УДК 539.3 : 534.1

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ НЕКРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, ЗАПОЛНЕННЫХ ЖИДКОСТЬЮ

Даин Е. А.

(Москва)

Доказывается точная асимптотическая формула для собственных частот некруговых цилиндрических оболочек. При этом оказывается, что спектр асимптотически распадается на четыре серии, соответствующие различным типам напряженного состояния. Выписываются формы собственных колебаний в виде быстроосциллирующих функций, соответствующих квазипоперечному напряженному состоянию.

1. Рассматривается цилиндрическая оболочка произвольного очертания с упругими плоскими днищами, плоскость которых ортогональна образующей цилиндра. Полученный таким способом сосуд целиком заполнен жидкостью.

Предполагаем, что потенциал скоростей на днищах Γ_1 равен нулю, а для перемещений u, v, w на границе Γ цилиндрической оболочки выполняются условия свободного опирания (α — длина дуги образующей)

$$\varphi\,|_{\Gamma_1}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right|_{\Gamma}=0,\quad v\,|_{\Gamma}=0$$
$$w\,|_{\Gamma}=0,\quad \left.\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\right|_{\Gamma}=0 \tag{1.1}$$

Тогда задача определения собственных частот совместных колебаний механической системы «боковая поверхность цилиндра — жидкость» приводит к следующей системе уравнений:

$$-\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{1-\sigma}{2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right]u-\frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\sigma}{R(\beta)}\frac{\partial w}{\partial\alpha}=\lambda u$$
$$-\frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}-\left[\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+\frac{1-\sigma}{2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\right]v+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{w}{R(\beta)}\right)=\lambda v$$
$$-\frac{\sigma}{R(\beta)}\frac{\partial u}{\partial\alpha}-\frac{1}{R(\beta)}\frac{\partial v}{\partial\beta}+$$
$$+\left[\frac{1}{R^2(\beta)}+\frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)^2\right]w=\lambda w-\frac{i\omega\rho_f}{Eh}\varphi\,|_{\Gamma_2}$$
$$(\partial\varphi/\partial n)_{\Gamma_2}=i\omega w,\quad \Delta\varphi+\omega^2c^{-1}\varphi=0\quad (\lambda=(1-\sigma^2)\omega^2\rho_s/E) \tag{1.2}$$

Первые четыре уравнения выполняются на боковой поверхности цилиндра, а последнее, уравнение Гельмгольца,— внутри сосуда, причем u, v, w, φ удовлетворяют условиям (1.1). Система (1.2) выписана в соответствии с обозначениями, принятыми в [1]; отметим лишь, что ρ_f — плотность жидкости, ρ_s — плотность оболочки, $\partial/\partial n$ — дифференцирование по направлению внешней нормали, Γ_2 — боковая поверхность цилиндра.

Теорема 1. Спектр задачи (1.1), (1.2) веществен, дискретен и имеет единственную предельную точку в бесконечности. Собственные числа ω симметричны относительно нуля.

Доказательство. Замена

$$u=u_1,\ v=v_1,\ w=\rho_1\sqrt{h}w_1,\ \varphi=\rho_1\sqrt{h}\varphi\ (\rho_1=\sqrt{E/\rho_f})$$

приводит систему (1.2) к квадратичному пучку относительно спектрального параметра ω ($B\geqslant 0$ и C — эрмитовы матрицы)

$$A\mathbf{x}=\omega^2B\mathbf{x}+\omega C\mathbf{x},\quad \mathbf{x}=(u_1,v_1,w_1,\varphi_1\,|_{\Gamma},\varphi_1\,|_{\Omega}) \tag{1.3}$$

Следуя [2], естественно ввести пространство L вектор-функций

$$\mathbf{x} : L = L_2(\Gamma) \oplus L_2(\Gamma) \oplus L_2(\Gamma) \oplus L_2(\Gamma) \oplus L_2(\Omega)$$

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \int\limits_{\Gamma} (u_1^1 u_1^2 + v_1^1 v_1^2 + w_1^1 w_1^2 + \varphi_1^1|_\Gamma \varphi_1^2|_\Gamma)\, d\Gamma + \int\limits_{\Omega} \varphi_1^1 \varphi_1^2\, d\Omega$$

Можно показать, что оператор A в (1.3) симметричен и неотрицателен в подпрост ранстве гладких вектор-функций. Как показано в [2], оператор A в пространстве L имеет самосопряженное замыкание с вполне непрерывной резольвентой. Дискретность спектра самосопряженного пучка (1.3) следует из теоремы 1.5.1 в [3].

