Интегрируя (3.15) по контуру П, получаем формулу (3.11) для случая $\lambda = \lambda_1 h$. Полная формула (3.11) получается с учетом теоремы 2 и замечания 3°.

Отметим в заключение, что первому слагаемому в формуле (3.11) соответствуют на промежутке между собственными числами вырожденной задачи быстро меняющиеся собственные вектор-функции. Их компоненты имеют вид

$$u = -\frac{\mu^2\sigma}{F^2(\lambda) R(\beta)} \exp\left(iF(\lambda)\frac{\beta}{\mu}\right)(1 + O(\mu))$$

$$v = \frac{\mu}{iF(\lambda) R(\beta)} \exp\left(iF(\lambda)\frac{\beta}{\mu}\right)(1 + O(\mu))$$

$$w = \exp\left(iF(\lambda)\frac{\beta}{\mu}\right)(1 + O)(\mu)), \quad \varphi|_\Gamma = \frac{i\omega\mu}{|F(\lambda)|} \exp\left(iF(\lambda)\frac{\beta}{\mu}\right)(1 + O(\mu))$$

$$\varphi|_\Omega = \frac{i\omega\mu}{|F(\lambda)|} \exp\left(iF(\lambda)\frac{\beta}{\mu} - |F(\lambda)|\frac{\rho}{\mu}\right)(1 + O(\mu))\,\theta(\rho)$$

где $\rho$ — расстояние по нормали от границы $\Gamma$, $\theta(\rho)$ — срезающая функция.

Поступила 4 IV 1979

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Асланян А. Г., Лидский В. Б.* Распределение собственных частот тонких упругих оболочек. М., «Наука», 1974.
2. *Odhnoff J.* Operators generated by differential problems with eigenvalue parameter in equation and boundary condition. Medd. Lunds Univ. Mat. Sem., 1959, vol. 14, 1—80.
3. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М., «Наука», 1965.
4. *Hörmander L.* Pseudo-differential operators. Communs Pure and Appl. Math., 1965, vol. 18, No. 3, 501—507.

---

УДК 539.3

# О НАИЛУЧШЕМ РАСПОЛОЖЕНИИ ПЛОСКОСТЕЙ УПРУГОЙ СИММЕТРИИ В ОРТОТРОПНОМ ТЕЛЕ

**Серегин Г. А., Троицкий В. А.**

(Ленинград)

Рассмотрена задача об оптимальном расположении плоскостей упругой симметрии ортотропного тела по критерию минимума потенциальной энергии деформации, которой характеризуется жесткость тела. Анализ полученных условий оптимальности приводит к перестановочности тензоров напряжений и деформаций. Установлены механически различные способы реализации условия оптимальности. Для двумерных задач аналогичный анализ приведен в работе [1].

1. Рассмотрим линейное упругое тело $V$, ограниченное поверхностью $S$. Упругое состояние этого тела описывается вектором перемещения $\mathbf{u}$, тензорами деформаций $\varepsilon$ и напряжений $\sigma$, связанных соотношениями [2]

$$\operatorname{div}\sigma + \mathbf{F} = 0, \quad 2\varepsilon = \nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T \tag{1.1}$$

в которых $\mathbf{F}$ — вектор объемных усилий, верхним индексом $T$ обозначена операция транспонирования. Соотношения упругости задаются тензором упругости четвертого ранга и имеют вид [3]

(1.2) $\varepsilon = \mathbf{L}\cdot\cdot\sigma$

Граничные условия

(1.3) $\mathbf{u} = 0$ на $S_1$, $\mathbf{n}\cdot\sigma = \mathbf{T}$ на $S_2$

где $\mathbf{n}$ — орт внешней нормали к поверхности тела, $\mathbf{T}$ — заданный вектор поверхностных усилий. Потенциальная энергия деформации $\Pi$ и работа $A$ внешних сил связаны формулой [2]

(1.4) $$\Pi = \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}\int_V \sigma\cdot\cdot\mathbf{L}\cdot\cdot\sigma\, dV$$

