Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 1, 1981

УДК 62—50

АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ СБЛИЖЕНИЯ — УКЛОНЕНИЯ

Вахрамеев С. А.

(Москва)

Рассматривается позиционная дифференциальная игра сближения — уклонения с геометрическими ограничениями на управления игроков, зависящими от состояния $\{t, x\}$ динамической системы. Доказывается, что при определенных условиях всегда разрешима либо позиционная игра сближения, либо позиционная игра уклонения. Используемые при доказательстве построения являются модификацией экстремальной конструкции [1]. Подобная задача рассматривалась ранее в работе [2], где, в частности, было предложено условие типа условия (1.3).

1. Пусть поведение управляемой системы описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$x^{\cdot} = f(t, x, u, v), \quad x \in R^n, \quad u \in R^p, \quad v \in R^q \tag{1.1}$$

Здесь x — вектор фазовых координат системы, u и v — управления первого и второго игроков соответственно. Обозначим через Ω^k пространство всех непустых компактов в R^k с метрикой Хаусдорфа h.

Пусть заданы отображения

$$P\colon R \times R^n \to \Omega^p, \quad Q: R \times R^n \to \Omega^q \tag{1.2}$$

удовлетворяющие следующим условиям:

а) отображения

$$P(\cdot, x) : R \to \Omega^p, \quad Q(\cdot, x) : R \to \Omega^q$$

измеримы при всех $x \in R^n$ (см. [3]);

б) отображения

$$P(t, \cdot) : R^n \to \Omega^n, \quad Q(t, \cdot) : R^n \to \Omega^q$$

непрерывны при всех $t \in R$;

в) существуют такие измеримые отображения

$$P_0 : R \to \Omega^p, \quad Q_0 : R \to \Omega^q$$

что при всех $x \in R^n$

$$P(t, x) \subset P_0(t), \quad Q(t, x) \subset Q_0(t)$$

Относительно функции $f\colon R \times R^n \times R^p \times R^q \to R^n$ в правой части уравнения (1.1) будем предполагать выполненным следующее.

1°. Функция $f(t, \cdot, \cdot, \cdot) : R^n \times R^p \times R^q \to R^n$ непрерывна при всех $t \in R$.

2°. Функция $f(\cdot, x, u, v)\colon R \to R^n$ измерима при всех $x \in R^n$, $u \in R^p$, $v \in R^q$.

3°. При всех $x \in R^n$, $u \in P_0(t)$, $v \in Q_0(t)$

$$|f(t, x, u, v)| \leqslant k(t)(1 + |x|).$$

4°. При всех $x, y \in R^n$, $u \in P_0(t)$, $v \in Q_0(t)$

$$|f(t, x, u, v) - f(t, y, u, v)| \leqslant \lambda(t)\,|x - y|$$

5°. При всех $x, y, z \in R^n$

$$\left|\max_{v\in Q(t,x)} \min_{u\in P(t,x)} (z, f(t, x, u, v)) - \right.$$
$$\left. - \min_{u\in P(t,y)} \max_{v\in Q(t,y)} (z, f(t, y, u, v))\right| \leqslant \gamma(t)\,|z|\,|x - y| \tag{1.3}$$

Функции $k, \lambda, \gamma\colon R \to R$ неотрицательны и локально суммируемы по Лебегу.

Условие (1.3) в случае, когда отображения (1.2) не зависят от x, эквивалентно условию седловой точки в маленькой игре [1] в том виде, в котором оно было предложено в [4]. Если $\gamma(t) \equiv \gamma_0$, то это условие равносильно условию

$$a(t, x, z) = \max_{v\in Q(t,x)} \min_{u\in P(t,x)} (z, f(t, x, u, v)) =$$
$$= \min_{u\in P(t,x)} \max_{v\in Q(t,x)} (z, f(t, x, u, v))$$
$$|a(t, x, z) - a(t, y, z)| \leqslant \gamma_0\,|x - y|$$

для всех $x \in R^n$, $y \in R^n$, $z \in R^n$, $|z| = 1$, предложенному в [2].

Отметим два случая, когда условие (1.3) выполнено.

