

УДК 531.36

О ТОЧКАХ ЛИБРАЦИИ ВБЛИЗИ ГРАВИТИРУЮЩЕГО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТРЕХОСНОГО ЭЛЛИПСОИДА

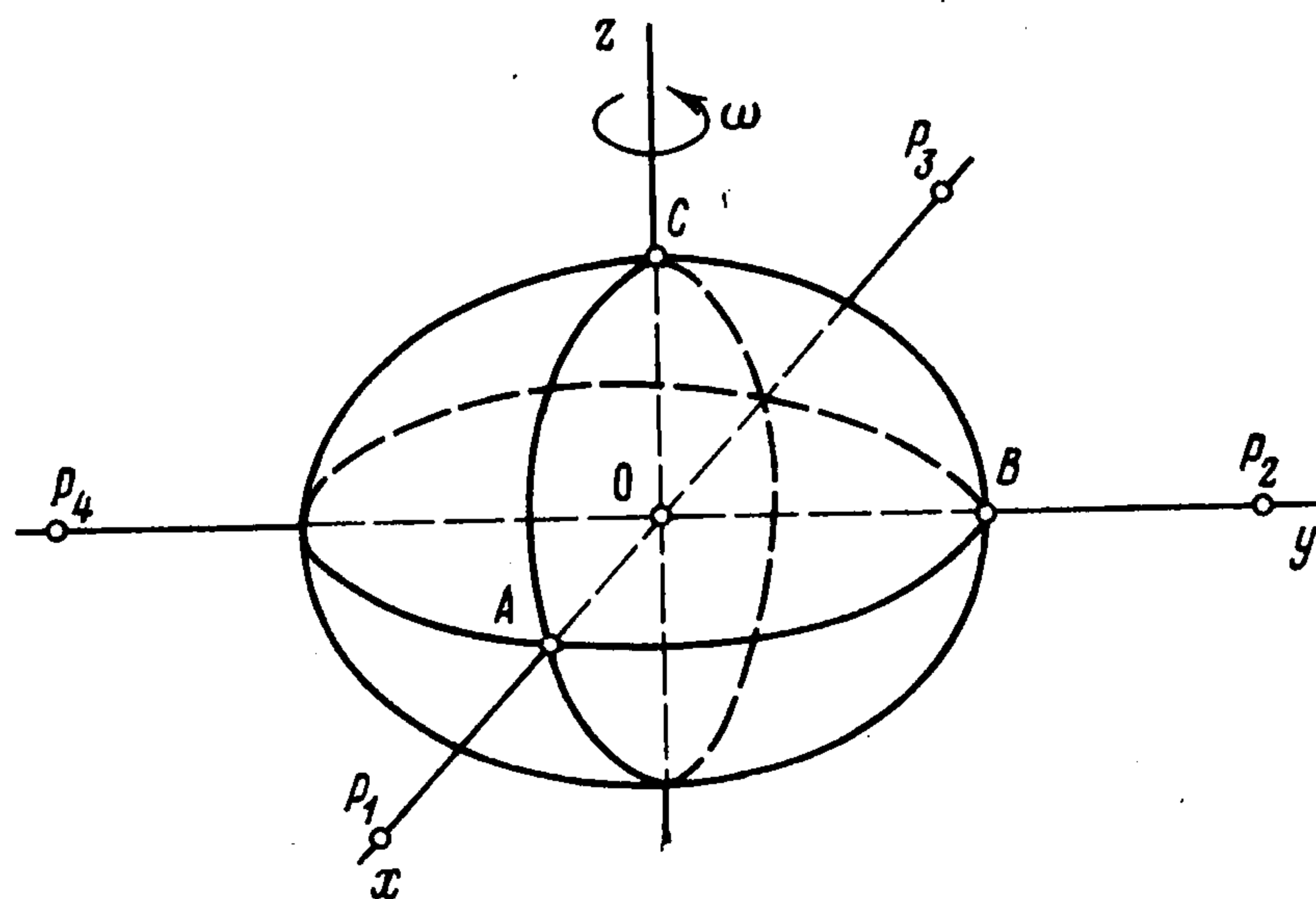
Косенко И. И.

(Москва)

Рассматривается задача о движении пассивно гравитирующей точки вблизи положений относительного равновесия около равномерно вращающегося эллипсоида с произвольными длинами главных полуосей. Подбирается система параметров, определяющих задачу, в которой исследуется область выполнения необходимых условий устойчивости. На основании проведенного анализа геометрической структуры области выявляются некоторые качественные свойства рассматриваемой механической системы.

Задача о движении спутника в окрестности положения относительного равновесия вблизи вращающейся планеты, имеющей форму трехосного эллипсоида, в линейной постановке рассматривалась в [1] и в нелинейной — в [2—4]. Эллипсоид предполагался близким по форме к шару, что соответствует реальным планетам. Однако существуют объекты, имеющие ярко выраженную эллипсоидальную форму (например, эллиптические галактики), поэтому представляет определенный интерес задача о движении спутника в окрестности точек либрации вращающегося эллипсоида с произвольными значениями длин главных полуосей. Кроме того, исследование проблемы в общей постановке позволяет достаточно быстро получить качественные выводы о механических свойствах движения для планеты, близкой по форме к шару.

1. Постановка задачи. Предполагается, что однородный эллипсоид массы M с главными полуосями OA , OB , OC , имеющими длины a , b , c



Фиг. 1

соответственно (фиг. 1), равномерно вращается вокруг оси OC с угловой скоростью ω . Выберем систему координат с осями Ox , Oy , Oz , направленными на A , B , C соответственно.

