Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 1, 1981

УДК 531.135 + 521.1

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ УНИФОРМИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ЦЕНТРАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Беленький И. М.

(Москва)

В рамках линейной и регулярной небесной механики [1] предложен метод, позволяющий за счет введения регуляризирующих переменных устранить имеющуюся при наличии центрального тела сингулярность типа полюса, а также привести уравнения движения к линейному виду, придав им форму уравнений движения гармонического осциллятора. Эта связь с теорией колебаний гармонического осциллятора позволяет рассматривать с единой точки зрения различные типы движения, поскольку постоянная энергии h входит как параметр в само уравнение.

Получено соотношение, определяющее регуляризирующую функцию при заданном потенциале поля. При помощи регуляризации решения могут быть представлены в униформизированной форме, что избавляет от необходимости рассматривать ветвление решений, возникающее при обходе критических точек. При помощи эллиптических функций достигается униформизация в целом [2]. В качестве приложения метода униформизации рассмотрено возмущенное движение Кеплера.

Регуляризация уравнений движения играет важную роль в небесной механике, особенно при рассмотрении соударения тел. Впервые регуляризация предложена, по-видимому, Эйлером [3] для одномерной задачи о столкновении двух тел. В [4] показано, что подстановка Эйлера приводит к регуляризации также и ограниченной задачи трех тел. В работе [5] показана регуляризация, позволяющая задачу двух тел свести к задаче гармонического осциллятора в комплексной плоскости. Дальнейший прогресс в этой области связан с работами [6, 7], в которых предложена спинорная регуляризация, представляющая обобщение регуляризации Леви-Чивита [5] для трехмерной задачи двух тел.

В последние годы появилось большое количество работ, посвященных главным образом различным аспектам задачи Кеплера (см., например, [8]). При этом методы регуляризации оказались особенно эффективными при рассмотрении возмущенных кеплеровых движений. Для консервативных систем с n степенями свободы вопросы регуляризации уравнений движения рассматривались, в частности, в [9, 10].

1. Основные зависимости. Пусть изображающая точка M системы с приведенной массой μ движется в центральном силовом поле с потенциалом $U(r)$ при постоянной энергии h. Вводя в плоскости орбиты полярные координаты r и φ (начало координат $r = 0$ совмещено с центральным телом) и пользуясь интегралом энергии $^1/_2\, \mu v^2 + U(r) = h$ и интегралом площадей $r^2 d\varphi/dt = c$ (c — постоянная площадей), после исключения φ получим

$$\frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = h - U_1(r) \quad \left(U_1(r) = U(r) + \frac{\mu c^2}{2r^2}\right) \tag{1.1}$$

Здесь $U_1(r)$ — приведенная потенциальная энергия.

Качественный анализ уравнения (1.1) при заданном виде потенциала $U(r)$ может быть осуществлен согласно методу Вейерштрасса [11]. Ниже указан другой метод, основанный на введении регуляризирующего преобразования времени. Идея метода восходит к работе [12].

2. Регуляризация времени. Введем в качестве регуляризирующей новую независимую переменную $\tau = \tau(t)$, полагая

$$d\tau = g^{-1}(r)\,dt \quad (g(r) > 0) \tag{2.1}$$

Здесь $g(r)$ — функция переменного r, принадлежащая классу C^1 и не обращающаяся в нуль в области фазового пространства, соответствующей движению исходной системы. Уравнение (1.1), согласно преобразованию (2.1), после дифференцирования по τ и сокращения на неравный нулю множитель $dr\,/\,d\tau$ принимает вид

$$\mu\frac{d^2r}{d\tau^2} = \frac{d}{dr}\left(g^2(r)\,(h - U_1(r))\right) \tag{2.2}$$

Для линеаризации полученного уравнения необходимо потребовать, чтобы правая часть (2.2) была линейной функцией r. Отсюда в результате интегрирования получим основное соотношение для определения регуляризирующей функции $g(r)$ при заданном виде приведенного потенциала $U_1(r)$ в виде

$$g^2(r)\,(h - U_1(r)) = {}^1\!/_2 c_1r^2 + c_2r + c_3 \quad (c_1,\ c_2,\ c_3 = \mathrm{const}) \tag{2.3}$$

Выражение (2.3) можно рассматривать также как соотношение для определения вида приведенного потенциала $U_1(r)$, допускающего рассматриваемую регуляризацию при заданном виде регуляризирующей функции $g(r)$.