Пусть

$$f(t, x, u, v) = f_1(t, x, u) + f_2(t, x, v)$$

а отображения (1.2) таковы, что множества

$$F_1(t, x) = f_1(t, x, P(t, x)),\ F_2(t, x) = f_2(t, x, Q(t, x))$$

выпуклы при всех $(t, x) \in R^{n+1}$ и для всех $x, y, \in R^n$

$$h(F_1(t, x), F_1(t, y)) \leqslant \gamma_1(t)\,|x - y|$$
$$h(F_2(t, x), F_2(t, y)) \leqslant \gamma_2(t)\,|x - y|$$

где функции $\gamma_1, \gamma_2 : R \to R$ неотрицательны и локально суммируемы. В этом случае неравенство (1.3) выполнено с функцией $\gamma(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t)$.

Допустим теперь, что отображения (1.2) удовлетворяют следующим условиям Липшица:

$$h(P(t, x), P(t, y)) \leqslant \alpha(t)\,|x - y|$$
$$h(Q(t, x), Q(t, y)) \leqslant \beta(t)\,|x - y|$$

а функция $f: R\times R^n\times R^p\times R^q \to R^n$ в правой части уравнения (1.1) дополнительно удовлетворяет условию Липшица по переменным u и v $|f(t, x, u_1, v_1) - f(t, x, u_2, v_2)| \leqslant \eta(t)\,(|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|)$ при всех $x \in R^n$, $u_1, u_{12} \in P_0(t), v_1, v_2 \in Q_0(t)$. Здесь функции $\alpha, \beta, \eta : R \to R$ неотрицательны и локально суммируемы по Лебегу. Тогда условие (1.3) будет выполнено с функцией $\gamma(t) = \lambda(t) + \eta(t)(\alpha(t) + \beta(t))$, если для всех $x\ z \in R^n$

$$\max_{v\in Q(t,x)} \min_{u\in P(t,x)} (z, f(t, x, u, v)) =$$
$$= \min_{u\in P(t,x)} \max_{v\in Q(t,x)} (z, f(t, x, u, v))$$

Для произвольного отображения $F\colon R \times R^n \to \Omega^k$, измеримого по первому аргументу при фиксированном втором, мы будем обозначать символом $F(x; t_1, t_2)$ множество всех измеримых ветвей отображения $F(\cdot, x)\colon R \to \Omega^k$ на полуинтервале $t_1 \leqslant t < t_2$. Это множество непусто по теореме измеримого выбора [3].

Стратегией первого игрока называется отображение $U \div U(t, x)$, которое произвольной позиции $(t, x) \in R^{n+1}$ ставит в соответствие непустое множество из $P(x; t, \infty)$. Аналогично определяется стратегия $V \div \div V(t, x)$ второго игрока.

Пусть первый игрок выбрал стратегию $U \div U(t, x)$. Рассмотрим разбиение Δ полуоси $[t_0, \infty)$ на систему полуинтервалов

$$\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}, \quad \tau_0 = t_0, \quad \tau_i \to \infty, \quad i \to \infty$$

Пусть $|\Delta| = \sup_i (\tau_{i+1} - \tau_i)$.

Ломаной Эйлера, порожденной стратегией $U \div U(t, x)$, называется решение дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} &x_\Delta^{\cdot} = f(t, x_\Delta, u_i(t), v_i(t)), \quad \tau_i \leqslant t < \tau_{i+1} \\ &u_i(\cdot) \in U(\tau_i, x_\Delta(\tau_i)), \ v_i(\cdot) \in Q(x_\Delta(\tau_i); \ \tau_i, \tau_{i+1}) \\ &i = 0, 1, \ldots, \quad x_\Delta(t_0) = x_0 \end{aligned}$$

Можно доказать, что всякая ломаная Эйлера $x_\Delta(t) = x_\Delta(t; t_0, x_0, U, v)$ удовлетворяет дифференциальному включению

$$x^{\cdot} \in \operatorname{conv} f(t, x, P_0(t), \ Q_0(t)) \tag{1.4}$$

Поскольку множество решений этого дифференциального включения с начальным условием $x(t_0) \in X_0$, где $X_0 \in \Omega^n$ компактно в $C_n[t_0, t_1]$, то корректно следующее определение.

