единственности решения.

Пусть теперь все координаты q_s и скорости $q_s^{\cdot}$ системы независимы (связи (1.1) сняты), т. е. система голономна, и пусть на нее помимо исходных действуют диссипативные силы $F_s = -\partial F/\partial q_s^{\cdot}$ $(s = 1, \ldots, n)$, производные от функции вида

$$F = \frac{1}{2} k \sum_{\alpha=m+1}^{n} \Big(q_\alpha^{\cdot} - \sum_{i=1}^{m} b_{\alpha i} q_i^{\cdot}\Big)^2, \quad k > 0 \tag{1.3}$$

Уравнения движения системы возьмем в форме Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_s^{\cdot}} = \frac{\partial L}{\partial q_s} + Q_s - \frac{\partial F}{\partial q_s^{\cdot}} \quad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.4}$$

При указанных условиях система (1.4) представляет собой замкнутую систему $2n$-го порядка относительно $2n$ неизвестных $q_1, \ldots, q_n, q_1^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot}$, удовлетворяющую теоремам существования и единственности решения.

Исключая теперь k из первых m уравнений системы (1.4) с помощью последних $n-m$ уравнений и деля последние $n-m$ уравнений системы (1.4) на k, получим

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_i^{\cdot}} - \frac{\partial L}{\partial q_i} - Q_i + \sum_{\alpha=m+1}^{n} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_\alpha^{\cdot}} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - Q_\alpha\right) b_{\alpha i} = 0 \tag{1.5}$$
$$(i = 1, \ldots, m)$$

$$\frac{1}{k}\left(-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_\alpha^{\cdot}} + \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} + Q_\alpha\right) = q_\alpha^{\cdot} - \sum_{j=1}^{m} b_{\alpha j} q_j^{\cdot} \quad (\alpha = m+1, \ldots, n) \tag{1.6}$$

Если теперь положить $k = \infty$, то система (1.6) примет вид уравнений связей (1.1), а система (1.5) после исключения из нее $q_\alpha^{\cdot}$ с помощью соотношений (1.6) при $k = \infty$ (т. е. (1.1)) — вид уравнений Воронца (1.2).

Таким образом, уравнения движения неголономной системы со связями вида (1.1) получаются из уравнений движения освобожденной от неголономных связей системы, на которую помимо исходных действуют диссипативные силы, производные от функции вида (1.3), если в последних коэффициент k положить равным бесконечности.

Замечание. При качении твердого тела по абсолютно шероховатой поверхности (без проскальзывания) возникают неголономные связи вида (1.1), выражающие условие равенства нулю скорости точки тела, соприкасающейся с опорной поверхностью. Если освободить систему от этих неголономных связей (допустить возможность проскальзывания) и ввести диссипацию вида (1.3), то последней будут отвечать силы, действующие на тело в точке его контакта с опорной поверхностью, пропорциональные скорости этой точки тела и противоположные ей по направлению, т. е. силы вязкого трения.

2. Покажем теперь, что теорема А. Н. Тихонова [1, 2] дает положительный ответ на вопрос о близости движений неголономной системы на-

чальными условиями q_{s0} $(s=1,\ldots,n)$, $q_{i0}^{\cdot}$ $(i=1,\ldots,m)$ и голономной при $k\to\infty$ системы с начальными условиями q_{s0} $(s=1,\ldots,n)$, $q_{s0}^{\cdot}$ $(s=1,\ldots,n)$.

Заметим, что последние $n-m$ начальных скоростей голономной системы $q_{\alpha0}^{\cdot}$ $(\alpha=m+1,\ldots,n)$ произвольны и могут не удовлетворять в начальный момент соотношениям (1.1).