Согласно (2.2) и (2.3), получим линейное уравнение, записанное в форме уравнения движения гармонического осциллятора

$$d^2r/d\tau^2 = c_1r\,/\,\mu + c_2\,/\,\mu \tag{2.4}$$

Значения $r = r_1$ и $r = r_2$, при которых радиальная скорость $v_r = dr/dt$ обращается в нуль, являются корнями уравнения $h - U_1(r) = 0$.

Следовательно, представляя правую часть (2.3) в форме $B(r - r_1) \times \times (r - r_2)$ $(B = \mathrm{const})$, получим следующие соотношения между параметрами:

$$c_1 = 2B,\ c_2 = -B(r_1 + r_2),\ c_3 = Br_1r_2 \tag{2.5}$$

Заметим, что в случае действительных значений r_1 и r_2 дискриминант $\Delta = c_2{}^2 - 2c_1c_3 \geqslant 0$.

3. Униформизация решений. При интегрировании (2.4) следует различать случаи: $c_2/c_1 > 0$, $c_2/c_1 < 0$ и $c_2/c_1 = 0$.

а) Пусть $c_2/c_1 > 0$. В этом случае общий интеграл (2.4) имеет вид

$$\begin{gathered} r = A\,\mathrm{ch}\,(\nu\tau + \alpha) - c_2/c_1 = a\,(e\,\mathrm{ch}\,s - 1) \\ a = c_2/c_1,\ A = ae > 0,\ \nu^2 = c_1/\mu,\ s = \nu\tau + \alpha \end{gathered} \tag{3.1}$$

Здесь A и α — постоянные интегрирования, величину a назовем средним расстоянием, e — квазиэксцентриситетом.

Для определения квазиэксцентриситета e найдем корни уравнения $dr/ds = 0$ в виде $r_1 = a(e-1)$, $r_2 = -a(e+1)$, что согласно (2.5) приводит к соотношению

$$e^2 = 1-2c_1^{-1}c_3a^{-2} = 1-2c_1c_3c_2^{-2} \tag{3.2}$$

Для определения истинной аномалии $\varphi^* = \varphi + \mathrm{const}$ воспользуемся интегралом площадей. Вводя регуляризирующую переменную τ (2.1) и направляя ось абсцисс x вдоль линии апсид в направлении к перигею (при этом $\varphi^* = \varphi$), с учетом (3.1) получим

$$d\varphi = \frac{2c}{\nu a^2}\frac{(r^*)^{-3/2}g(ar^*)\,dr^*}{\sqrt{4r^*((r^*+1)^2-e^2)}} \quad \left(r^* = \frac{r}{a}\right) \tag{3.3}$$

Введем новую переменную $y = r^* - m$, где параметр m выбирается из условия обращения в нуль членов, квадратичных относительно y, в подкоренном выражении (3.3). Это условие дает $m = -{}^2/_3$ и равенство (3.3) принимает следующий вид:

$$d\varphi = \frac{2c}{\nu a^2}\frac{(y+m)^{-3/2}g(a(y+m))\,dy}{\sqrt{4(y-e_1)(y-e_2)(y-e_3)}} \tag{3.4}$$