Движением, порожденным стратегией $U \div U(t, x)$ первого игрока, называется функция $x(t) = x(t; t_0, x_0, U)$, для которой на любом конечном отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ найдется последовательность $x_{\Delta_k}(t) = x_{\Delta_k}(t; t_0, x_0^k, U, v_k)$ ломаных Эйлера, такая, что

$$x_{\Delta_k}(t) \rightrightarrows x(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1$$

при $x_0^k \to x_0$, $|\Delta_k| \to 0$, $k \to \infty$.

Аналогично определяется движение $x(t) = x(t; t_0, x_0, V)$, порожденное стратегией $V \div V(t, x)$ второго игрока.

Отметим, что всякое движение первого или второго игрока, исходящее из точки x_0 в момент t_0, является решением дифференциального включения

$$x^{\cdot} \in \operatorname{conv} f(t, x, P(t, x), \ Q(t, x)), \quad x(t_0) = x_0$$

Далее, отметим, что для произвольного решения $x(t)$, $t \in R$ дифференциального включения (1.4) с начальными значениями $(t_0, x(t_0)) \in G$, где $G \in \Omega^{n+1}$ справедлива оценка

$$\max_{v \in Q_0(t)} \max_{u \in P_0(t)} |f(t, x(t), u, v)| \leqslant m_G(t) \tag{1.5}$$

где функция $m_G\colon R \to R$ неотрицательна, локально суммируема по Лебегу и зависит только от G.

Пусть заданы непустые замкнутые множества M и N в пространстве позиций R^{n+1}, начальная позиция (t_0, x_0) и момент $T \geqslant t_0$. Рассматриваемая игра сближения — уклонения складывается из следующих двух задач.

Задача 1. Найти стратегию $U^* \div U^* (t, x)$, которая для всех движений $x (t) = x (t; t_0, x_0, U^*)$ обеспечивает встречу

$$(t, x (t)) \in N, \ t_0 \leqslant t < \tau, \ (\tau, x (\tau)) \in M, \quad \tau \leqslant T$$

Задача 2. Указать такие открытые окрестности $H (N)$ и $G (M)$ множеств N и M, а также стратегию $V^* \div V^* (t, x)$, которая исключает встречу

$$(t, x (t)) \in H (N), \quad t_0 \leqslant t < \tau$$

$$(\tau, x (\tau)) \in G (M), \quad \tau \leqslant T$$

для всех движений $x (t) = x (t; t_0, x_0, V^*)$.

2. Будем говорить, что множество $W \subset R^{n+1}$ u-стабильно, если для любой позиции $(t_*, x_*) \in W$, момента $t^* > t_*$ и управления $v^* (\cdot) \in Q (x_*; t_*, t^*)$ найдется решение $x (t)$, $t_* \leqslant t \leqslant t^*$ дифференциального включения

$$x^{\cdot} (t) \in \operatorname{conv} f (t, x (t), \ P (t, x_*), \ v^* (t)), \quad x (t_*) = x_*$$

такое, что $(t^*, x (t^*)) \in W$ или $(\tau, x (\tau)) \in M$ при некотором τ, $t_* \leqslant \tau \leqslant t^*$.

Будем говорить, что множество $W \subset R^{n+1}$ v-стабильно, если для любой позиции $(t_*, x_*) \in W$, момента $t^* > t_*$ и управления $u^* (\cdot) \in P (x_*; t_*, t^*)$ найдется решение $x (t)$, $t_* \leqslant t \leqslant t^*$ дифференциального включения

$$x^{\cdot} (t) \in \operatorname{conv} f (t, x (t), \ u^* (t), \ Q (t, x_*)), \quad x (t_*) = x_*$$

такое, что $(t^*, x (t^*)) \in W$ или $(\tau, x (\tau)) \notin H (N)$ при некотором τ, $t_* \leqslant \tau \leqslant t^*$.

Можно доказать, что свойство u-стабильности (v-стабильности) инвариантно относительно операции замыкания, т. е. если множество W u-стабильно (v-стабильно), то u-стабильно (v-стабильно) его замыкание $\operatorname{cl} W$.

