Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 1, 1981

УДК 62—50

О ЗАДАЧАХ НАБЛЮДЕНИЯ В ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ

Пшеничный Б.Н., Покотило В.Г.

(Киев)

Рассматриваются вопросы построения информационных областей, совместимых с реализовавшимся сигналом на выходе линейной дискретной системы управления с неопределенными помехами. На основании соотношений двойственности [1—5] и идей динамического программирования [6] получены рекуррентные уравнения, описывающие динамику информационных областей в зависимости от времени и реализовавшегося сигнала. В случае совместных квадратичных ограничений на возмущения в системе из этих уравнений элементарным образом получены уравнения фильтра. Продемонстрированы некоторые возможности такого подхода при рассмотрении нелинейных по наблюдению систем.

1. Постановка задачи и теоремы двойственности. Пусть движение объекта описывается разностным уравнением

$$z_{k+1} = Az_k + v_k, \quad k = 0, 1, \ldots, t-1 \tag{1.1}$$

Здесь z_k — n-мерный вектор, A — постоянная матрица размерности $n \times n$, v_k — возмущение в системе. Предполагается, что наблюдение векторов z_k невозможно и измеряются величины

$$y_k = Bz_k + \xi_k \tag{1.2}$$

где y_k — m-мерный вектор, B — постоянная матрица размерности $m \times n$, ξ_k — возмущение в канале измерения. Начальное условие z_0 и возмущения v_k, ξ_k, $k = 0,1, \ldots, t-1$ неизвестны. Информация о возможных их реализациях исчерпывается описанием допустимых областей их изменения, т. е. включением

$$\{z_0, \bar{v}_t, \bar{\xi}_t\} \in M \tag{1.3}$$

где M — замкнутое, выпуклое множество в $R^{n(t+1)} \times R^{mt}$ и использовано обозначение $\bar{f}_t = \{f_0, f_1, \ldots, f_{t-1}\}$.

Определение [1]. Областью $Z_t(\bar{y}_t^*)$, совместимой с сигналом $\bar{y}_t^*$, будем называть множество тех и только тех векторов $z \in R^n$, для каждого из которых найдется такая тройка $\{z_0^*, \bar{v}_t^*, \bar{\xi}_t^*\} \in M$, что решение $\bar{y}_t$ системы (1.1), (1.2), найденное при $z_0 = z_0^*$, $\bar{v}_t = \bar{v}_t^*$, $\bar{\xi}_t = \bar{\xi}_t^*$, $z_t = z$ будет удовлетворять условию $\bar{y}_t = \bar{y}_t^*$.

Из определения следует, что множество $Z_t(\bar{y}_t^*)$ непустое и лучшей информации об истинном значении вектора z_t, чем описание $Zt(\bar{y}_t^*)$, получить невозможно.

Из линейности системы (1.1), (1.2) и выпуклости M непосредственно вытекает

Лемма 1.1. Множество $Z_t(\bar{y}_t^*)$ выпуклое.

Множество $Z_t(\bar{y}_t)$ однозначно (с точностью до замыкания) определяется своей опорной функцией

$$W_t(\psi \mid \bar{y}_t) = \sup \{\langle \psi, z\rangle : z \in Z_t(\bar{y}_t)\}$$

Следовательно, определение опорной функции области, совместимой с реализовавшимся сигналом $\bar{y}_t$, состоит в решении следующей задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями:

$$\langle \psi, z_t\rangle \to \sup \tag{1.4}$$

при условиях (1.1) — (1.3).

Выписывая лагранжиан этой задачи, получим, что двойственная задача может быть записана в виде

$$\begin{gathered}\sup \Big\{\langle \psi_0, z_0\rangle + \sum_{k=0}^{t-1} (\langle \psi_{k+1}, v_k\rangle + \langle \eta_k, \xi_k\rangle - \\ - \langle \eta_k, y_k\rangle) : \{z_0, \bar{v}_t, \bar{\xi}_t\} \in M\Big\} \to \inf \\ \psi_k = \psi_{k+1}A + \eta_k B, \quad \psi_t = \psi\end{gathered} \tag{1.5}$$

Здесь для простоты записи предполагается, что ψ_k и η_k ($k = 0, 1, \ldots, t-1$) — n- и m-строки соответственно.