Характерную длину l введем соотношениями $a = l\alpha$, $b = l\beta$, $c = l\gamma$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Тройка (α, β, γ) задает изображающую точку на

сферическом треугольнике S_+^2 , определенном неравенствами $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$. За характерное время возьмем период вращения эллипсоида вокруг своей оси и введем безразмерные переменные по формулам

$$t = \tau / \omega, \quad x = lq_1, \quad y = lq_2, \quad z = lq_3$$

Пространство параметров задачи можно определить как множество пар

$$\Pi^3 = \{(s, \rho)\}, \quad s \in S_+^2, \quad \rho \in \mathbf{R}_+^1 = \{\rho : \rho > 0\}$$

$$\rho = 3fM / (4\omega^2 l^3)$$

Его естественно отождествить с \mathbf{R}_+^3 -октантом в \mathbf{R}^3

$$\mathbf{R}_+^3 = \{(s_1, s_2, s_3) : s_1 = \rho\alpha, s_2 = \rho\beta, s_3 = \rho\gamma\}$$

С помощью преобразования Лежандра перейдем к фазовым каноническим переменным (p_1, p_2, p_3) . В результате получим систему уравнений Гамильтона

$$q_i \dot{=} \partial H / \partial p_i, \quad p_i \dot{=} -\partial H / \partial q_i, \quad i = 1, 2, 3$$

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + (p_1 q_2 - p_2 q_1) -$$

$$-\rho \int_{\mu}^{\infty} \left(1 - \frac{q_1^2}{\alpha^2 + u} - \frac{q_2^2}{\beta^2 + u} - \frac{q_3^2}{\gamma^2 + u}\right) \frac{du}{S(u)}$$

$$S(u) = [(\alpha^2 + u)(\beta^2 + u)(\gamma^2 + u)]^{1/2}, \quad q_1^2 / (\alpha^2 + \mu) +$$

$$+ q_2^2 / (\beta^2 + \mu) + q_3^2 / (\gamma^2 + \mu) = 1$$

2. Точки либрации. Из соотношений

$$\frac{\partial H}{\partial p_3} = p_3 = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial q_3} = 2\rho q_3 F(\mu, \gamma^2), \quad F(\mu, \gamma^2) = \int_{\mu}^{+\infty} \frac{du}{(\gamma^2 + u)S(u)}$$

следует, что точки либрации должны лежать в плоскости экватора $q_3 = 0$, так как $F(\mu, \gamma^2) > 0$ всегда в Π^3 и близость к сфере, требуемая в [5], не нужна. Остальные уравнения равновесия рассмотрим уже при условии $q_3 = p_3 = 0$:

$$\partial H / \partial p_1 = p_1 + q_2 = 0, \quad \partial H / \partial p_2 = p_2 - q_1 = 0$$

$$\partial H / \partial q_1 = -p_2 + 2\rho q_1 F(\mu, \alpha^2) = 0, \quad \partial H / \partial q_2 = p_1 +$$

$$+ 2\rho q_2 F(\mu, \beta^2) = 0$$

$$q_1^2 / (\alpha^2 + \mu) + q_2^2 / (\beta^2 + \mu) = 1$$

При $\alpha \neq \beta$ возможны две комбинации решений (случай $q_1 = q_2 = 0$, соответствует точке в центре эллипсоида и поэтому отбрасывается). Координаты точек либрации удовлетворяют уравнениям

$$q_1 [1 - 2\rho F(\mu, \alpha^2)] = 0, \quad q_2 [1 - 2\rho F(\mu, \beta^2)] = 0$$

Отсюда

$$q_1 = 0, \quad 1 - 2\rho F(q_2^2 - \beta^2, \beta^2) = 0; \quad q_1 = 0, \quad q_2 = \pm q_2^{\circ}$$

$$q_2 = 0, \quad 1 - 2\rho F(q_1^2 - \alpha^2, \alpha^2) = 0; \quad q_1 = \pm q_1^{\circ}, \quad q_2 = 0$$

При $\alpha = \beta$ планета становится эллипсоидом вращения, положения равновесия не изолированы и расположены на окружности $q_1^2 + q_2^2 = \alpha^2$,

где μ удовлетворяет уравнению

$$1 - 2\rho \int_{\mu}^{+\infty} \frac{du}{(\alpha^2 + u)(\gamma^2 + u)^{1/2}} = 0$$

причем интеграл вычисляется в конечном виде через элементарные функции.

В силу симметрии задачи можно ограничиться изучением только точки либрации $P_1 : q_1 = q_1^\circ, q_2 = q_2^\circ = 0, q_3 = q_3^\circ = 0$. Условие ее существования есть условие разрешимости уравнения

$$(2.1) \quad 1 - 2\rho F(\mu, \alpha^2) = 0$$

относительно μ при $\mu > 0$. Оно выражается неравенством $2\rho F(\mu, \alpha^2) > 1$, определяющим в $\Pi^3 = \mathbf{R}_+^3$ подмножество допустимых параметров, при которых возможно существование точки P_1 .