Приведем пример u-стабильного множества. Пусть

$$f (t, x, u, v) = A (t) x + u - v$$

а отображения (1.2) не зависят от x: $P (t, x) \equiv P (t)$, $Q (t, x) = Q (t)$, и локально интегрируемы по Лебегу (см. [5]). Пусть $X (t, t_0)$ — фундаментальная матрица решений однородного уравнения

$$x^{\cdot} = A (t) x$$

Предполагается, что матрица $A (t)$ локально интегрируема по Лебегу. Далее считаем, что множество N совпадает с R^{n+1}, а множество $M = R \times M_0$, где множество $M_0 \subset R^n$ непусто и замкнуто. Обозначим через $A \overset{*}{-} B$ геометрическую разность множеств A и B из R^n

$$A \overset{*}{-} B = \{z \in R^n \mid z + B \subset A\}$$

Непосредственно проверяется u-стабильность множества

$$W = \Big\{(t, x) \in R^{n+1} \mid X(T, t)\, x \in M_0 - $$
$$- \int_t^T \{X(T, \tau) P(\tau) \overset{*}{-} X(T, \tau) Q(\tau)\}\, d\tau,\ t \leqslant T\Big\}$$

Экстремальная стратегия первого игрока $U^e \div U^e(t, x)$ к замкнутому множеству $W \subset R^{n+1}$ определяется следующим образом. Пусть (t_*, x_*) — произвольная позиция, $\Gamma_{t*} = \{(t, x) \in R^{n+1} \mid t = t_*\}$. Если $W \cap \Gamma_{t*} = \varnothing$, то полагаем $U^e_*(t_*, x_*) = P(x_*; t_*, \infty)$, если $W \cap \Gamma_{t*} \neq \varnothing$, то полагаем

$$U^e(t_*, x_*) =$$
$$= \{u^*(\cdot) \in P(x_*; t_*, \infty) \mid \max_{v \in Q(t, x_*)} (x_* - w_*, f(t, x_*, u^*(t), v)) =$$
$$= \min_{u \in P(t, x_*)} \max_{v \in Q(t, x_*)} (x_* - w_*, f(t, x_*, u, v)),\quad t \geqslant t_*\}$$

где w_* — вектор сечения множества W гиперплоскостью Γ_{t*}, который лежит ближе всего к позиции (t_*, x_*).

Экстремальная стратегия $V^e \div V^e(t_*, x_*)$ второго игрока к замкнутому множеству $W \subset R^{n+1}$ определяется следующим образом.

Если $\Gamma_{t*} \cap W = \varnothing$, то $V^e(t_*, x_*) = Q(x_*; t_*, t^*)$. Если $\Gamma_{t*} \cap W \neq \varnothing$, то

$$V^e(t_*, x_*) =$$
$$= \{v^*(\cdot) \in Q(x_*; t_*, \infty) \mid \min_{u \in P(t, x_*)} (w_* - x_*, f(t, x_*, u, v^*(t))) =$$
$$= \max_{v \in Q(t, x_*)} \min_{u \in P(t, x_*)} (w_* - x_*, f(t, x_*, u, v)), t \geqslant t_*\}$$

3. Пусть функция $x(t)$, $t \in R$ удовлетворяет уравнению

$$x^{\cdot} = f(t, x, u^*, (t), v(t)),\quad x(t_*) = x_*$$

а функция $y(t)$, $t \in R$ — дифференциальному включению

$$y^{\cdot} \in \operatorname{conv} f(t, y, P(t, y_*), v^*(t)),\quad y(t_*) = y_*$$

где функция $v(\cdot) \in Q(x_*; t_*, \infty)$ произвольна, а функции $u^*(\cdot) \in P(x_*; t_*, \infty)$ и $v^*(\cdot) \in Q(y_*; t_*, \infty)$ выбраны из условий

$$\max_{v \in Q(t, x_*)} (x_* - y_*, f(t, x_*, u^*(t), v)) =$$
$$= \min_{u \in P(t, x_*)} \max_{v \in Q(t, x_*)} (x_* - y_*, f(t, x_*, u, v))$$

$$\min_{u \in P(t, y_*)} (x_* - y_*, f(t, y_*, u, v^*(t))) =$$
$$= \max_{v \in Q(t, y_*)} \min_{u \in P(t, y_*)} (x_* - y_*, f(t, y_*, u, v)),\ t \geqslant t_*$$

Пусть $\rho(t) = |x(t) - y(t)|$, $t \geqslant t_*$.