Обозначим через $\mathbf{e}_n$ главные направления упругости, т. е. орты, перпендикулярные плоскостям упругой симметрии тела, через $\mathbf{A}$ — тензор поворота, связывающий орты $\mathbf{e}_n$ и орты некоторой фиксированной ортогональной системы координат $\mathbf{r}_n$, удовлетворяющие соотношениям

(1.5) $$\mathbf{e}_n = \mathbf{A}\cdot\mathbf{r}_n, \quad \mathbf{A}^T\cdot\mathbf{A} = \mathbf{E}$$

где $\mathbf{E}$ — единичный тензор второго ранга. Раскладывая тензор $\mathbf{L}$ по базису тензоров четвертого ранга, имеем

(1.6) $$\mathbf{L} = \overset{\circ}{L}_{mnpq}\mathbf{A}\cdot\mathbf{r}_m \otimes \mathbf{A}\cdot\mathbf{r}_n \otimes \mathbf{A}\cdot\mathbf{r}_p \otimes \mathbf{A}\cdot\mathbf{r}_q$$

(суммирование по повторяющимся индексам). Отметим, что компоненты $\overset{\circ}{L}_{mnpq}$ тензора $\mathbf{L}$ в базисе главных направлений могут быть выражены через «технические» постоянные по формулам [3]

(1.7) $$\overset{\circ}{L}_{mnpq} = \overset{\circ}{L}_{nmpq} = \overset{\circ}{L}_{mnqp} = \overset{\circ}{L}_{pqmn}$$
$$\overset{\circ}{L}_{1111} = \frac{1}{E_1}, \quad \overset{\circ}{L}_{2222} = \frac{1}{E_2}, \quad \overset{\circ}{L}_{3333} = \frac{1}{E_3}, \quad \overset{\circ}{L}_{1122} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}$$
$$\overset{\circ}{L}_{2233} = -\frac{\nu_{23}}{E_2} = -\frac{\nu_{32}}{E_3}, \quad \overset{\circ}{L}_{3311} = -\frac{\nu_{31}}{E_3} = -\frac{\nu_{13}}{E_1}, \quad \overset{\circ}{L}_{1212} = \frac{1}{2G_{12}},$$
$$\overset{\circ}{L}_{2323} = \frac{1}{2G_{23}}, \quad \overset{\circ}{L}_{3131} = \frac{1}{2G_{31}}$$

Здесь $E_k$, $G_{km}$ — модули Юнга и сдвига, $\nu_{km}$ — коэффициенты Пуассона ($k \neq m$, $k, m = 1, 2, 3$).

Рассмотрим следующую задачу оптимизации. Требуется определить тензор поворота $\mathbf{A}$, сообщающий экстремум функционалу (1.4), при выполнении соотношений (1.1) — (1.3), (1.5) — (1.7).

Составим новый функционал

$$\Phi = \Pi + \int_V [\mathbf{u}\cdot(\nabla\cdot\sigma + \mathbf{F}) + \gamma\cdot\cdot(\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{A} - \mathbf{E})]\, dV$$

который при выполнении всех связей задачи совпадает со старым. В нем $\gamma$ — симметричный тензор второго ранга, играющий роль множителя Лагранжа. Вычислив первую вариацию этого функционала с применением формулы Остроградского и с учетом уравнений (1.1) — (1.3), получим

$$\delta\Phi = \int_V \left[\frac{1}{2}\sigma\cdot\cdot\delta\mathbf{L}\cdot\cdot\sigma + 2\gamma\cdot\cdot(\mathbf{A}\cdot\delta\mathbf{A}^T)\right] dV \geqslant 0$$