3. Область устойчивости. Для локального исследования в окрестности точки P_1 перейдем к новым фазовым переменным контактным преобразованием $(q, p) \rightarrow (q', p')$ с производящей функцией

$$U = \sum_{j=1}^3 (q_j - q_j^\circ)(p_j' + p_j^\circ), \quad p_1^\circ = 0, \quad p_2^\circ = q_1^\circ, \quad p_3^\circ = 0$$

откуда

$$q_i' = \partial U / \partial p_i' = q_i - q_i^\circ, \quad p_i = \partial U / \partial q_i = p_i' + p_i^\circ, \quad i = 1, 2, 3$$

Рассматривая (2.1) как уравнение относительно ρ , позволяющее выразить его относительно новой системы параметров $(v, \alpha, \beta, \gamma)$, получим отображение

$$(v, \alpha, \beta, \gamma) \xrightarrow{d} (\rho, \alpha, \beta, \gamma), \quad \rho^{-1} = 2F(v, \alpha^2)$$

диффеоморфно переводящее \mathbf{R}_+^3 на область допустимых значений параметров. Таким образом, для $(v, \alpha, \beta, \gamma)$ допустимы все точки из \mathbf{R}_+^3 . При этом вдоль луча, определяемого точкой (α, β, γ) на S_+^2 , с ростом v от нуля до $+\infty$ величина ρ также монотонно растет от $\rho_0 = [2F(0, \alpha^2)]^{-1}$ до $+\infty$. Система параметров $(v, \alpha, \beta, \gamma)$ удобна, например, тем, что все выражения для коэффициентов степенного разложения H в окрестности точки P_1 — явные функции достаточно простой структуры.

В результате проведения значительных по объему аналитических вычислений получены члены второй степени по фазовым переменным (q', p') , входящие в степенной ряд для гамильтониана. В сумме они дают квадратичную форму

$$H_2 = \frac{1}{2} p_1'^2 + \frac{1}{2} p_2'^2 + \frac{1}{2} p_3'^2 + p_1' q_2' - p_2' q_1' - \frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2\varphi_1} q_1'^2 + \frac{\varphi_2}{2\varphi_1} q_2'^2 + \frac{\varphi_3}{2\varphi_1} q_3'^2$$

Здесь

$$(3.1) \quad \varphi_1 = F(v, \alpha^2), \quad \varphi_2 = F(v, \beta^2), \quad \varphi_3 = F(v, \gamma^2)$$

Характеристическое уравнение системы первого приближения имеет вид

$$[\lambda^4 + \lambda^2(2\varphi_1 - \varphi_3) / \varphi_1 + (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) (\varphi_1 - \varphi_2) / \varphi_1^2](\lambda^2 + \varphi_3 / \varphi_1) = 0$$

По координате q_3' в линейном приближении спутник совершает нормальные колебания с частотой $(\varphi_3 / \varphi_1)^{1/2}$ (это видно уже из выражения для H_2). Чтобы корни биквадратного характеристического уравнения плоского движения были чисто мнимыми и различными, необходимо и достаточно выполнение условий, обеспечивающих возможность линейной нормализации

$$\left(\frac{\varphi_3}{2\varphi_1} + \frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)^2 - 2\frac{\varphi_3}{\varphi_1} > 0, \quad \frac{\varphi_3}{2\varphi_1} < 1$$

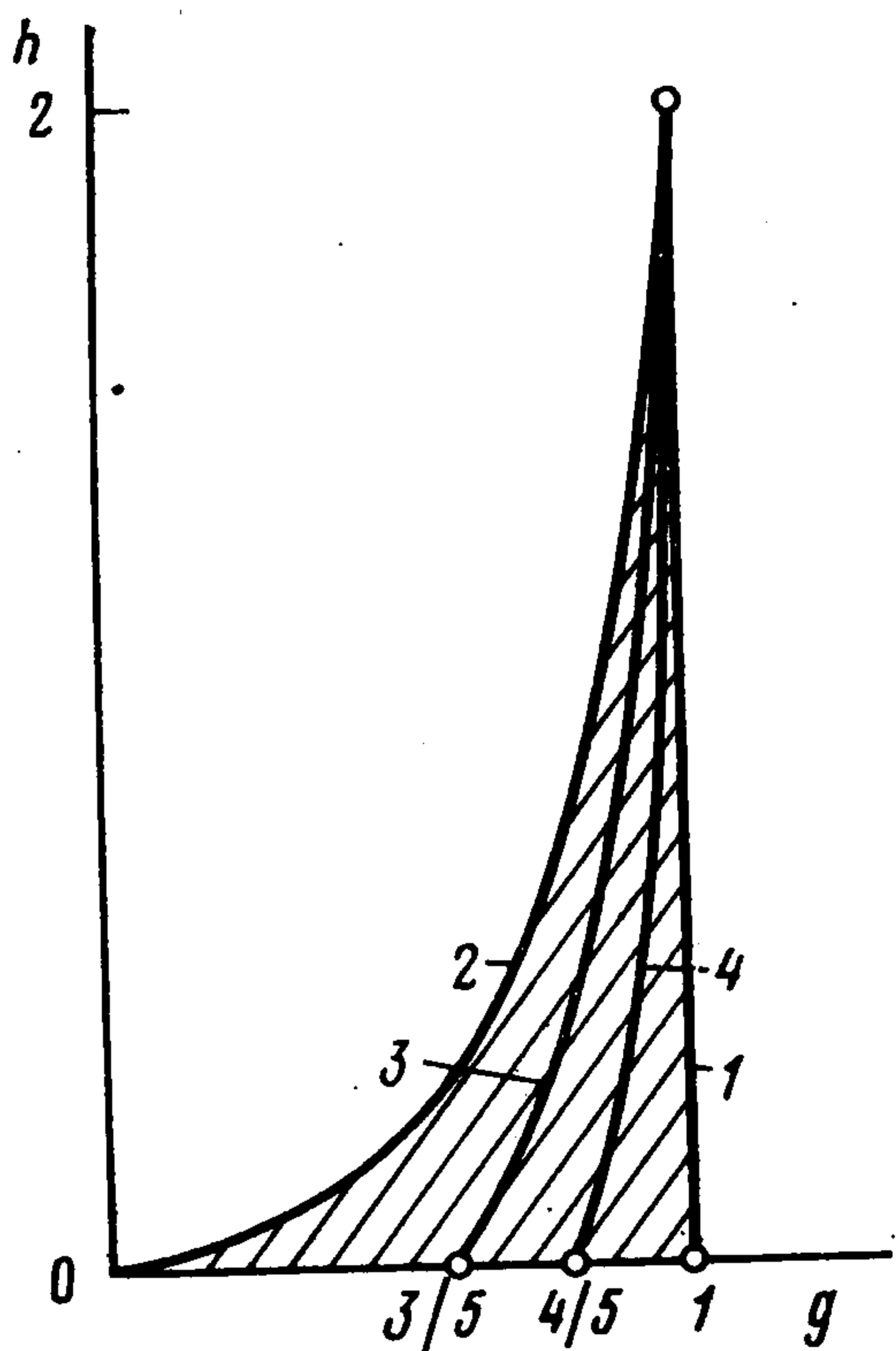
$$1 + \frac{\varphi_3}{\varphi_1} > \left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)^2 + \left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)\left(\frac{\varphi_3}{\varphi_1}\right)$$