Вводя квазиимпульсы

$$\pi_i=p_i+\sum_{\alpha=m+1}^{n}p_\alpha b_{\alpha i}\quad(i=1,\ldots,m),\quad \pi_\alpha=p_\alpha\quad(\alpha=m+1,\ldots,n)\tag{2.1}$$

где $p_s=\partial L/\partial q_s^{\cdot}$ $(s=1,\ldots,n)$ — импульсы, отвечающие скоростям $q_s^{\cdot}$ освобожденной от неголономных связей системы, перепишем систему (1.5), (1.6) в каноническом виде

$$q_i^{\cdot}=\frac{\partial H^*}{\partial\pi_i}\quad(i=1,\ldots,m)\tag{2.2}$$

$$q_\alpha^{\cdot}=\frac{\partial H^*}{\partial\pi_\alpha}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial H^*}{\partial\pi_i}b_{\alpha i}\quad(\alpha=m+1,\ldots,n)\tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}\pi_i^{\cdot}={}&-\frac{\partial H^*}{\partial q_i}+P_i^*-\sum_{\alpha=m+1}^{n}\left(\frac{\partial H^*}{\partial q_\alpha}-P_\alpha^*\right)b_{\alpha i}+\\&+\sum_{\alpha,\beta=m+1}^{n}\pi_\alpha\frac{\partial b_{\alpha i}}{\partial q_\beta}\frac{\partial H^*}{\partial\pi_\beta}+\sum_{\alpha=m+1}^{n}\pi_\alpha\sum_{j=1}^{m}\nu_{\alpha ij}\frac{\partial H^*}{\partial\pi_j}\quad(i=1,\ldots,m)\end{aligned}\tag{2.4}$$

$$\frac{1}{k}\pi_\alpha^{\cdot}=-\frac{\partial H^*}{\partial\pi_\alpha}-\frac{1}{k}\left(\frac{\partial H^*}{\partial q_\alpha}-P_\alpha^*-\sum_{\beta=m+1}^{n}\pi_\beta\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial b_{\beta j}}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H^*}{\partial\pi_j}\right)\quad(\alpha=m+1,\ldots,n)\tag{2.5}$$

Здесь $H^*(q,\pi)$ получается из гамильтониана $H(q,p)$, отвечающего лагранжиану $L(q,q^{\cdot})$, путем исключения p_s $(s=1,\ldots,n)$ с помощью соотношений (2.1); аналогичным образом P_s^* $(s=1,\ldots,n)$ получаются из P_s — обобщенных сил Q_s, записанных в координатах и импульсах. Случай $k=\infty$, при котором система (2.5) принимает вид

$$-\partial H^*/\partial\pi_\alpha=0\quad(\alpha=m+1,\ldots,n)\tag{2.6}$$

отвечает неголономной системе.

Очевидно, при указанных выше предположениях системы (2.2) — (2.5) и (2.2) — (2.4), (2.6) удовлетворяют теоремам существования и единственности решения, т. е. первому и третьему условиям теоремы А. Н. Тихонова [1, 2]. Кроме того, система (2.6) имеет единственное решение

$$\pi_\alpha=\varphi_\alpha(q_1,\ldots,q_n,\ \pi_1,\ldots,\pi_m)\quad(\alpha=m+1,\ldots,n)\tag{2.7}$$

отвечающее уравнениям неголономных связей. Действительно, поскольку

$$H^*(q_s,\pi_i,\pi_\alpha)=H\left(q_s,\ p_i-\sum_\beta p_\beta b_{\beta i},\ p_\alpha\right)$$

то система (2.6) имеет вид

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial H}{\partial p_i}b_{\alpha i}-\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}=0\quad(\alpha=m+1,\ldots,n)$$

т. е. ($q_s^{\cdot} = \partial H/\partial p_s$) — вид (1.1). В силу единственности и дифференцируемости при сделанных выше предположениях решение (2.7) удовлетворяет второму условию теоремы А. Н. Тихонова [1, 2].

Рассмотрим систему

$$(2.8) \qquad \pi_\alpha' = -\partial H^*/\partial \pi_\alpha \quad (\alpha = m+1, \ldots, n)$$

где штрих означает дифференцирование по некоторой независимой переменной τ, а q_s ($s = 1, \ldots, n$) и π_i ($i = 1, \ldots, m$) рассматриваются как параметры. Очевидно, равновесие (2.7) системы (2.8) асимптотически устойчиво равномерно по q_s, π_i, поскольку уравнения возмущенного движения имеют вид

$$(2.9) \qquad z_\alpha' = -\sum_{\beta=m+1}^{n} a_{\alpha\beta}(q) z_\beta \quad (z_\alpha = \pi_\alpha - \varphi_\alpha(q_s, \pi_i),\ \alpha = m+1, \ldots, n)$$