Здесь корни e_i $(i = 1, 2, 3)$ удовлетворяют условиям $e_1 > e_2 > e_3$, $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, а их значения определяются выражениями

$$\begin{aligned} &e > 1;\ e_1 = e - {}^1/_3,\ e_2 = {}^2/_3,\ e_3 = -(e + {}^1/_3) \\ &e < 1;\ e_1 = {}^2/_3,\ e_2 = e - {}^1/_3,\ e_3 = -(e + {}^1/_3) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Для интегрирования (3.4) введем эллиптическую функцию Вейерштрасса, полагая $y = \wp(u;\ g_2, g_3)$, где инварианты g_2 и g_3 согласно (3.5) имеют вид

$$\begin{aligned} &g_2 = -4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1) = 4(1 + 3e^2)/3 \\ &g_3 = 4e_1e_2e_3 = 8(1-9e^2)/27 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Воспользовавшись известным из теории эллиптических функций [13] соотношением

$$\wp'^2(u) = 4(\wp(u) - e_1)(\wp(u) - e_2)(\wp(u) - e_3) \quad ({}' = d/du)$$

в результате интегрирования (3.4) получим

$$\varphi = \frac{2c}{\nu a^2}\int(\wp(u) + m)^{-3/2}g(a(\wp(u) + m))\,du + \mathrm{const} \tag{3.7}$$

Для определения времени t, воспользуемся (2.1) и (3.1). Имеем

$$t = 2\nu^{-1}\int(\wp(u) + m)^{1/2}g(a(\wp(u) + m))\,du + \mathrm{const} \tag{3.8}$$

Присоединяя к (3.7) и (3.8) выражение для r, записанное в форме

$$r = a(\wp(u;\ g_2, g_3) + m) \tag{3.9}$$

получим полное решение задачи в униформизированной форме, где u играет роль униформизирующей переменной.

б) Пусть $c_2/c_1 < 0$. В рассматриваемом случае общий интеграл (2.4) имеет вид

$$r = A\,\mathrm{ch}(\nu\tau + \alpha) - c_2/c_1 = a(e\,\mathrm{ch}\,s + 1)$$

(3.10)
$$a = |c_2/c_1|, \ A = ae > 0, \ \nu^2 = c_1/\mu, \ s = \nu\tau + \alpha$$

Здесь A и α — постоянные интегрирования. Аналогично случаю а), опуская промежуточные вычисления, получим униформизированное решение в следующем виде:

(3.11)
$$r = a(\wp(u; g_2^*, g_3^*) + m^*)$$
$$\varphi = 2c\nu^{-1}a^{-2}\int(\wp(u) + m^*)^{-3/2} g(a(\wp(u) + m^*))\,du + \text{const}$$
$$t = 2\nu^{-1}\int(\wp(u) + m^*)^{1/2} g(a(\wp(u) + m^*))\,du + \text{const}$$

Здесь u — униформизирующая переменная, $m^* = -m = {}^2/_3$, корни e_1^*, e_2^*, e_3^* имеют соответственно вид

(3.12)
$$e > 1; \ e_1^* = -e_3, \ e_2^* = -e_2, \ e_3^* = -e_1$$
$$e < 1; \ e_1^* = -e_3, \ e_2^* = -e_2, \ e_3^* = -e_1$$

Для инвариантов g_2^* и g_3^* справедливы соотношения $g_2^* = g_2$ и $g_3^* = -g_3$.

в) Пусть $c_2/c_1 = 0$. Общий интеграл (2.4) в рассматриваемом случае имеет вид

(3.13)
$$r = A\,\mathrm{ch}(\nu\tau + \alpha) = a\,\mathrm{ch}\,s \quad (A = a)$$

Здесь A и α — постоянные интегрирования.