Получена последовательность отображений

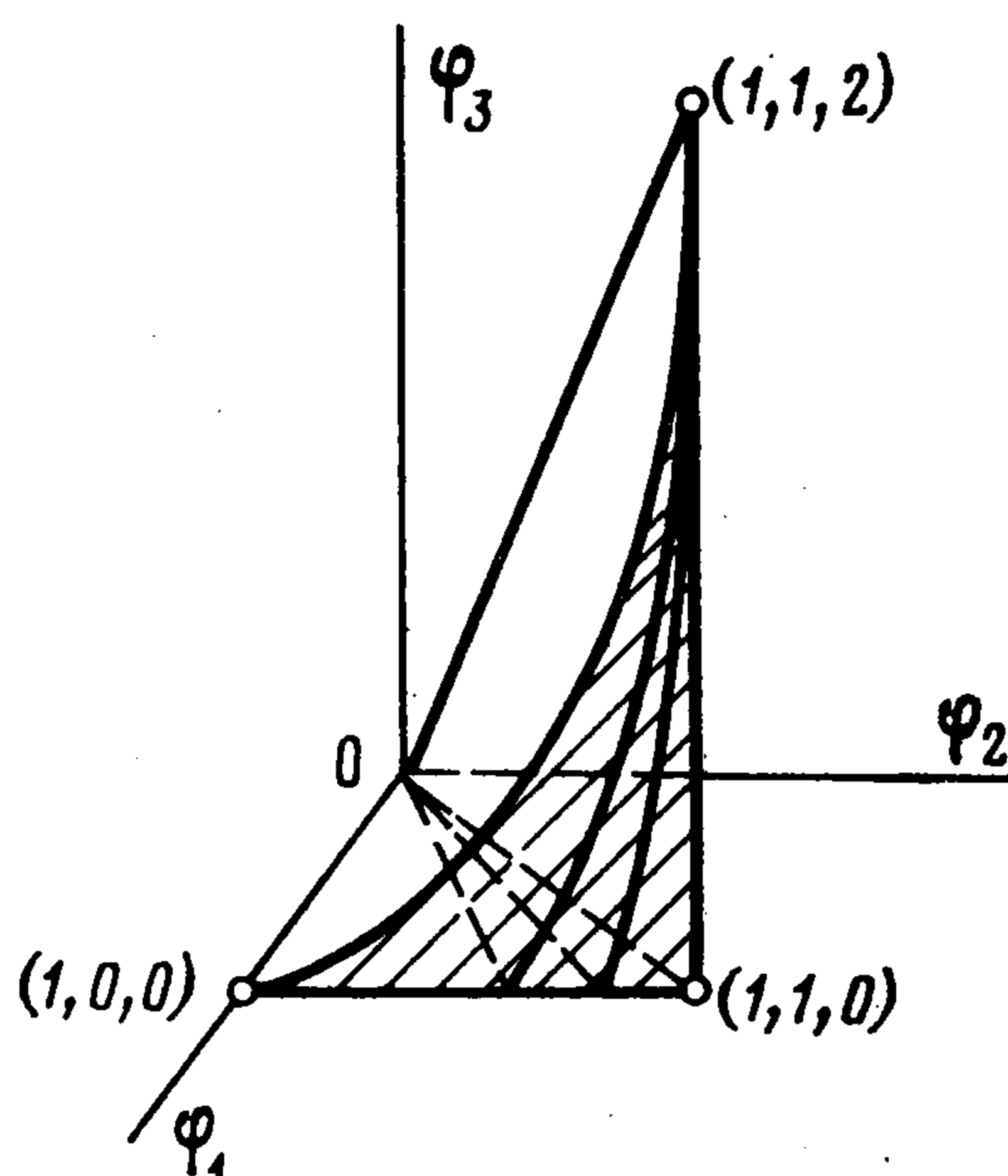
$$\mathbf{R}_+^3 \xrightarrow{\varphi} \mathbf{R}_+^3 \xrightarrow{\pi} \mathbf{R}^2$$

$$\varphi(v, \alpha, \beta, \gamma) = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbf{R}_+^3, \quad \pi(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = (\varphi_2 / \varphi_1, \varphi_3 / \varphi_1) \in \mathbf{R}^2$$

Обозначая $\varphi_2 / \varphi_1 = g$, $\varphi_3 / \varphi_1 = h$, видим, что H_2 , а значит, и система первого приближения, зависит лишь от двух параметров g, h . Заметим



Фиг. 2



Фиг. 3

также, что $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ — однородные координаты точки в пространстве параметров (g, h) , а π — отображение центрального проектирования с центром в начале на плоскость $\varphi_1 = 1$.