При сделанных предположениях справедлива следующая теорема двойственности [5].

Теорема 1.1. Значение верхней грани в задаче (1.4), (1.1) — (1.3) равно нижней грани в двойственной задаче (1.5).

Можно рассмотреть задачу для систем с запаздыванием, когда (1.1) имеет вид

$$z_{k+1} = Az_k + Cz_{k-l} + v_k, \; k = 0, 1, \ldots, t-1 \tag{1.6}$$

и ограничения (1.3) записываются посредством включения

$$\{z_{-l}, \ldots, z_{-1}, z_0, \bar{v}_t, \bar{\xi}_t\} \in M \tag{1.7}$$

Аналогичным образом определяется область $Z_t(\bar{y}_t)$, совместимая с реализовавшимся сигналом $\bar{y}_t$. Определение опорной функции этой области, которая при аналогичных требованиях на M будет выпуклым множеством, сводится к решению задачи (1.4), (1.6), (1.2), (1.7).

Двойственная задача будет иметь вид

$$\begin{gathered}\sup \Big\{\sum_{k=-l}^{-1} \langle \psi_{k+l+1}, Cz_k\rangle + \langle \psi_0, z_0\rangle + \sum_{k=0}^{t-1} (\langle \psi_{k+1}, v_k\rangle + \\ + \langle \eta_k, \xi_k\rangle - \langle \eta_k, y_k\rangle) : \{z_{-l}, \ldots, z_0, \bar{v}_t, \bar{\xi}_t\} \in M\Big\} \to \inf \\ \psi_k = \psi_{k+1}A + \psi_{k+l+1}C + \eta_k B, \quad k = 0, 1, \ldots, t-1 \\ \psi_t = \psi, \quad \psi_{t+1} = \ldots = \psi_{t+l} = 0\end{gathered} \tag{1.8}$$

Соответствующая теорема двойственности формулируется аналогично.

Теорема 1.2. Значение верхней грани в задаче (1.4), (1.6), (1.2), (1.7) и нижней грани в задаче (1.8) совпадают.

Ниже уточняется вид функционалов в (1.5) и (1.8) для ограничений (1.3) и (1.7) конкретных видов, а решение двойственной задачи осуществляется методом динамического программирования. При этом функция Беллмана определяет опорную функцию области, совместимой с реализовавшимся сигналом, и рекуррентные соотношения, определяющие функцию Беллмана, описывают динамику информационных областей.

2. Совместные квадратичные ограничения. Пусть неопределенность в системе (1.1) — (1.3) ограничивается множеством,

$$M = \left\{ \left\{ z_0, \bar v_t, \bar\xi_t \right\} : \langle z_0, z_0 \rangle + \sum_{k=0}^{t-1} \left(\langle v_k, v_k \rangle + \langle \xi_k, \xi_k \rangle \right) \leqslant 1 \right\} \tag{2.1}$$

(M — единичный шар в $R^{n(t+1)} \times R^{mt}$). В этом случае

$$\sup \left\{ \langle \psi_0, z_0 \rangle + \sum_{k=0}^{t-1} \left(\langle \psi_{k+1}, v_k \rangle + \langle \eta_k, \xi_k \rangle \right) : \{ z_0, \bar v_t, \bar\xi_t \} \in M \right\} =$$
$$= \left(\langle \psi_0, \psi_0 \rangle + \sum_{k=0}^{t-1} \left(\langle \psi_{k+1}, \psi_{k+1} \rangle + \langle \eta_k, \eta_k \rangle \right) \right)^{1/2}$$