Здесь $\| a_{\alpha\beta}(q) \|$ — матрица из коэффициентов квазигамильтониана H^* при произведениях $n - m$ последних квазиимпульсов, все собственные значения которой положительны (по предположению кинетическая энергия определённо-положительна относительно скоростей, отсюда следует определенная положительность и гамильтониана относительно импульсов и квазигамильтониана относительно квазиимпульсов). Кроме того, очевидно, что решение системы (2.9) с любыми начальными значениями $z_{\alpha 0}$ асимптотически стремится к нулю, т. е. областью притяжения точки (2.7) системы (2.8) является вся область изменения π_α.

Следовательно выполнены и два последних условия теоремы А. Н. Тихонова [1, 2], т. е. найдется $0 < k_0 < \infty$, такое, что при $k > k_0$ решения системы (2.2) — (2.5) с начальными условиями q_{s0}, π_{s0} стремятся на любом конечном интервале времени при $k \to \infty$ к решениям системы (2.2) — (2.4), (2.6) с начальными условиями q_{s0}, π_{i0}; при этом $\pi_{\alpha 0}$ могут не удовлетворять системе (2.6).

3. Таким образом, доказана

Теорема. Пусть силовая функция и коэффициенты кинетической энергии, предполагаемой определенно-положительной квадратичной формой скоростей, дважды непрерывно дифференцируемы по координатам, а действующие на систему силы непрерывно дифференцируемы по координатам и скоростям. Тогда движения системы, стесненной неголономными связями вида (1.1) с дважды непрерывно дифференцируемыми по координатам коэффициентами, будут на любом конечном интервале времени предельными для соответствующих движений освобожденной от неголономных связей системы, находящейся под действием (помимо исходных) диссипативных сил, производных от функции вида (1.3), при стремлении коэффициента диссипации к бесконечности.

Замечания. 1°. Начальные условия освобожденной системы могут не удовлетворять уравнениям связей. Следовательно, в начальный момент состояние освобожденной от неголономных связей системы может существенно отличаться от состояния системы со связями. Однако это отличие становится малым за время порядка $\ln k/k$ [2], которое стремится к нулю при $k \to \infty$.

2°. При соответствующем усилении требований о дифференцируемости функции Лагранжа, обобщенных сил и коэффициентов связей для решений освобожденной от связей системы с диссипацией справедливы асимптотические разложения [2] по малому параметру $1/k$.

Доказанная теорема в частности означает, что неголономные связи, возникающие при движении тел по абсолютно шероховатым поверхностям (без проскальзывания), могут быть реализованы посредством сил вязкого трения и отвечают случаю, когда коэффициент трения равен бесконечности.

Ранее аналогичное утверждение было получено Н. А. Фуфаевым [3] для конкретной системы — саней Чаплыгина на горизонтальной плоскости при наличии неголономной связи или силы вязкого трения — путем исследования интегральных кривых.

Заметим, что вязкое трение имеет место при движениях тел по поверхности в режиме скольжения и верчения [4, 5] (в режиме чистого скольжения следует рассматривать сухое трение).

4. В работах [6, 7] были найдены необходимые и достаточные условия устойчивости вращения вокруг вертикали тяжелого твердого тела на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Исследуем теперь случай гладкой плоскости с вязким трением, который ранее был исследован только численно [8].

Рассмотрим тяжелое твердое тело, ограниченное выпуклой поверхностью и находящееся на горизонтальной плоскости. Предположим, что в точке контакта тела с плоскостью на тело действует сила, пропорциональная скорости точки тела, соприкасающейся с плоскостью и противоположная ей по направлению (сила вязкого трения). Положение тела будем задавать координатами x и y центра масс тела в неподвижной системе $Oxyz$ (плоскость Oxy совпадает с горизонтальной плоскостью, ось Oz направлена вертикально вверх) и углами Эйлера θ, φ и ψ, которые составляют главные центральные оси $G\xi$, $G\eta$ и $G\zeta$ эллипсоида инерции тела с осями неподвижной системы координат.