Пользуясь методом униформизации, получим решение в следующей форме:

(3.14)
$$r = a\wp(u; g_2, g_3)$$
$$\varphi = 2c\nu^{-1}a^{-2}\int\wp^{-3/2}(u)\,g(a\wp(u))\,du + \text{const}$$
$$t = 2\nu^{-1}\int\wp^{1/2}(u)\,g(a\wp(u))\,du + \text{const}$$
$$e_1 = 1, \ e_2 = 0, \ e_3 = -1, \ g_2 = 4, \ g_3 = 0$$

4. Обобщенное преобразование Зундмана. Особый интерес представляет обобщенное преобразование Зундмана [12], когда регуляризирующая функция является степенной функцией r, т. е. $g(r) = r^n$ $(n \neq 0)$. Согласно (2.1), имеем

(4.1)
$$dt = r^n d\tau$$

При $n = 1$ получим преобразование Зундмана $dt = r d\tau$. Преобразование вида (4.1) рассматривалось также в [14].

Приведенный потенциал $U_1(r)$, допускающий рассматриваемую регуляризацию при заданной величине постоянной энергии h и заданном виде регуляризирующей функции $g(r) = r^n$, в силу основного соотношения (2.3) имеет вид

(4.2)
$$U_1(r) = h - r^{-2n}\left({}^1/_2\, c_1 r^2 + c_2 r + c_3\right)$$

Полагая в формулах п. 3 $g(r) = r^n = a^n r^{*n}$, получим соответствующие униформизированные решения.

а) $c_2/c_1 > 0$. Согласно (3.7), (3.8) и (3.9), решение имеет следующий вид:

$$r = a(\wp(u;\ g_2,\ g_3) + m) \tag{4.3}$$
$$\varphi = 2c\nu^{-1}a^{n-2}\int(\wp(u) + m)^{n-3/2}du + \text{const}$$
$$t = 2\nu^{-1}a^n\int(\wp(u) + m)^{n+1/2}\,du + \text{const}$$

Здесь $m = -{}^2/_3 = -e_2$ при $e > 1$ и $m = -{}^2/_3 = -e_1$ при $e < 1$. Инварианты g_2 и g_3 определяются согласно (3.6).

б) $c_2/c_1 < 0$. Здесь согласно (3.11) решение имеет такой же вид, как и в предыдущем случае при $c_2/c_1 > 0$, если m, g_2 и g_3 заменить соответственно на $m^* = -m$, $g_2{}^* = g_2$ и $g_3{}^* = -g_3$.

в) $c_2/c_1 = 0$. Согласно (3.14), решение имеет следующий вид:

$$r = a\wp(u;\ g_2,\ g_3) \tag{4.4}$$
$$\varphi = 2c\nu^{-1}a^{n-2}\int\wp^{n-3/2}(u)\,du + \text{const}$$
$$t = 2\nu^{-1}a^n\int\wp^{n+1/2}(u)\,du + \text{const}$$

Как следует из приведенных формул, униформизация решений достигается при помощи эллиптических функций для значений $n = {}^1/_2, {}^3/_2, 5/2, \ldots$

Примеры. 1°. Пусть $n = {}^1/_2$. Регуляризирующее преобразование имеет вид

$$d\tau = r^{-1/2}\,dt \quad (g(r) = r^{1/2})$$

Приведенный потенциал $U_1(r)$, допускающий указанную регуляризацию, согласно (4.2) с учетом равенства $c_2 = h$ равен

$$U_1(r) = -{}^1/_2\,c_1r - c_3/r$$

Рассмотрим случай, когда $c_2/c_1 > 0$ и $e > 1$. Здесь $m = -{}^2/_3 = -e_2$ и $(e_2-e_1)(e_2-e_3) = 1-e^2$. Вводя дзета-функцию Вейерштрасса $\zeta(u)$ и пользуясь известным соотношением [13]

$$\wp(u + \omega_1 + \omega_3) - e_2 = \frac{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}{\wp(u) - e_2}$$

где ω_1 и ω_3 — полупериоды функции $\wp(u)$, в результате интегрирования (4.3) получим решение

$$r = a(\wp(u;\ g_2,\ g_3) - e_2)$$
$$\varphi = 2c\nu^{-1}a^{-3/2}(e^2-1)^{-1}(\zeta(u + \omega_1 + \omega_3) + e_2u) + \text{const}$$
$$t = 2\nu^{-1}a^{1/2}(-\zeta(u) - e_2u) + \text{const}$$

Аналогичным образом можно получить решения и в случаях, когда $c_2/c_1 < 0$ и $c_2/c_1 = 0$.