Если ввести дополнительную переменную (ζ_k), то задача (1.5) запишется в виде

$$\begin{aligned} &(\langle \psi_0, \psi_0 \rangle + \zeta_0)^{1/2} - \sum_{k=0}^{t-1} \langle \eta_k, y_k \rangle \to \inf \\ &\psi_k = \psi_{k+1} A + \eta_k B \\ &\zeta_k = \zeta_{k+1} + \langle \psi_{k+1}, \psi_{k+1} \rangle + \langle \eta_k, \eta_k \rangle, \ k = 0, \ldots, t-1 \\ &\psi_t = \psi, \ \zeta_t = 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Уравнение Беллмана и граничное условие для задачи (2.2) будет иметь вид [6]

$$\begin{aligned} \Omega_k(\psi, \zeta) = \inf_\eta \{ &\Omega_{k-1} (\psi A + \eta B, \ \zeta + \langle \psi, \psi \rangle + \langle \eta, \eta \rangle) - \\ &- \langle \eta, y_{k-1} \rangle \}, \ \Omega_0(\psi, \zeta) = (\langle \psi, \psi \rangle + \zeta)^{1/2} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Если никакой дополнительной информации о неопределенных помехах по ходу процесса не поступает, то в соответствии с теоремой 1.1 опорная функция области Z_t $(\bar y_t)$ совпадает с Ω_t $(\psi, 0)$ и соотношения (2.3) определяют динамику во времени информационных областей.

Приведем без доказательства следующее утверждение.

Лемма 2.1. Пусть даны скаляр $a \geqslant 0$, векторы b, c и положительно определенная матрица R, такие, что $1 - \langle b, R^{-1} b \rangle \geqslant 0$ и $a - \langle c, R^{-1} c \rangle \geqslant 0$. Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} \inf_\eta \{ (a + 2\langle c, \eta \rangle + \langle \eta, R\eta \rangle)^{1/2} - \langle \eta, b \rangle \} = \langle b, R^{-1} c \rangle + \\ + (1 - \langle b, R^{-1} b \rangle)^{1/2} (a - \langle c, R^{-1} c \rangle)^{1/2} \end{aligned} \tag{2.4}$$

(Если $1 - \langle b, R^{-1} b \rangle = 0$, то нижняя грань в (2.4) не достигается.)

Теорема 2.1. Если неопределенные возмущения в (1.1), (1.2) задаются совместными квадратичными ограничениями (2.1), то область Z_k $(\bar y_k)$ представляет собой эллипсоид с опорной функцией

$$W_k (\psi \mid \bar y_k) = \langle z_k^\circ, \psi \rangle + \varepsilon_k \langle \psi, P_k \psi \rangle^{1/2}, \ k = 0, \ldots, t \tag{2.5}$$

При этом параметры эллипсоида удовлетворяют следующим разностным уравнениям с начальными условиями:

$$z_k^\circ = Az_{k-1}^\circ + (y_{k-1} - Bz_{k-1}^\circ)\, R_{k-1}^{-1}BP_{k-1}A^* \tag{2.6}$$
$$P_k = I + AP_{k-1}A^* - AP_{k-1}B^*R_{k-1}^{-1}BP_{k-1}A^*$$
$$\varepsilon_k^2 = \varepsilon_{k-1}^2 - \langle (y_{k-1} - Bz_{k-1}^\circ),\ R_{k-1}^{-1}(y_{k-1} - Bz_{k-1}^\circ)\rangle$$

$$z_0^\circ = 0,\ P_0 = I,\ \varepsilon_0 = 1 \tag{2.7}$$

Здесь через I обозначена единичная матрица и $R_k = I + BP_kB^*$. (Матрица R_k не особая, так как без ограничения общности можно считать, что строки матрицы B линейно-независимы.)