Проварьировав формулу (1.6), имеем

$$\delta\mathbf{L} = \overset{\circ}{L}_{mnpq}(\delta\mathbf{A}\cdot\mathbf{r}_m \otimes \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q + \mathbf{e}_m \otimes \delta\mathbf{A}\cdot\mathbf{r}_n \otimes \mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q +$$
$$+ \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n \otimes \delta\mathbf{A}\cdot\mathbf{r}_p \otimes \mathbf{e}_q + \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_p \otimes \delta\mathbf{A}\cdot\mathbf{r}_q)$$

Выполняя далее громоздкие, но элементарные преобразования, получим окончательное выражение для первой вариации

$$\delta\Phi = \int_V \delta\mathrm{A}\cdot\cdot(\mathrm{A}^T\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathrm{A}^T)dV \geqslant 0 \tag{1.8}$$

Выбором компонент симметричного тензора $\gamma$ обратим в нуль коэффициенты при шести вариациях компонент тензора **A**. Три оставшихся коэффициента должны быть равны нулю в силу произвольности вариаций. Учитывая симметричность тензоров $\gamma$, $\varepsilon$, $\sigma$, окончательно получим условие оптимальности

$$\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\varepsilon} \tag{1.9}$$

которое дает три уравнения для определения трех неизвестных компонент тензора **A**.

Если обозначить через $\sigma_{km}{}^\circ, \varepsilon_{km}$ компоненты тензоров $\sigma$, $\varepsilon$ в базисе $\mathbf{e}_n$ и учесть соотношения (1.2), (1.7), то эти три уравнения будут иметь вид

$$\overset{\circ}{\sigma}_{23}A_1 + \overset{\circ}{\sigma}_{31}\overset{\circ}{\sigma}_{12}(1/G_{12} - 1/G_{31}) = 0 \quad (1\to 2\to 3) \tag{1.10}$$

$$\left(A_1 = \overset{\circ}{\sigma}_{11}\frac{\nu_{13}-\nu_{12}}{E_1} + \overset{\circ}{\sigma}_{22}\left(\frac{1+\nu_{23}}{E_2} - \frac{1}{G_{23}}\right) - \overset{\circ}{\sigma}_{33}\left(\frac{1+\nu_{32}}{E_3} - \frac{1}{G_{23}}\right)(1\to 2\to 3)\right.$$

(невыписанные соотношения получаются круговой перестановкой индексов 1, 2 и 3).

2. В общем случае, когда все модули Юнга и сдвига различны, соотношения (1.10) показывают наличие трех типов зон (способов реализации условия стационарности). В зонах первого типа выполнены равенства

$$\sigma_{km}{}^\circ = 0,\ k \neq m,\quad k,\ m = 1,2,3$$

что означает совпадение главных направлений упругости и главных направлений тензора $\sigma$. В зонах второго типа имеет место одно из следующих соотношений:

$$\sigma_{31}{}^\circ = \sigma_{23}{}^\circ = 0,\quad A_3 = 0,\quad \sigma_{12}{}^\circ \neq 0$$

$$\sigma_{12}{}^\circ = \sigma_{31}{}^\circ = 0,\quad A_1 = 0,\quad \sigma_{23}{}^\circ \neq 0$$

$$\sigma_{23}{}^\circ = \sigma_{12}{}^\circ = 0,\quad A_2 = 0,\quad \sigma_{31}{}^\circ \neq 0$$

Здесь только одно главное направление упругости совпадает с главным направлением тензора $\sigma$. В зонах третьего типа все касательные напряжения $\sigma_{km}{}^\circ$ отличны от нуля.

Проанализируем соотношения (1.10) в случае, когда главные значения $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ различны. Перестановочность тензоров $\varepsilon$ и $\sigma$ влечет их соосность, поэтому можно записать соотношения упругости (1.2) в форме [2]

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varphi_0\mathrm{E} + \varphi_1\boldsymbol{\sigma} + \varphi_2\boldsymbol{\sigma}^2 \tag{2.1}$$

где $\varphi_0$, $\varphi_1$, $\varphi_2$ — известные функции от $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$, а следовательно, и от главных инвариантов тензора $\sigma$. Эта функциональная зависимость определяется алгебраической системой уравнений вида

$$\varepsilon_k(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \varphi_0 + \varphi_1\sigma_k + \varphi_2\sigma_k{}^2 \ (k = 1,\ 2,\ 3) \tag{2.2}$$

где $\varepsilon_k$ — главные значения тензора $\varepsilon$. Если коэффициенты $\varphi_0$, $\varphi_1$, $\varphi_2$ найдены, то оптимальное состояние определяется по уравнениям (1.1), (1.3), (2.1), а оптимальный тензор поворота **A** получается из соотношений (1.10) по известному тензору $\sigma$.