Тогда функция Лагранжа системы и диссипативная функция Релея примут вид

$$L = {}^1/_2\,[A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi + m(\gamma_1\cos\theta - \zeta\sin\theta)^2]\,\dot\theta^2 + {}^1/_2\,(C + m\gamma_2^2\sin^2\theta)\,\dot\varphi^2 + {}^1/_2\,[(A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi)\sin^2\theta + C\cos^2\theta]\dot\psi^2 + m(\gamma_1\cos\theta - \zeta\sin\theta)\,\gamma_2\sin\theta\dot\theta\dot\varphi + (A-B)\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\dot\theta\dot\psi + C\cos\theta\dot\varphi\dot\psi + {}^1/_2\,m(\dot x^2 + \dot y^2) + mg(\gamma_1\sin\theta + \zeta\cos\theta)$$

$$F = {}^1/_2\,mk\,\{[\dot x - (\alpha_1\dot\theta + \alpha_2\dot\varphi + \alpha_3\dot\psi)]^2 + [\dot y - (\beta_1\dot\theta + \beta_2\dot\varphi + \beta_3\dot\psi)]^2\}$$

$$\alpha_1 = -\sin\psi\,(\gamma_1\sin\theta + \zeta\cos\theta),\quad \alpha_2 = \gamma_1\cos\psi + \gamma_2\cos\theta\sin\psi$$

$$\alpha_3 = \gamma_2\sin\psi + (\gamma_1\cos\theta - \zeta\sin\theta)\cos\psi,\quad \beta_i = -\partial\alpha_i/\partial\psi$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

$$\gamma_1 = \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi,\quad \gamma_2 = \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi$$

Здесь m — масса тела, A, B, C — его главные центральные моменты инерции, $k > 0$ — коэффициент трения, ξ, η, ζ — координаты точки касания тела с плоскостью в системе $G\xi\eta\zeta$. Можно показать, что ξ, η, ζ представляют собой функции переменных θ и φ, определяемые по виду уравнения, задающего ограничивающую тело поверхность, и удовлетворяющие двумя соотношениям вида

$$(\xi' \sin\varphi + \eta' \cos\varphi) \sin\theta + \zeta' \cos\theta \equiv 0 \tag{4.1}$$

где штрих означает дифференцирование по θ или φ.

В исходных переменных F явно зависит от ψ, поэтому вместо координат x и y введем квазикоординаты ρ и σ по формулам

$$\rho^{\cdot} = x^{\cdot} \sin\psi - y^{\cdot} \cos\psi, \quad \sigma^{\cdot} = x^{\cdot} \cos\psi + y^{\cdot} \sin\psi \tag{4.2}$$

Функции L и F после исключения в них $x^{\cdot}$ и $y^{\cdot}$ с помощью соотношений (4.2) обозначим через L^* и F^*; последние будут зависеть только от θ, φ, $\theta^{\cdot}$, $\varphi^{\cdot}$, $\psi^{\cdot}$, $\rho^{\cdot}$ и $\sigma^{\cdot}$.

Уравнения движения в новых переменных

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \chi_i^{\cdot}} = \frac{\partial L^*}{\partial \chi_i} - \frac{\partial F^*}{\partial \chi_i^{\cdot}} \quad (i = 1, 2, 3; \quad \chi_1 = \theta, \quad \chi_2 = \varphi, \quad \chi_3 = \psi) \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \rho^{\cdot}} = -\frac{\partial F^*}{\partial \rho^{\cdot}} + \frac{\partial L^*}{\partial \sigma^{\cdot}}\psi^{\cdot}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \sigma^{\cdot}} = -\frac{\partial F^*}{\partial \sigma^{\cdot}} - \frac{\partial L^*}{\partial \rho^{\cdot}}\psi^{\cdot}\end{gathered} \tag{4.3}$$

не содержат явно ψ, ρ и σ, а содержат только их скорости и ускорения. Естественно назвать эти переменные циклическими [9], а θ и φ — позиционными и поставить задачу отыскания стационарных движений вида

$$\theta = \theta_0, \ \theta^{\cdot} = 0, \ \varphi = \varphi_0, \ \varphi^{\cdot} = 0, \ \psi^{\cdot} = \psi_0^{\cdot}, \ \rho^{\cdot} = \rho_0^{\cdot}, \ \sigma^{\cdot} = \sigma_0^{\cdot} \tag{4.4}$$

и их устойчивости.