Доказательство. Покажем по индукции, что функция

$$\Omega_k(\psi, \zeta) = \langle z_k^\circ, \psi\rangle + \varepsilon_k(\zeta + \langle\psi, P_k\psi\rangle)^{1/2}$$

где z_k°, P_k и ε_k удовлетворяют уравнениям (2.6), является решением задачи (2.3). Действительно

$$\Omega_0(\psi, \zeta) = \langle z_0^\circ, \psi\rangle + \varepsilon_0(\zeta + \langle\psi, P_0\psi\rangle)^{1/2} = (\zeta + \langle\psi, \psi\rangle)^{1/2}$$

Пусть далее

$$\Omega_{k-1}(\psi, \zeta) = \langle z_{k-1}^\circ, \psi\rangle + \varepsilon_{k-1}(\zeta + \langle\psi, P_{k-1}\psi\rangle)^{1/2}$$

Тогда

$$\Omega_k(\psi, \zeta) = \inf_\eta \{\langle z_{k-1}^\circ, \psi A + \eta B\rangle + \varepsilon_{k-1}(\zeta + \langle\psi, \psi\rangle + \langle\eta, \eta\rangle + \langle(\psi A + \eta B), P_{k-1}(\psi A + \eta B)\rangle)^{1/2} - \langle\eta, y_{k-1}\rangle\} =$$
$$= \langle Az_{k-1}^\circ, \psi\rangle + \varepsilon_{k-1}\inf_\eta\{(a + 2\langle c, \eta\rangle + \langle\eta, R_{k-1}\eta\rangle)^{1/2} - \langle\eta, b\rangle\}$$
$$a = \zeta + \langle\psi, (I + AP_{k-1}A^*)\psi\rangle,\quad c = \psi AP_{k-1}B^*$$
$$R_{k-1} = I + BP_{k-1}B^*,\quad b = \varepsilon_{k-1}^{-1}(y_{k-1} - Bz_{k-1}^\circ)$$

Можно показать, что для таким образом определенных a, b, c и R_{k-1} выполнены условия леммы 2.1 и, следовательно

$$\Omega_k(\psi, \zeta) = \langle Az_{k-1}^\circ, \psi\rangle + \varepsilon_{k-1}\langle b, R_{k-1}^{-1}c\rangle + \varepsilon_{k-1}(1 - \langle b, R_{k-1}^{-1}b\rangle)^{1/2}(a - \langle c, R_{k-1}^{-1}c\rangle)^{1/2} = \langle z_k^\circ, \psi\rangle + \varepsilon_k(\zeta + \langle\psi, P_k\psi\rangle)^{1/2}$$

где z_k°, P_k, ε_k удовлетворяют соотношениям (2.6).

Перейдем к решению задачи (1.8). Предположим, что $l = 1$, $z_{-1} = 0$, $\{z_0, \bar v_t, \bar\xi_t\} \in M$, M определяется (2.1).

Тогда

$$\sup\left\{\sum_{k=-l}^{-1}\langle\psi_{k+l+1}, Cz_k\rangle + \langle\psi_0, z_0\rangle + \sum_{k=0}^{t-1}(\langle\psi_{k+1}, v_k\rangle + \langle\eta_k, \xi_k\rangle) : z_{-1} = 0,\quad \{z_0, \bar v_t, \bar\xi_t\} \in M\right\} =$$
$$= \left(\langle\psi_0, \psi_0\rangle + \sum_{k=0}^{t-1}(\langle\psi_{k+1}, \psi_{k+1}\rangle + \langle\eta_k, \eta_k\rangle)\right)^{1/2}$$

Вводя дополнительную скалярную переменную ζ_k, приходим к задаче, аналогичной (2.2), где уравнение сопряженной системы и недостающие граничные условия берутся из (1.8).

Для решения этой задачи методом динамического программирования воспользуемся идеями Н. Н. Красовского [7].

Если $\Omega_k(\psi, \chi, \zeta)$ — функция Беллмана для этой задачи, то уравнение динамического программирования принимает вид

$$(2.8)\qquad \begin{aligned} &\Omega_{k+1}(\psi, \chi, \zeta) = \inf_{\eta} \{\Omega_k(\psi A + \eta B + \chi C, \psi, \zeta + \langle\psi, \psi\rangle + \\ &+ \langle\eta, \eta\rangle) - \langle\eta, y_k\rangle\},\ k = 0, 1, \ldots, t-1 \\ &\Omega_0(\psi; \chi, \zeta) = (\zeta + \langle\psi, \psi\rangle)^{1/2} \end{aligned}$$