2°. Пусть $n = {}^3/_2$. Регуляризирующее преобразование (2.1) принимает следующий вид:

$$d\tau = r^{-3/2}dt \quad (g(r) = r^{3/2}) \tag{4.5}$$

Приведенный потенциал $U_1(r)$, допускающий рассматриваемую регуляризацию, согласно (4.2) найдем в форме

$$U_1(r) = -\frac{{}^1/_2c_1}{r} - \frac{c_2}{r^2} - \frac{c_3}{r^3} \tag{4.6}$$

Постоянная энергии h равна нулю.

а) $c_2/c_1 > 0$. Из (4.3) с учетом выражений

$$\int\wp(u)\,du = -\zeta(u), \quad \int\wp^2(u)\,du = \frac{1}{6}\,\wp'(u) + \frac{1}{12}\,g_2u$$

в результате интегрирования получим решение

$$r = a\,(\wp\,(u;\ g_2,\ g_3) + m) \tag{4.7}$$
$$\varphi = 2c\nu^{-1}a^{-1/2}\,u + \text{const}$$
$$t = 2\nu^{-1}a^{3/2}\left(\frac{1}{6}\wp'(u) - 2m\zeta(u) + \left(\frac{1}{12}g_2 + m^2\right)u\right) + \text{const}$$

Таким образом, уравнение траектории для рассматриваемого параболического типа движения ($h = 0$) имеет вид

$$r = a\left(\wp\left(\frac{\nu a^{1/2}}{2c}\,\varphi + \alpha\right) + m\right) \quad (\alpha = \text{const}) \tag{4.8}$$

б) $c_2/c_1 < 0$. Здесь решение будет иметь тот же вид, что и в предыдущем случае, при замене в формулах (4.7) и (4.8) параметра m на $m^* = -m$ и инвариантов g_2 и g_3 соответственно на $g_2^* = g_2$ и $g_3^* = -g_3$.

в) $c_2/c_1 = 0$. Здесь решение будет иметь тот же вид, что и в случае $c_2/c_1 > 0$, если в формулах (4.7) и (4.8) положить $m = 0$, а инварианты принять равными $g_2 = 4$ и $g_3 = 0$.

5. Возмущенное движение Кеплера. Рассмотрим возмущенное движение Кеплера в центральном поле с потенциалом

$$U(r) = -\frac{a_1}{r} - \frac{a_2}{r^2} - \frac{a_3}{r^3} \tag{5.1}$$

Такой вид, в частности, имеет в первом приближении потенциал сжатого сфероида для точек, движущихся в экваториальной плоскости (при этом ($a_2 = 0$) [15, 16]), а также в третьем приближении, потенциальная энергия атомного поля [17]. Поправка к ньютонианскому потенциалу ($-a_1/r$) в виде аддитивного слагаемого вида ($-a_3/r^3$) рассматривается также в общей теории относительности для объяснения движения перигелия Меркурия [18].

Из (5.1) и (2.3) следует, что регуляризирующую функцию надо выбрать в виде

$$g(r) = r^{3/2}(1 + \beta r)^{-1/2} \tag{5.2}$$

где параметр β подлежит дальнейшему определению.