Подставляя (4.4) в уравнения движения (4.3), с учетом соотношений (4.1) получим, что $\rho_0^{\cdot} = \sigma_0^{\cdot} = 0$, $\psi_0^{\cdot}$ — произвольно, а θ_0 и φ_0 таковы, что одна из главных центральных осей эллипсоида инерции тела совпадает с вертикалью, проходящей через точку касания тела с горизонтальной плоскостью. В частности, система (4.3) допускает решение

$$\theta = \pi / 2, \ \ \theta^{\cdot} = 0, \ \ \varphi = \varphi^{\cdot} = 0, \ \ \psi^{\cdot} = \omega = \text{const}, \ \ \rho^{\cdot} = \sigma^{\cdot} = 0 \tag{4.5}$$

которое отвечает вращению тела вокруг вертикально расположенной главной оси $G\eta$ эллипсоида инерции тела с постоянной угловой скоростью.

5. Исследуем устойчивость решения (4.5) по отношению к возмущениям переменных θ, $\theta^{\cdot}$, φ, $\varphi^{\cdot}$, $\psi^{\cdot}$, $\rho^{\cdot}$ и $\sigma^{\cdot}$.

Уравнения возмущенного движения после преобразований приводятся к виду

$$\begin{aligned}&Au^{\cdot\cdot} + (A + C - B)\,\omega v^{\cdot} + [(B - C)\,\omega^2 + mg\,(r_1 \cos^2\alpha + \\ &+ r_2 \sin^2\alpha - a)]\,u + mg\,(r_2 - r_1) \sin\alpha \cos\alpha v + mar^{\cdot} - \\ &- ma\omega s = U \\ &Cv^{\cdot\cdot} - (A + C - B)\,\omega u^{\cdot} + [(B - A)\,\omega^2 + mg\,(r_1 \sin^2\alpha + \\ &+ r_2 \cos^2\alpha - a)]\,v + mg\,(r_2 - r_1) \sin\alpha \cos\alpha u - mas^{\cdot} - \\ &-ma\omega r = V, \ w^{\cdot} = W \\ &r^{\cdot} + kr - kau^{\cdot} - k\omega\,[-(r_2 - r_1) \sin\alpha \cos\alpha\, u + \\ &+ (a - r_1 \sin^2\alpha - r_2 \cos^2\alpha)\,v] - \omega s = R\end{aligned} \tag{5.1}$$

$$s^{\cdot} + ks + kav^{\cdot} - k\omega\,[(a - r_1\cos^2\alpha - r_2\sin^2\alpha)\,u - (r_2 - r_1)\sin\alpha\cos\alpha v] + \omega r = S$$

Здесь u, v, w, r и s — возмущения переменных θ, φ, $\psi^{\cdot}$, $\rho^{\cdot}$ и $\sigma^{\cdot}$; U, V, W, R, S — функции переменных u, $u^{\cdot}$, v, $v^{\cdot}$, w, r и s, разложение ко торых начинается с членов не ниже второго порядка, причем U_0, V_0, W_0, R_0, S_0 тождественно равны нулю (нулевой индекс указывает, что в соответствующей функции все переменные, кроме w, положены равными нулю); a — расстояние между точкой касания тела с плоскостью и его центром масс; r_1 и r_2 — главные радиусы кривизны поверхности тела в точке его касания с плоскостью, α — угол между главной осью центрального эллипсоида инерции, отвечающей моменту C $(G\zeta)$, и направлением главного радиуса кривизны r_1, отсчитываемый от оси $G\zeta$ к оси $G\xi$.