Используя лемму 2.1, можно показать по индукции, что функция

$$\begin{aligned} &\Omega_k(\psi, \chi, \zeta) = \langle z_k^\circ, \psi\rangle + \langle x_k^\circ, \chi\rangle + \varepsilon_k(\zeta + \langle\psi, P_k\psi\rangle + \\ &+ \langle\chi, Q_k\chi\rangle + \langle\psi, S_k\chi\rangle + \langle\chi, S_k^*\psi\rangle)^{1/2},\ k = 0, 1, \ldots, t \end{aligned}$$

является решением уравнений (2.8) в случае если z_k°, x_k°, P_k, Q_k, S_k, ε_k удовлетворяют следующим соотношениям:

$$(2.9)\qquad \begin{aligned} &z_{k+1}^\circ = Az_k^\circ + x_k^\circ + (y_k - Bz_k^\circ)R_k^{-1}B(S_k + P_kA^*) \\ &x_{k+1}^\circ = Cz_k^\circ + (y_k - Bz_k^\circ)R_k^{-1}BP_kC^* \\ &P_{k+1} = I + Q_k + AP_kA^* + AS_k + S_k^*A^* - (AP_k + S_k^*)\times \\ &\times B^*R_k^{-1}B(S_k + P_kA^*) \\ &Q_{k+1} = CP_kC^* - CP_kB^*R_k^{-1}BP_kC^* \\ &S_{k+1} = (AP_k + S_k^*)(I - B^*R_k^{-1}BP_k)C^* \end{aligned}$$

С начальными условиями

$$(2.10)\qquad z_0^\circ = x_0^\circ = 0,\ P_0 = I,\ Q_0 = 0,\ S_0 = 0,\ \varepsilon_0 = 1$$

Здесь, как и выше, $R_k = I + BP_kB^*$ и ε_k определяется последним из соотношений (2.6).

Если дополнительной информации о реализации возмущений по ходу процесса не поступает, то в силу граничных условий из (1.8) и (2.2)

$$(2.11)\qquad W_k(\psi \mid \bar{y}_k) = \Omega_k(\psi, 0, 0)$$

Следовательно, справедлива

Теорема 2.2. Если неопределенные возмущения в системе (1.8), (1.2) задаются совместными квадратичными ограничениями (2.1), то область $Z_k(\bar{y}_k)$ — эллипсоид с опорной функцией

$$W_k(\psi \mid \bar{y}_k) = \langle z_k^\circ, \psi\rangle + \varepsilon_k\langle\psi, P_k\psi\rangle^{1/2},\quad k = 0, 1, \ldots, t$$

причем параметры эллипсоида удовлетворяют уравнениям (2.9), (2.10).

3. Геометрические ограничения. Предположим теперь, что множество M в (1.3) определено следующим образом:

$$(3.1)\qquad \begin{aligned} &M = \{\{z_0, \bar{v}_t, \bar{\xi}_t\} : z_0 \in Z^0,\ v_k \in V,\ \xi_k \in \Xi \\ &k = 0, \ldots, t-1\} \end{aligned}$$

где Z°, V и Ξ — выпуклые, замкнутые множества в R^n и R^m соответственно.

В этом случае информационные области $Z_k(\bar{y}_k)$ не обладают такой регулярной структурой, как при условии совместных квадратичных ограничений на возмущения, и получение уравнений фильтрации вида (2.6), (2.7) затруднительно. При таких условиях удобны разностные уравнения, описывающие динамику информационных областей.

С учетом (3.1) получаем

$$\sup\left\{\langle\psi_0, z_0\rangle + \sum_{k=0}^{t-1}(\langle\psi_{k+1}, v_k\rangle + \langle\eta_k, \xi_k\rangle) : \{z_0, \bar{v}_t, \bar{\xi}_t\} \in M\right\} =$$
$$= W(\psi_0 \mid Z^\circ) + \sum_{k=0}^{t-1}(W(\psi_{k+1} \mid V) + W(\eta_k \mid \Xi))$$

где $W(\cdot \mid Z^\circ)$, $W(\cdot \mid V)$ и $W(\cdot \mid \Xi)$ — опорные функции множеств Z°, V и Ξ соответственно.