Вид функций $\varepsilon_k(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ зависит от типа зоны. Опишем общий способ их определения и отметим некоторые особенности для различных типов зон. Обозначим через $\mathbf{r}_k{}^\circ$ главные направления тензора $\sigma$, а через $L_{mnpq}$ — компоненты тензора упругости в базисе $\mathbf{r}_k{}^\circ$. Ввиду соосности тензоров $\varepsilon$ и $\sigma$ будем иметь

$$L_{km11}\sigma_1 + L_{km22}\sigma_2 + L_{km33}\sigma_3 = 0 \quad (k \neq m,\quad k, m = 1, 2, 3)$$

$$L_{mnpq} = L_{rstk}\alpha_{mr}\alpha_{ns}\alpha_{pt}\alpha_{qk},\quad \alpha_{km}\alpha_{kn} = \delta_{mn} \quad (\mathbf{e}_r = \alpha_{mr}\mathbf{r}_m{}^\circ)$$

Эта система позволяет определить коэффициенты $\alpha_{mr}$ через $\sigma_k$, $\overset{\circ}{L}_{rstk}$. Таким образом можно получить зависимость $L_{mnpq}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ и, следовательно, искомые функции (по $k$ не суммировать!)

(2.3) $$\varepsilon_k = L_{kk11}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\,\sigma_1 + L_{kk22}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\,\sigma_2 + L_{kk33}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\,\sigma_3 \quad (k = 1, 2, 3)$$

В первой зоне имеем

$$\alpha_{mn} = \delta_{mn}, \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{E_1}\sigma_1 - \frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_2 - \frac{\nu_{31}}{E_3}\sigma_3 \quad (1 \to 2 \to 3)$$

Тензор $\mathbf{A}$ определяется приведением известного тензора $\sigma$ к главным осям. Положим $\sigma_+ = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, $\sigma_- = \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, тогда получим зоны первого типа: 1) $\sigma_1 = \sigma_+$, $\sigma_3 = \sigma_-$, 2) $\sigma_1 = \sigma_-$, $\sigma_2 = \sigma_+$ и т. д. Следовательно, зон первого типа не может быть более шести.

В качестве примера зон второго типа рассмотрим те, для которых выполнены соотношения

(2.4) $$\sigma_{13}^\circ = \sigma_{23}^\circ = 0, \; A_3 = 0, \; \sigma_{12}^\circ \neq 0, \; \sigma_{33}^\circ = \sigma_3$$

$$(\alpha_{11} = \alpha_{22} = \cos\varphi, \quad \alpha_{21} = -\alpha_{12} = \sin\varphi, \quad \alpha_{31} = \alpha_{32} = \alpha_{13} = \alpha_{23} = 0,$$
$$\alpha_{33} = 1, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{r}_3^\circ)$$

Отметим, что уравнение $A_3 = 0$ определяет два значения $\varphi$ для данного тензора $\sigma$. В самом деле

$$\cos 2\varphi = \left(a\sigma_3 + b\,\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^{-1}$$

$$a = -\frac{\nu_{32} - \nu_{31}}{E_3}\left(\frac{1+\nu_{21}}{E_2} + \frac{1+\nu_{12}}{E_1} - \frac{2}{G_{12}}\right)^{-1}, \quad b = -\left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{1+\nu_{12}}{E_1} + \frac{1+\nu_{21}}{E_2} - \frac{2}{G_{12}}\right)^{-1}$$