Характеристическое уравнение для линеаризованной системы имеет вид

(5.2)
$$\lambda f(\lambda) = 0,\quad f(\lambda) = J\lambda^6 + K\lambda^5 + L\lambda^4 + M\lambda^3 + N\lambda^2 + P\lambda + Q$$

$$J = AC \equiv J_{0,0},\quad K = [2AC + (A + C)\,ma^2]\,k \equiv K_{0,1}k$$

$$L = [2AC + (B - A)(B - C)]\,\omega^2 + (A - C)\,ma\,(r_2 - r_1)\times \\ \times\sin\alpha\cos\alpha\,k\omega + (A + ma^2)(C + ma^2)\,k^2 + mg\times \\ \times[A\,(r_1\sin^2\alpha + r_2\cos^2\alpha - a) + C\,(r_1\cos^2\alpha + r_2\sin^2\alpha - a)]\equiv \\ \equiv L_{2,0}\omega^2 + L_{1,1}\omega k + L_{0,2}k^2 + L_{0,0}$$

$$M = [2AC + 2\,(B - A)(B - C) + 2\,(A + C)\,ma^2 + \\ + (B - A - C)\,ma\,(r_1 + r_2)]\,\omega^2 k + (A - C)\,ma\,(r_2 - r_1)\times \\ \times\sin\alpha\cos\alpha\,\omega k^2 + mg\,[2A\,(r_1\sin^2\alpha + r_2\cos^2\alpha - a) + \\ + 2C\,(r_1\cos^2\alpha + r_2\sin^2\alpha - a) + ma^2\,(r_1 + r_2 - 2a)]k\equiv \\ \equiv (M_{2,1}\omega^2 + M_{1,2}\omega k + M_{0,1})\,k$$

$$N = [AC + 2\,(B - A)(B - C)]\omega^4 + 2\,(A - C)\,ma\,(r_2 - \\ - r_1)\sin\alpha\cos\alpha\,\omega^3 k + \{AC + (B - A)(B - C) + \\ + ma\,[B\,(r_1 + r_2 - 2a) - A\,(r_1\cos^2\alpha + r_2\sin^2\alpha - 2a) - \\ - C\,(r_1\sin^2\alpha + r_2\cos^2\alpha - 2a)] + m^2a^2\,[a^2 + (a - r_1)\times \\ \times(a - r_2)]\}\,\omega^2k^2 + mg\,[B\,(r_1 + r_2 - 2a) + (A - C)(r_2 - r_1)\times \\ \times(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)]\,\omega^2 + mg\,[A\,(r_1\sin^2\alpha + r_2\cos^2\alpha - a) + \\ + C\,(r_1\cos^2\alpha + r_2\sin^2\alpha - a) + ma^2\,(r_1 + r_2 - 2a)]k^2 + \\ + m^2g^2\,(a - r_1)(a - r_2) \equiv N_{4,0}\omega^4 + N_{3,1}\omega^3 k + N_{2,2}\omega^2k^2 + \\ + N_{2,0}\omega^2 + N_{0,2}k^2 + N_{0,0}$$

$$P = [2\,(B - A)(B - C) + (B - A - C)\,ma\,(r_1 + r_2) + \\ + (A + C)\,ma^2]\,\omega^4 k + (A - C)\,ma\,(r_2 - r_1)\sin\alpha\cos\alpha\,\omega^3k^2 + \\ + mg\,[2B\,(r_1 + r_2 - 2a) - 2A\,(r_1\cos^2\alpha + r_2\sin^2\alpha - a) - \\ - 2C\,(r_1\sin^2\alpha + r_2\cos^2\alpha - a) + ma^2\,(r_1 + r_2 - 2a)]\,\omega^2 k + \\ + 2m^2g^2\,(a - r_1)(a - r_2)\,k \equiv (P_{4,1}\omega^4 + P_{3,2}\omega^3 k + \\ + P_{2,1}\omega^2 + P_{0,1})\,k$$

$$Q = (B - A)(B - C)\,\omega^6 + (A - C)\,ma\,(r_2 - r_1)\times \\ \times\sin\alpha\cos\alpha\,\omega^5 k + \{(B - A)(B - C) + ma\,[B\,(r_1 + r_2 - \\ - 2a) - A\,(r_1\cos^2\alpha + r_2\sin^2\alpha - a) - \\ - C\,(r_1\sin^2\alpha + r_2\cos^2\alpha - a) + ma\,(a - r_1)(a - r_2)]\}\,\omega^4k^2 + \\ + [B\,(r_1 + r_2 - 2a) - A\,(r_1\cos^2\alpha + r_2\sin^2\alpha - a) -$$