Поэтому из уравнений метода динамического программирования для задачи (1.5) вытекает

Теорема 3.1. Пусть $Z_k(\bar{y}_k)$ — область, совместимая с реализовавшимся сигналом $\bar{y}_k$. Тогда опорная функция множества $Z_k(\bar{y}_k)$ удовлетворяет рекуррентному уравнению

$$W_{k+1}(\psi \mid \bar{y}_{k+1}) = \inf_{\eta}\{W_k(\psi A + \eta B \mid \bar{y}_k) + W(\eta \mid \Xi) - \langle\eta, y_k\rangle\} + W(\psi \mid V), \quad k = 0, \ldots, t-1 \tag{3.2}$$

$$W_0(\psi \mid \bar{y}_0) = W(\psi \mid Z^\circ) \tag{3.3}$$

С применением несколько других методов эта теорема доказана в [8]

Пример 3.1. Пусть $V = \{0\}$, $\Xi = \{0\}$, $Z^\circ = R^n$. Уравнение (3.2) в этом случае принимает вид

$$W_{k+1}(\psi \mid \bar{y}_{k+1}) = \inf_{\eta}\{W_k(\psi A + \eta B \mid \bar{y}_k) - \langle\eta, y_k\rangle\}$$

Отсюда с учетом (3.3) получаем, что

$$W_t(\psi \mid \bar{y}_t) = \begin{cases} \langle\psi, A^t z_0\rangle, & \text{если } \exists\bar{\eta}_t : \psi A + \eta_0 B + \ldots + \eta_{t-1} B A^{t-1} = 0 \\ +\infty & \text{в противном случае} \end{cases} \tag{3.4}$$

Из (3.4) следует, в частности, известный критерий наблюдаемости

$$\mathrm{Rg}\,\| B^*,\ A^*B^*, \ldots,\ A^{*n-1}B^* \| = n$$

($*$ означает транспонирование матрицы).

Пример 3.2. Пусть $B = I$, $Z^\circ = R^n$, матрица A невырождена и возмущение присутствует только в уравнении измерения.

Тогда

$$W_{k+1}(\psi \mid \bar{y}_{k+1}) = \inf_{\eta}\{W_k(\psi A + \eta \mid \bar{y}_k) + W(\eta \mid \Xi) - \langle\eta, y_k\rangle\}$$

Поэтому справедлива оценка

$$W_k(\psi \mid \bar{y}_k) \leqslant \Lambda_k(\psi \mid \bar{y}_k) = \min_{1 \leqslant i \leqslant k}\{\langle A^i y_{k-i}, \psi\rangle + W(-\psi A^i \mid \Xi)\}$$

Более того, имеет место равенство

$$W_k(\psi \mid \bar{y}_k) = \Lambda_k^{**}(\psi \mid \bar{y}_k) \tag{3.5}$$

в правой части которого — вторая сопряженная функция [9].

Рассмотрим нелинейную систему

$$z_{k+1} = f(z_k, v_k), \quad y_k = g(z_k, \xi_k), \quad k = 0, \ldots, t-1 \tag{3.6}$$

Возмущения $\{z_0, \bar{v}_t, \bar{\xi}_t\}$ по-прежнему удовлетворяют геометрическим ограничениям (3.1).

Теорема 3.2. Пусть $Z_k(\bar{y}_k)$ — область, совместимая с реализовавшимся сигналом в системе (3.6). Тогда справедливо соотношение

$$Z_k(\bar{y}_k) = f(Z_{k-1}(\bar{y}_{k-1}) \cap \Phi(y_{k-1}), V) \tag{3.7}$$
$$\Phi(y) = \{z : \exists \xi \in \Xi,\ g(z, \xi) = y\}$$

Доказательство теоремы просто следует из определения $Z_k(\bar{y}_k)$.

В [8] аналогичное утверждение сформулировано для случая линейных систем.