Условия устойчивости имеют в новой системе параметров вид

$$(h/2 + g)^2 - 2h > 0, \quad h < 2, \quad h(g-1) < (1-g)(1+g)$$

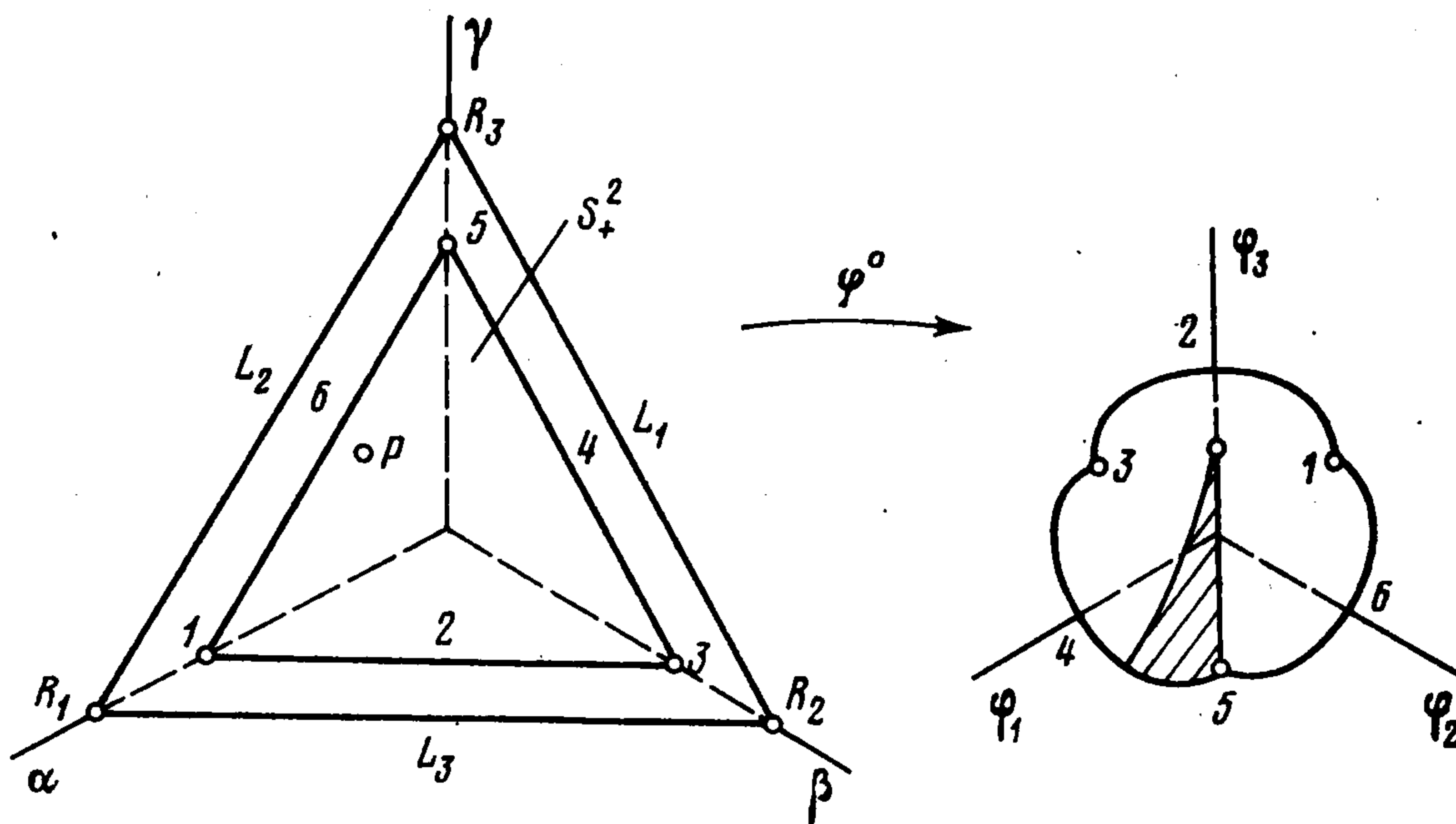
В силу $g > 0, h > 0$ последнее неравенство эквивалентно условию $g < 1$.

Частоты нормальных колебаний

$$\omega_{1,2} = \{1 - h/2 \pm [(h/2 + g)^2 - 2h]^{1/2}\}^{1/2}, \quad 0 < \omega_2 < \omega_1$$

Полученная область устойчивости изображена на фиг. 2. Там же показаны резонансные кривые для резонансов первого, второго, третьего и четвертого порядков (кривые 1—4 соответственно).

4. Теорема о свойстве устойчивости. Область, заштрихованную на фиг. 2, обозначим через S . Это будет сечение конуса $\pi^{-1}(S)$ плоскостью $\varphi_1 = 1$ в пространстве $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$; вершина конуса в начале координат. В параметрах $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ область устойчивости показана на фиг. 3. Резонансные множества — это куски конических поверхностей, проходящие



Фиг. 4

через соответствующие кривые в сечении $\varphi_1 = 1$ и начало координат. Представляет интерес не весь указанный конус, а лишь множество $\Sigma = \pi^{-1}(S) \cap \varphi(\mathbf{R}_+^3)$, которое в точности соответствует области устойчивости $\varphi^{-1}(\Sigma)$ в исходной системе параметров $(v, \alpha, \beta, \gamma)$.

Чтобы выяснить структуру множества Σ , нужно подробнее изучить свойства отображения $\varphi: \mathbf{R}_+^3 \rightarrow \Sigma \subset \mathbf{R}_+^3$.