$$- C\,(r_1 \sin^2\alpha + r_2 \cos^2\alpha - a)]\, mg\omega^4 + mg\,[B\,(r_1 + r_2 - 2a) -$$
$$- A\,(r_1 \cos^2\alpha + r_2 \sin^2\alpha - a) - C\,(r_1 \sin^2\alpha + r_2 \cos^2\alpha - a) +$$
$$+ 2ma\,(a - r_1)\,(a - r_2)]\, \omega^2 k^2 + m^2 g^2\,(a - r_1)\,(a - r_2)\,\omega^2 +$$
$$+ m^2 g^2\,(a - r_1)\,(a - r_2)\,k^2 \equiv Q_{6,0}\omega^6 + Q_{5,1}\omega^5 k +$$
$$+ Q_{4,2}\omega^4 k^2 + Q_{4,0}\omega^4 + Q_{2,2}\omega^2 k^2 + Q_{2,0}\omega^2 + Q_{0,2}k^2$$

Очевидно, характеристическое уравнение (5.2) всегда имеет один нулевой корень. Если при этом по крайней мере один корень уравнения

$$f(\lambda) = 0 \tag{5.3}$$

лежит в правой полуплоскости, то решение (4.5) неустойчиво; если же все корни уравнения (5.3) лежат в левой полуплоскости, то справедлива теорема Ляпунова, так как система (5.1) имеет вид, отвечающий особенному случаю критического случая одного нулевого корня, и решение (4.5) устойчиво, причем асимптотически относительно θ, $\theta^{\cdot}$, φ, $\varphi^{\cdot}$, $\rho^{\cdot}$, $\sigma^{\cdot}$ и неасимптотически относительно $\psi^{\cdot}$.

6. Все корни уравнения (5.3) лежат в левой полуплоскости тогда и только тогда, когда выполнены условия [10]

$$\begin{gathered}
L_{2,0}\omega^2 + L_{1,1}\omega k + L_{0,2}k^2 + L_{0,0} > 0 \\
N_{4,0}\omega^4 + N_{3,1}\omega^3 k + N_{2,2}\omega^2 k^2 + N_{2,0}\omega^2 + N_{0,2}k^2 + N_{0,0} > 0 \\
Q_{6,0}\omega^6 + Q_{5,1}\omega^5 k + Q_{4,2}\omega^4 k^2 + Q_{4,0}\omega^4 + Q_{2,2}\omega^2 k^2 + Q_{2,0}\omega^2 + Q_{0,2}k^2 > 0 \\
\delta_{4,2}\omega^4 + \delta_{3,3}\omega^3 k + \delta_{2,4}\omega^2 k^2 + \delta_{1,5}\omega k^3 + \delta_{2,2}\omega^2 + \delta_{1,3}\omega k + \\
+ \delta_{0,4}k^2 + \delta_{0,2} > 0 \\
\Delta_{12,3}\omega^{12} + \ldots + (\Delta_{6,9}\omega^6 + \Delta_{4,9}\omega^4 + \Delta_{2,9}\omega^2)\,k^6 + \ldots + \Delta_{0,3} > 0
\end{gathered} \tag{6.1}$$

Здесь $\delta_{\mu,\nu}$ и $\Delta_{\mu,\nu}$ — коэффициенты разложения определителей δ и Δ по степеням ω, k

$$\Delta = \begin{vmatrix} J & L & N & Q & 0 \\ 0 & J & L & N & Q \\ 0 & 0 & K & M & P \\ 0 & K & M & P & 0 \\ K & M & P & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

а определитель δ получается из определителя Δ вычеркиванием первых и последних строк и столбцов.

Анализ условий (6.1) значительно упрощается, если $k \gg |\omega|$ или $|\omega| \gg k$.

Пусть $k \gg |\omega|$, тогда условия (6.1) эквивалентны условиям

$$\begin{gathered}
Q_{4,2}\omega^4 + Q_{2,2}\omega^2 + Q_{0,2} > 0 \\
(N_{2,2}\omega^2 + N_{0,2} - L_{0,2}\omega^2)\,\omega^2 - (Q_{4,2}\omega^4 + Q_{2,2}\,\omega^2 + Q_{0,2}) > 0 \\
(A - C)\,(r_2 - r_1)\sin\alpha\cos\alpha\;\omega > 0
\end{gathered} \tag{6.2}$$

которые в точности совпадают с условиями устойчивости вращения тяжелого твердого тела на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Первые два условия в (6.2) накладывают ограничения только на распределение масс и геометрию поверхности тела и величину угловой скорости, а третье — на направление вращения тела.