При указанном выборе регуляризирующей функции $g(r)$ справедливы следующие соотношения между параметрами:

$$2h = \beta c_1,\ \ 2a_1 = c_1 + 2\beta c_2,\ \ a_2 - {}^1/_2\,\mu c^2 = c_2 + \beta c_3,\ \ a_3 = c_3 \tag{5.3}$$

Исключив из этих соотношений величины c_1, c_2 и c_3, получим для определения параметра β кубическое уравнение вида

$$a_3\beta^3 - (a_2 - {}^1/_2\,\mu c^2)\,\beta^2 + a_1\beta - h = 0 \tag{5.4}$$

Уравнение (5.4) всегда имеет по крайней мере один вещественный корень. В том случае, когда все три корня β_1, β_2 и β_3 вещественны, при выборе значения β следует учитывать условие $g(r) > 0$, которое будет выполняться при $\beta > 0$, а при $\beta < 0$ область рассматриваемых движений ограничена кругом радиуса $r < |\beta|^{-1}$. В общем случае для определения области возможных движений можно воспользоваться кривыми Хилла [19].

Обратимся теперь к рассмотрению различных типов движения.

1°. *Случай гиперболического типа движения* ($h > 0$). Не нарушая общности рассуждений, положим $\beta > 0$. При этом $c_1 = 2h\beta^{-1} > 0$ и, следовательно, знак c_2/c_1 будет зависеть от знака $c_2 = (a_1\beta - h)\beta^{-2}$.

а) Пусть $0 < h < a_1\beta$. Это дает $c_2/c_1 > 0$ и, следовательно, можно воспользоваться формулами (3.1). В результате получим $r = a\,(e \operatorname{ch} s - 1)$, где среднее расстояние a и квазиэксцентриситет e согласно (3.2) и (5.3) будут:

$$a = (a_1\beta - h)/(2h\beta), \quad e^2 = 1 - \beta a_3/(ha^2) \tag{5.5}$$

Отсюда, в частности, следует, что для выполнения условия $e > 1$ (при $h > 0$) необходимо $a_3 < 0$.

Для определения истинной аномалии φ воспользуемся соотношением (3.3), где $g\,(r)$ определяется согласно (5.2). Введем новую переменную $y = 1/r - m$, выбирая параметр m из условия обращения в нуль квадратичных относительно y членов в подкоренном выражении (3.3). Это дает

$$m = -\frac{1}{3}(a\beta + \alpha_1 - \alpha_2) \quad (\alpha_1 = (e+1)^{-1}, \quad \alpha_2 = (e-1)^{-1}) \tag{5.6}$$

и окончательно получим

$$d\varphi = -\frac{c\sqrt{2a\mu}}{\sqrt{a_3}}\frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}} \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned} g_2 &= 4\,(3m^2 - a\beta\,(\alpha_1 - \alpha_2) + \alpha_1\alpha_2) \\ g_3 &= -4\,(m + a\beta)(m + \alpha_1)(m - \alpha_2) \end{aligned} \tag{5.8}$$

Униформизация будет достигнута, если положить $y = \wp\,(u;\, g_2,\, g_3)$. В результате находим

$$\begin{aligned} \varphi &= -c\,(2a\mu)^{1/2}\,(a_3)^{-1/2}\,u + \text{const} \\ a/r &= \wp\,(u;\, g_2,\, g_3) + m \end{aligned} \tag{5.9}$$

Уравнение траектории имеет вид

$$a/r = \wp\,(k\varphi + \alpha) + m \quad (k = (2a\mu)^{-1/2}c^{-1}a_3^{1/2}, \quad \alpha = \text{const}) \tag{5.10}$$

б) Пусть $a_1\beta < h < \infty$, что соответствует случаю $c_2/c_1 < 0$. Решение будет иметь тот же вид, что и в предыдущем случае, если α_1 и α_2 заменить соответственно на $\alpha_1{}^* = -\alpha_1$ и $\alpha_2{}^* = -\alpha_2$.