Зафиксируем α, β, γ и определим образ луча в \mathbf{R}_+^3 для $0 < v < +\infty$. Это будет кривая, задаваемая параметрическими уравнениями (3.1). Очевидно, $\varphi_i \rightarrow 0$ при $v \rightarrow +\infty$ ($i = 1, 2, 3$) и для касательной вдоль кривой

$$d\varphi_3 : d\varphi_2 : d\varphi_1 = \frac{1}{\gamma^2 + v} : \frac{1}{\beta^2 + v} : \frac{1}{\alpha^2 + v}$$

Отсюда видно, что образ любого луча касается в точке $(0, 0, 0)$ прямой

$$(4.1) \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$$

Рассмотрим сферический треугольник S_+^2 , определяющий область допустимых параметров α, β, γ (фиг. 4), P — изображающая точка на S_+^2 . Область $\varphi(\mathbf{R}_+^3)$ симметрична относительно прямой (4.1) (она переходит в себя при повороте вокруг прямой (4.1) на 120°). При этом кривые (3.1), касаясь (4.1) при $v \rightarrow +\infty$, для $v \rightarrow 0$ примыкают к поверхности, задаваемой параметрическими уравнениями (3.1), если в них подставить $v = 0$. Эти уравнения задают отображение $\varphi^0: S_+^2 \rightarrow \mathbf{R}_+^3$. Точки и дуги, соответствующие друг другу под действием φ^0 , на фиг. 4 обозначены одинаковыми цифрами.

Пусть открытые дуги L_1, L_2, L_3 и точки R_1, R_2, R_3 (см. фиг. 4) ограничивают S_+^2 на S^2 . Если $P \rightarrow L_1$, то для соответствующей точки $\varphi^\circ(P)$

$$\varphi_1^\circ(P) \rightarrow +\infty, \varphi_2^\circ(P) \rightarrow \text{const}, \varphi_3^\circ(P) \rightarrow \text{const}$$

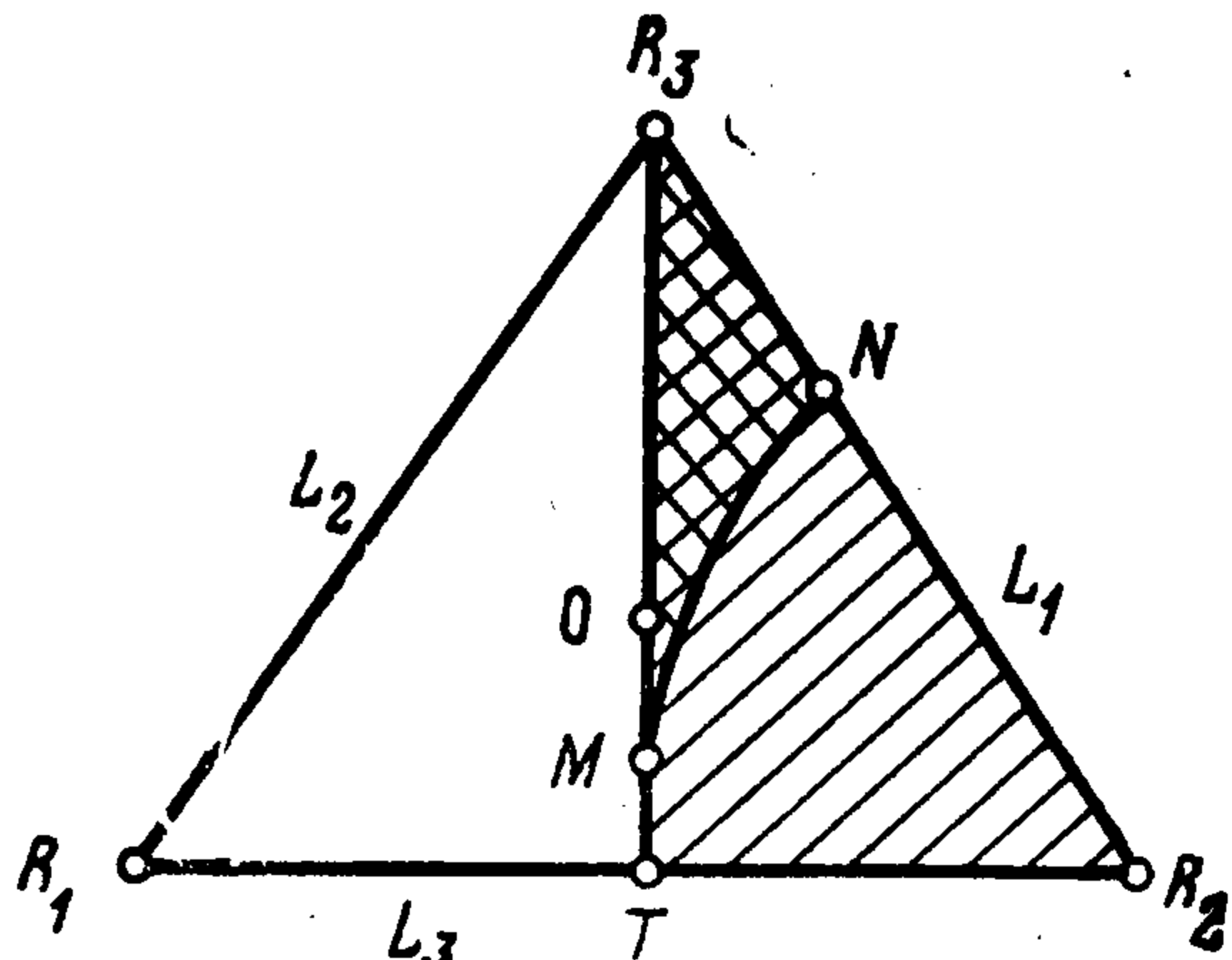
и затем из $P \rightarrow L_3$ следует

$$\varphi_1^\circ(P) \rightarrow \text{const}, \varphi_2^\circ(P) \rightarrow \text{const}, \varphi_3^\circ(P) \rightarrow +\infty$$