Итак, если коэффициент трения достаточно велик, то условия устойчивости вращения тела на плоскости с трением практически эквивалентны условиям устойчивости вращения тела на абсолютно шероховатой плоскости.

Заметим, что если уравнение (5.3) разделить на k^2 и затем положить $k = \infty$, то оно примет вид

$$L_{0,2}\lambda^4 + M_{1,2}\omega\lambda^3 + (N_{2,2}\omega^2 + N_{0,2})\lambda^2 + P_{3,2}\omega^3\lambda + \\ + (Q_{4,2}\omega^4 + Q_{2,2}\omega^2 + Q_{0,2}) = 0$$

в точности совпадающий с видом соответствующего случаю абсолютно шероховатой плоскости уравнения относительно ненулевых корней [7].

Пусть теперь $|\omega| \gg k$, тогда условия (6.1) практически эквивалентны условиям

$$L_{2,0} > 0,\ N_{4,0} > 0,\ Q_{6,0} > 0,\ \delta_{4,2} > 0,\ \Delta_{12,3} > 0 \tag{6.3}$$

которые накладывают ограничения только на распределение масс и геометрию поверхности тела. Заметим, что область (6.3) не пуста в пространстве параметров $(A, B, C, m, a, r_1, r_2, \alpha)$ системы в окрестности многообразия $A = C$, $r_1 = r_2$, отвечающего случаю вращения динамически симметричного тела со сферической опорой вокруг оси симметрии. Это означает, что при достаточно быстром вращении тела его устойчивость в некоторых определенных случаях распределения масс и геометрии поверхности тела не зависит от направления вращения.

Однако и при быстром вращении в пространстве параметров системы существует область, отвечающая случаю, когда устойчивость вращения тела существенно зависит от направления вращения. Пусть, например, $B = A \neq C$ или $B = C \neq A$, тогда $Q_{6,0} = 0$ и при $|\omega| \gg k$ условия (6.1) эквивалентны условиям

$$L_{2,0} > 0,\quad N_{4,0} > 0,\quad \delta_{4,2} > 0,\quad \Delta_{12,3} > 0$$

$$Q_{5,1}\omega \equiv (A - C)(r_2 - r_1)\sin\alpha\cos\alpha\omega > 0$$

которые накладывают ограничения не только на распределение масс и геометрию поверхности тела, но и на знак угловой скорости. При этом последнее условие совпадает с аналогичным условием устойчивости вращения тела на абсолютно шероховатой плоскости, а первые четыре — отличаются от соответствующих условий.

Автор благодарит В. В. Румянцева за ценные замечания, а также В. Н. Рубановского и В. С. Сергеева за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А. Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных.— Матем. сб., 1952, т. 31, № 3.
2. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
3. *Фуфаев Н. А.* О возможности реализации неголономной связи посредством сил вязкого трения.— ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
4. *Контенсу П.* Связь между трением скольжения и трением верчения и ее учет в теории волчка.— В кн.: Проблемы гироскопии. М.: Мир, 1967.

5. *Магнус К.* Гироскоп. М.: Мир, 1974.
6. *Румянцев В. В.* Об устойчивости вращения тяжелого гиростата на горизонтальной плоскости.— Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 4.
7. *Карапетян А. В.* К вопросу об устойчивости стационарных движений неголономных систем.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 3.
8. *Magnus K.* Zur Theorie der Keltischen Wackelsteine.—ZAMM, 1974, B. 54, H. 4. S. 54.
9. *Емельянова И. С.*, *Фуфаев Н. А.* Об устойчивости стационарных движений.— В кн.: Теория колебаний, прикладная математика и кибернет. Изд-во Горьковск. ун-та, 1974.
10. *Джури Э.* Инноры и устойчивость динамических систем. М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию
10.III.1980