Формулам (2.3) можно придать вид

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\left(\frac{1-\nu_{12}}{E_1} + \frac{1-\nu_{21}}{E_2}\right) - \sigma_3\,\frac{\nu_{31} + \nu_{32}}{E_3} + \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2}\right)\times$$
$$\times\left(\sigma_3 a + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\,b\right)$$

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{G_{12}}, \quad \varepsilon_3 = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\,\frac{\nu_{32} + \nu_{31}}{E_3} + \frac{\sigma_3}{E_3} + \frac{\nu_{32} - \nu_{31}}{E_3}\times$$
$$\times\left(\sigma_3 a + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\,b\right)$$

Для определения тензора поворота $\mathbf{A}$ необходимо привести тензор $\sigma$ к главным осям, главное направление упругости $\mathbf{e}_3$ совместить с одним из главных направлений тензора $\sigma$. Два других получаются поворотом двух оставшихся главных направлений на угол $\varphi$ вокруг орта $\mathbf{e}_3$. Таким образом, соотношения (2.4) определяют не более двенадцати зон. Так как подобное можно проделать с двумя другими главными направлениями упругости $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, то число зон второго типа не превышает тридцати шести.

Наиболее сложным образом функции $\varepsilon_k(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ определяются для зон третьего типа. Здесь, если между «техническими» постоянными нет какой-либо специальной связи, нужно использовать общую конструкцию.

Аналогичную процедуру можно проделать, если все $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$ различны. В этом случае в уравнении (2.1) необходимо тензоры $\varepsilon$ и $\sigma$ поменять местами. Когда среди главных значений по два одинаковых (например, $\sigma_1 \neq \sigma_2 = \sigma_3$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$), то в уравнении (2.1) можно положить один из коэффициентов $\varphi_0$, $\varphi_1$, $\varphi_2$ равным нулю и искать зависимость $\varepsilon_k(\sigma_1, \sigma_2)$. Аналогично рассматривается и случай $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 = \varepsilon_3$, $\sigma_2 = \sigma_3$. Таким образом можно перебрать все возможные варианты напряженных состояний.

Рассмотрим частный случай для тела, обладающего кубической симметрией

$$E_1 = E_2 = E_3 = E, \; G_{12} = G_{23} = G_{31} = G, \; \nu_{13} = \nu_{31} = \nu_{23} = \nu_{32} = \nu_{21} = \nu_{12} = \nu$$

Здесь имеется всего одна зона первого типа, в которой

$$\varepsilon = \frac{1+\nu}{E}\sigma - \frac{\nu}{E}\,\mathrm{E}\,\mathrm{Tr}\,\sigma, \quad \overset{\bullet}{\sigma}_{km} = 0 \quad (k \neq m)$$

и одна зона третьего типа

$$\varepsilon = \frac{1}{G}\sigma - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{G} - \frac{1-2\nu}{E}\right)\mathrm{E}\,\mathrm{Tr}\,\sigma, \quad \overset{\circ}{\sigma}_{11} = \overset{\bullet}{\sigma}_{22} = \overset{\circ}{\sigma}_{33}$$

Зон второго типа не более трех, причем

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\frac{1-\nu}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_3 \pm \frac{1}{2G}(\sigma_1-\sigma_2), \quad \varepsilon_3 = -\frac{\nu}{E}(\sigma_1+\sigma_2) + \frac{\sigma_3}{E}$$

$$\varphi = \pi/4, \quad \overset{\bullet}{\sigma}_{13} = \overset{\circ}{\sigma}_{23} = 0$$

В первой зоне $\sigma_3 = \sigma_-$, во второй $\sigma_3 = \sigma_+$, а в третьей $\sigma_3$ равно промежуточному главному значению тензора $\sigma$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Баничук Н. В.* Оптимизация анизотропных свойств деформируемых сред в плоских задачах теории упругости.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 1.
2. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970.
3. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977.


Поступила в редакцию
11.VI.1979