Из теоремы 3.2 следует, что соотношение (3.2) можно рассматривать как применение операции инфимальной конволюции [9] к опорным функциям соответствующих множеств при линейных $f(\cdot, \cdot)$ и $g(\cdot, \cdot)$. Соотношение (3.7) открывает, таким образом, некоторые возможности для анализа информационных областей в случае нелинейных систем.

Предположим, что функция $f(z, v)$ линейна, множество $\Phi(y)$ выпуклое и замкнутое для любых допустимых y, а Z° ограничено. Пусть $W_k(\cdot \mid \bar{y}_k)$, $k = 0, \ldots, t$ и $W(\cdot \mid \Phi(y))$ — опорные функции множеств $Z_k(\bar{y}_k)$ и $\Phi(y)$ соответственно.

Тогда из (3.7) следует

Теорема 3.3. Опорные функции областей $Z_k(\bar{y}_k)$, совместимых с сигналом $\bar{y}_k$ в (1.1), (3.6), (3.1), удовлетворяют рекуррентному уравнению

$$\begin{aligned} W_{k+1}(\psi \mid \bar{y}_{k+1}) = W(\psi \mid V) + \inf_{\chi} \{W_k(\psi A + \chi \mid \bar{y}_k) + \\ + W(-\chi \mid \Phi(y_k))\} \end{aligned} \tag{3.8}$$

с начальным условием (3.3).

Если выполнены предположения примера 3.2, то

$$W_k(\psi \mid \bar{y}_k) \leqslant \Lambda_k(\psi \mid \bar{y}_k) = \min \{W(\psi A^{k-i} \mid \Phi(y_i)) : 0 \leqslant i \leqslant k - 1\}$$

Можно показать, что аналогично (3.5)

$$W_k(\psi \mid \bar{y}_k) = \Lambda_k^{**}(\psi \mid \bar{y}_k)$$

(Требование невырожденности матрицы A можно устранить рассматривая соответствующие функции на подпространстве, порожденном линейно-независимыми строками матрицы A.)

Пример 3.3. Пусть $g(z, \xi) = z + |z|\,\xi$, $|\xi| \leqslant 1$. Тогда $\Phi(y) = \{z : \langle z, y\rangle \geqslant \geqslant {}^1/_2 |y|^2\}$ и

$$W(\psi \mid \Phi(y)) = \begin{cases} {}^1/_2\alpha |y|^2, & \text{если } \psi = \alpha y,\ \alpha \geqslant 0 \\ +\infty & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Следовательно, уравнение (3.8) можно записать в виде

$$W_k(\psi \mid \bar{y}_k) = W(\psi \mid V) + \inf_{\alpha \geqslant 0} \{W_{k-1}(\psi A + \alpha y_{k-1} \mid \bar{y}_{k-1}) - {}^1/_2\,\alpha\, |y_{k-1}|^2\}$$

Задача определения $W_k(\psi \mid \bar{y}_k)$ сводится в этом случае к решению k задач одномерной оптимизации.

Авторы благодарят А. Б. Куржанского за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
2. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968. 475 с.

3. *Ананьев Б. И.* О двойственности задач оптимального наблюдения и управления для систем с запаздыванием.— Дифференц. уравнения, 1974, 10, № 7, с. 1160.
4. *Bertsekas D. P.*, *Rhodes I. B.* Recursive State Estimation for a Set-membership Description of Uncertainty.— IEEE Trans. Automat. Control, 1971, v. AC-16, No. 2, p. 117.
5. *Гольштейн Е. Г.* Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971. 351 с.
6. *Беллман Р.*, *Калаба Р.* Динамическое программирование и современная теория управления. М.: Наука, 1969. 118 с.
7. *Красовский Н. Н.* Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системе с запаздыванием времени.— ПММ, 1962, 26, вып. 1, с. 39.
8. *Кац И. Я.*, *Куржанский А. Б.* Минимаксная многошаговая фильтрация в статистически неопределенных ситуациях.— Автоматика и телемеханика, 1978, № 11, с. 79.
9. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.

Поступила в редакцию
23.V.1980