Оказывается, что для всех позиций (t_*, x_*) и (t_*, y_*) из компакта $G \in$

$\in \Omega^{n+1}$ имеет место оценка

$$\rho^2(t) \leqslant \rho^2(t_*)\left(1 + 2\int_{t_*}^{t} \gamma(\tau)\,d\tau\right) + \int_{t_*}^{t} \varphi(\tau, t_*)\, m(\tau)\, d\tau \tag{3.1}$$

$$t \geqslant t_*$$

где

$$m(t) = 4g\lambda(t) + 8m_G(t), \quad g = \operatorname{diam} G, \quad \varphi(t, t_*) = \int_{t_*}^{t} m_G(\tau)\, d\tau$$

а функция $m_G(\cdot)$ — из (1.5).

С помощью этой оценки аналогично [1] получаются следующие утверждения.

Лемма 1. Если $W \subset R^{n+1}$ — замкнутое u-стабильное множество $U^e \div U^e(t, x)$ — экстремальная к этому множеству стратегия и $(t_0, x_0) \in W$, тогда для любого движения $x(t) = x(t;\ t_0,\ x_0,\ U^e)$ вплоть до встречи $(\tau, x(\tau)) \in M$ будет выполнено включение $(t,\ x(t)) \in W$. Если для некоторого движения $x(t) = x(t;\ t_0,\ x_0,\ U^e)$ встреча с M не наступает вообще, то для такого движения $(t,\ x(t)) \in W$ при всех $t \geqslant t_0$.

Лемма 2. Пусть $W \subset R^{n+1}$ — замкнутое v-стабильное множество, $V^e \div V^e(t, x)$ — стратегия, экстремальная к этому множеству и $(t_0,\ x_0) \in W$. Тогда $(t,\ x(t)) \in W$ для всякого движения $x(t) = x(t;\ t_0,\ x_0,\ V^e)$ вплоть до момента τ, когда $(\tau,\ x(\tau)) \notin H(N)$. Если для некоторого движения $x(t) = x(t;\ t_0,\ x_0,\ V^e)$ все время $(t,\ x(t)) \in H(N)$, то $(t,\ x(t)) \in W$ при всех $t \geqslant t_0$.

Из этих утверждений следует

Теорема. Пусть дана начальная позиция $(t_0,\ x_0) \in R^{n+1}$ и выбран момент $T \geqslant t_0$. При выполнении всех сформулированных в п. 1 условий всегда разрешима либо задача 1, либо задача 2.

В отличие от работы [2] предполагается измеримость отображений (1.2) по t. Последнее, в частности, потребовало принять другие определения основных элементов игры, таких, как стратегий, стабильных множеств и пр. по сравнению с [1, 2]. Это в свою очередь заставило пользоваться иной, чем в [1, 2], оценкой (3.1) для доказательства барьерных свойств экстремальных стратегий и доказывать инвариантность свойства u (v)-стабильности относительно операции замыкания. Наконец, остальные условия, наложенные на игру, в этой статье несколько слабее условий в [1, 2].

Постановка рассмотренной задачи принадлежит Г. К. Пожарицкому. Автор благодарит М. С. Никольского за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456. с.
2. *Алексейчик М. И.* Дальнейшая формализация основных элементов антагонистической игры дифференциальной.— В кн.: Математический анализ и его приложения. Т. 7. Изд-во Ростовск. ун-та, 1975, 191 с.
3. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 623 с.
4. *Вахрамеев С. А.* Теорема об альтернативе для нестационарной дифференциальной игры сближения — уклонения.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 6, с. 1123.
5. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 479 с.

Поступила в редакцию
27.II.1980