из $P \rightarrow L_2$ следует

$$\varphi_1^\circ(P) \rightarrow \text{const}, \varphi_2^\circ(P) \rightarrow +\infty, \varphi_3^\circ(P) \rightarrow \text{const}$$

Если $P \rightarrow R_i$, то $\varphi_j^\circ \rightarrow +\infty$ ($i, j = 1, 2, 3$). Рассмотрим образ конуса, состоящего из лучей, проходящих через кусок поверхности S_+^2 , ограниченный контуром (1234561), и симметричного относительно прямой $\alpha = \beta = \gamma$. При $\nu \rightarrow 0$ образ каждого луча примыкает к точке $\varphi^\circ(\alpha, \beta, \gamma)$ поверхности (3.1) (при $\nu = 0$), когда $\nu \rightarrow +\infty$, все лучи, как было отмечено, имеют общую касательную $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$. Искомый образ конуса является геометрической фигурой, симметричной относительно прямой (4.1), похожей на трехлепестковый цветок, «растущий» из начала координат $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$ в направлении своей оси (4.1). Лепестки цветка составляют кусок поверхности (3.1) (при $\nu = 0$), ограниченный образом контура (1234561).



Фиг. 5

Рассматривая пересечение поверхности $\varphi^\circ(S_+^2)$ с конусом $\pi^{-1}(S)$ (оно заштриховано на фиг. 4) и учитывая показанное на фиг. 4 соответствие границ, можно получить центральную проекцию области устойчивости в пространстве $(\nu, \alpha, \beta, \gamma)$ на S_+^2 . Она имеет вид, показанный на фиг. 5, где, как и на фиг. 4, S_+^2 изображен в виде равностороннего треугольника с вершинами R_1, R_2, R_3 . Отрезок R_3T соответствует эллипсоидам вращения ($\alpha = \beta$), точка O (центр S_+^2) — сферической планете ($\alpha = \beta = \gamma$). Заштрихованный треугольник R_2R_3T и есть упомянутая проекция области устойчивости. Двойной штриховкой обозначена область (MNR_3) , в которой устойчивость в первом приближении имеет место для всех $0 < \nu < +\infty$ и, значит, для всех допустимых ρ . Одинарной штриховкой обозначены лучи, определяемые точками на S_+^2 , на которых устойчивость имеет место, но не всюду при $\nu \in (0, +\infty)$ — ростом ν вдоль луча происходят перестройки типов особой точки P_1 . Разделяющая эти области кривая MN изображена на фиг. 5 приближенно. Важно лишь то, что она расположена на конечном расстоянии от точки O и интервала (OR_3) , соответствующего вытянутым эллипсоидам вращения.

Выберем достаточно узкие конусы C_φ, C' , охватывающие прямые (4.1), $\alpha = \beta = \gamma$, чтобы $\varphi(C') \subset C_\varphi$. В силу: а) непрерывности отображения φ и того, что б) образы всех лучей касаются прямой (4.1), это можно сделать.

В самом деле, из свойства б) вытекает, что для всякого конуса $C \subset \mathbf{R}_+^3$

существует $\nu_0 > 0$, такое, что при $\nu > \nu_0$ образ множества $C \cap \{(\nu, \alpha, \beta, \gamma) \mid \nu > \nu_0\}$ лежит в C_φ .

Далее, из анализа известно простое

Утверждение. Для непрерывного отображения $f: K \times G \rightarrow \mathbb{R}^3$, где K — компакт, G — открытое множество, имеет место равномерная на K сходимость

$$\begin{aligned} f(x, y) &\rightarrow f(x, y_0), \quad y_0 \in G \\ y &\rightarrow y_0 \end{aligned}$$

(K и G предполагаются вложенными в некоторые метрические пространства).

Положим $f = \varphi$, $K = [0, \nu_0]$, $G = \{(\alpha, \beta, \gamma) : \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \alpha > 1/\sqrt{3} - \delta, \beta > 1/\sqrt{3} - \delta, \gamma > 1/\sqrt{3} - \delta\}$, где δ достаточно мало, $y_0 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$; $K \subset \mathbb{R}_+^1 = \{x : x > 0\}$, $G = S_+^2$, где \mathbb{R}_+^1 и S_+^2 имеют естественную структуру метрических пространств. Так как $\varphi: \mathbb{R}_+^3 = \mathbb{R}_+^1 \times S_+^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, то можно применить сформулированное выше утверждение.

Следовательно, можно выбрать такой достаточно узкий конус $C' \subset C$, охватывающий прямую $\alpha = \beta = \gamma$, что образы всех составляющих его лучей будут при $\nu \in [0, \nu_0]$ лежать в C_φ . Но для $\nu > \nu_0$ они и по-прежнему останутся в C_φ .

Вводя в \mathbb{R}_+^3 структуру прямого произведения, можно представить его в виде октанта, из которого выброшено пересечение с шаром, имеющим центр в начале. При этом часть границы, задаваемая равенством $\nu = 0$, является сферическим треугольником S_+^2 .

Из формул (3.1) видно, что для соответствующих точек $\alpha \geq \beta$ эквивалентно $\varphi_1 \leq \varphi_2$. Поэтому, если для луча $\alpha < \beta$, то и для всего его образа $\varphi_1 > \varphi_2$, т. е. при всех $\nu > 0$ имеет место устойчивость. Аналогично при $\alpha > \beta$ будет неустойчивость при всех $\nu > 0$. Это заключение верно, однако, лишь в C' .

Таким образом, соображения размерности, а также приведенные геометрические выводы позволили доказать следующую теорему о свойстве устойчивости.