в) Пусть $h = a_1\beta$, что соответствует случаю $c_2/c_1 = 0$. Воспользовавшись (3.13) и замечая, что в рассматриваемом случае $r_1 r_2 = -a^2$, в согласии с (2.5) и (5.3) получим

$$a^2 = |\,a_3\,|\,\beta/h \quad (a_3 < 0)$$

Само решение будет иметь тот же вид, что и в случае $c_2/c_1 > 0$, если в выражениях (5.6) и (5.8) для m, g_2 и g_3 положить $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

2°. *Случай эллиптического типа движения* ($h < 0$). Здесь решение будет иметь тот же вид, что и в случае $c_2/c_1 > 0$, если α_1 и α_2 заменить соответственно на $\alpha_1{}^* = -\alpha_1$ и $\alpha_2{}^* = -\alpha_2$ и заметить, что для рассматриваемого случая $e < 1$ и $a_3 > 0$.

3°. *Случай параболического типа движения* ($h = 0$). Для рассматриваемого случая значение $\beta = 0$ является одним из решений (5.4) и, следовательно, регуляризирующее преобразование (5.2) сведется к обобщенному преобразованию Зундмана (4.5). Таким образом, решение будет получено, если в формулах, соответствующих случаю $n = 3/2$, согласно (4.6), (5.1) и (5.3) положить

$$c_1 = 2a_1, \quad c_2 = a_2 - {}^1/_2\mu c^2, \quad c_3 = a_3$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stiefel E. L., Scheifele G.* Linear and regular celestial mechanics. Berlin, Heidelberg, New York, Springer—Verlag, 1971. (Рус. перев. М.: Наука, 1975).
2. *Неванлинна Р.* Униформизация. М.: Изд-во иностр. лит. 1955, с. 7
3. *Euler L.* De motu rectilineo trium corporum se mutio attrahentium.— Novi Comment. Acad. Sci. Imp. Petrop., 1767, v. 11, p. 144.
4. *Thiele T. N.* Recherches numériques, concernant des solution périodiques d'un cas spécial du problème des trois corp.— Astron. Nachr., 1895, B. 138, S. 1—10.
5. *Levi-Civita T.* Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps.— Acta math., 1906, v. 30, p. 305.
6. *Kustaanheimo P. E.* Spinor regularization of the Kepler motion.— Turun yliopiston julkaisuja, 1964, v. 1, No. 73, p. 7.
7. *Kustaanheimo P., Stiefel E.* Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization.— J. reine und angew. Math., 1965, No. 218, p. 204.
8. *Burdet C. A.* Regularization of the two body problem.— Z. angew. Math. und Phys., 1967, v. 18, No. 3, p. 434.
9. *Giacaglia G. E. O.* Regularization of conservative central fields.— Publs. Astron. Soc. Japan, 1972, v. 24, No. 3, p. 381.
10. *Беленький И. М.* О нормальных конфигурациях консервативных систем.— ПММ, 1972, т. 36, вып. 1, с. 33.
11. *Шарлье К.* Небесная механика. М.: Наука, 1966. 76 с.
12. *Sundman K. F.* Mémoire sur le problème des trois corsp.— Acta math., 1912, B. 36, p. 105.
13. *Сикорский Ю. С.* Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике. М.— Л.: Гостехиздат, 1936.
14. *Szebehely V. G.* Linearization of dynamical systems using integrals of the motion.— Celest. Mech., 1976, v. 14, No. 4.
15. *Брауэр Д., Клеменс Дж.* Методы небесной механики. М.: Мир, 1964. 115 с.
16. *Черный С. Д.* Движение материальной точки под действием силы, сообщающей ей ускорение — $\mu/r^2 - 3\mu'/r^4$.— Бюл. Ин-та теоретической астрономии, 1949, т. 4, № 6, с. 287.
17. *Зоммерфельд А.* Строение атома и спектры. Т. 1. М.: Гостехиздат, 1956. 318 с.
18. *Эйнштейн А.* Объяснение движения перигелия Меркурия в общей теории относительности.— Собр. науч. тр. Т. 1, М.: Наука, 1965. 439 с.
19. *Дубошин Г. Н.* Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука, 1964. 197 с.

Поступила в редакцию
30.VII.1979