Теорема. Для эллипсоидальной планеты, достаточно близкой по форме к сфере, свойство точки либрации быть устойчивой в первом приближении зависит только от формы эллипсоида и не зависит от массы, линейных размеров и угловой скорости вращения планеты.

В самом деле, при фиксированных α, β, γ , достаточно близких к $1/\sqrt{3}$, устойчивость или неустойчивость сохраняется при любых допустимых ρ , а, значит, и при произвольных M, l, ω .

Аналогичные соображения позволяют доказать это утверждение также для эллипсоидов, близких к вытянутым эллипсоидам вращения ($\alpha = \beta < \gamma$).

5. **Обсуждение результатов.** Рассмотрим связь введенных параметров $(\nu, \alpha, \beta, \gamma)$ с параметрами, использованными в [1—4] для исследования устойчивости точек либрации P_i (фиг. 1). В упомянутых работах характерный размер a_0 вводился из соотноше-

ния $f M / (a_0^3 \omega^2) = 1$, что позволяло представить функцию Лагранжа в виде

$$L = 1/2 (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) + (\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}) + 1/2 (\xi^2 + \eta^2) + V$$

в безразмерных переменных ξ, η, ζ : $x = a_0 \xi, y = a_0 \eta, z = a_0 \zeta$. В этом случае силовая функция имеет вид [6]

$$V = \frac{3}{4} \int_{\mu'}^{+\infty} \left(1 - \frac{\xi^2}{\alpha' + u} - \frac{\eta^2}{\beta' + u} - \frac{\zeta^2}{\gamma' + u} \right) \frac{du}{[(\alpha' + u)(\beta' + u)(\gamma' + u)]^{1/2}}$$

$$\alpha' = (l/a_0)^2 \alpha^2, \beta' = (l/a_0)^2 \beta^2, \gamma' = (l/a_0)^2 \gamma^2$$

$$\xi^2 / (\alpha' + \mu') + \eta^2 / (\beta' + \mu') + \zeta^2 / (\gamma' + \mu') = 1$$

В [1] предполагалось, что квадраты главных полуосей можно представить так:

$$a^2 = R^2 + 10a_0^2 \alpha_0/3, b^2 = R^2 + 10a_0^2 \beta_0/3, c^2 = R^2 + 10a_0^2 \gamma_0/3$$

где R — радиус планеты, имеющей объем, равный объему эллипсоида. Условие равенства объемов дает

$$(5.1) \quad [(R^2 + 10a_0^2 \alpha_0/3) (R^2 + 10a_0^2 \beta_0/3) (R^2 + 10a_0^2 \gamma_0/3)]^{1/2} = R^3$$

Соотношения $\rho = 1 / (2\varphi_1) = 3f M / (4\omega^2 l^3)$, $fM / (\omega^2 a_0^3) = 1$ позволяют определить $l/a_0 = (3\varphi_1/2)^{1/3}$, где $\varphi_1 = F(v, \alpha^2) = \varphi_1(v, \alpha, \beta, \gamma)$. Отсюда, полагая $R^2/a_0^2 = v_0$, получим формулы для отображения $(v_0, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0) \rightarrow (v, \alpha, \beta, \gamma)$

$$\Phi \lambda^2 = v_0 + 10\lambda_0/3 = \lambda', \lambda = \alpha, \beta, \gamma$$

$$\Phi = [3\varphi_1(v, \alpha, \beta, \gamma)/2]^{2/3}$$

Параметры $(v_0, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, использованные в [1] (параметр v_0 явно не определялся), как и $(v, \alpha, \beta, \gamma)$, зависимы. В самом деле, условие (5.1) влечет зависимость

$$(5.2) \quad (1 + 10\alpha_0/3v_0) (1 + 10\beta_0/3v_0) (1 + 10\gamma_0/3v_0) = 1$$

В [1] область устойчивости получалась следующим образом. При фиксированном v_0 с использованием степенных разложений по $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ доказывалось, что при достаточно малых $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$

$$(5.3) \quad |\alpha_0| < \varepsilon(v_0), |\beta_0| < \varepsilon(v_0), |\gamma_0| < \varepsilon(v_0)$$

эта область задается неравенством $\alpha < \beta$. Такой способ, однако, не дает равномерной оценки для допустимых пределов изменения $\varepsilon(v_0)$ при всех v_0 и, следовательно, не позволяет получить доказанной выше теоремы. Для этого нужно знать геометрию всей области устойчивости в целом, а не только ее локальных частей. Используемая в [1] вместо (5.2) зависимость $\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 = 0$, получаемая из (5.2) с учетом линейных по $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ членов, допустима при (5.3) лишь для достаточно малого ε , зависящего от v_0 . В то же время параметры $(v, \alpha, \beta, \gamma)$ позволяют добиться равномерного по v результата быстро и наглядно.

Автор благодарит В. Г. Демина, предложившего исследовать задачу, за постоянную помощь и поддержку в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абалакин В. К. К вопросу об устойчивости точек либрации в окрестности вращающегося гравитирующего эллипсоида. — Бюл. Ин-та теорет. астроном., 1957, т. 6, № 8.
2. Zhuravlev S. G. About the stability of the libration points of a rotating triaxial ellipsoid in a degenerate case. — Celest. Mech., 1973, v. 8, No. 1.
3. Zhuravlev S. G. Stability of the libration points of a rotating triaxial ellipsoid. — Celest. Mech., 1972, v. 6, No. 3.
4. Журавлев С. Г. Об устойчивости точек либрации вращающегося трехосного эллипсоида в пространственном случае. — Астрон. ж., 1974, т. 5, вып. 6.
5. Батраков Ю. В. Периодические движения частицы в поле тяготения вращающегося трехосного эллипсоида. — Бюл. Ин-та теорет. астроном., 1957, т. 6, № 8.
6. Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию
16.X.1979