Если $\mathbf{x}_0$ — собственный вектор, соответствующий собственному значению ω_0, то имеет место равенство

$$\omega_0^2 (B\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) + \omega_0 (C\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) - (A\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) = 0 \tag{1.4}$$

В силу самосопряженности пучка коэффициенты уравнения (1.4) вещественные. Значение ω_0 вещественно, если $(B\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) = 0$. Пусть $(B\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) \neq 0$, тогда вещественность ω_0 следует из того, что $(A\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) \geqslant 0$, $(B\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) \geqslant 0$, т. е. дискриминант уравнения (1.4) положителен. Последнее утверждение теоремы проверяется непосредственно.

Система (1.3) регулярно зависит от малого параметра h. При $h = 0$ она распадается на две несвязанные между собой задачи. Первая из них, соответствующая первым двум уравнениям (1.2), совместно со вторым и третьим краевыми условиями (1.1) представляет собой задачу на собственные значения для плоских колебаний цилиндрической оболочки и имеет неотрицательный дискретный спектр, с единственной предельной точкой в бесконечности. Вторая задача имеет вид

$$-i\omega\rho_f E^{-1} \varphi|_{\Gamma_2} = 0, \; (\partial\varphi / \partial n)_{\Gamma_2} = i\omega w, \; \Delta\varphi + \omega^2 c^{-1} \varphi = 0 \tag{1.5}$$
$$\varphi|_{\Gamma_1} = 0$$

Система (1.5) в точке $\omega = 0$ имеет бесконечномерное собственное подпространство вектор-функций вида $(w, 0, 0)$, где $w \in L_2(\Gamma_2)$ — произвольная функция, а также собственную функцию $(0, 1, 1)$. При $\omega \neq 0$ задача (1.5) эквивалентна задаче Дирихле для уравнения Гельмгольца. Как будет показано ниже, спектр задачи (1.1), (1.2) тесно связан со спектром упомянутой задачи и задачи (1.5), при этом роль точки $\omega = 0$ аналогична роли непрерывного спектра в сухих оболочках: она является предельной точкой для собственных чисел задачи (1.1), (1.2) при $h \to 0$. В дальнейшем задачу на собственные значения (1.1), (1.2) будем называть моментной.

Замечания. 1°. Нуль — собственное значение моментной задачи, при этом собственные векторы равны $(0, 0, 0, 1, 1)$ и $(1, 0, 0, 0, 0)$.

2°. Все сказанное выше справедливо для произвольной замкнутой оболочки, полностью заполненной жидкостью.

2. Замена

$$u = u(s)\cos \varkappa\alpha, \quad v = v(s)\sin \varkappa\alpha, \quad w = w(s)\sin \varkappa\alpha, \quad \varphi = \varphi(x, y)\sin \varkappa\alpha$$
$$\varkappa = k\pi / l$$

(l — длина цилиндра, x, y — ортогональные координаты в поперечном сечении) приводит систему (1.2) к следующей системе уравнений:

$$-\left[\frac{1-\sigma}{2}\frac{d^2}{d\beta^2} - \varkappa^2\right] u - \frac{1+\sigma}{2}\varkappa\frac{dv}{d\beta} + \frac{\sigma}{R(\beta)}\varkappa w = \lambda u \tag{2.1}$$

$$\frac{1+\sigma}{2}\varkappa u - \left[\frac{d^2}{d\beta^2} - \frac{1-\sigma}{2}\varkappa^2\right] v + \frac{d}{d\beta}\left(\frac{w}{R(\beta)}\right) = \lambda v$$

$$\frac{\sigma}{R(\beta)}\varkappa u - \frac{1}{R(\beta)}\frac{dv}{d\beta} +$$
$$+\left[\frac{1}{R^2(\beta)} + \frac{h^2}{12}\left(\frac{d^2}{d\beta^2} - \varkappa^2\right)^2\right] w = \lambda w - \frac{i\omega\rho_f}{Eh}\varphi|_\Gamma$$

$$\Delta\varphi + (\omega^2 c^{-1} - \varkappa^2)\varphi = 0, \; (\partial\varphi / \partial n)_\Gamma = i\omega w$$

В дальнейшем будем считать, что $R(\beta)$ — бесконечно дифференцируемая функция.

Опишем прием, с помощью которого задачу (2.1) можно свести к системе псевдодифференциальных уравнений на контуре Г. Обозначим через $T(\lambda)$ линейный оператор, ставящий в соответствие граничному значению решения уравнения Гельмгольца производную по направлению внешней нормали. Оператор $T(\lambda)$ можно представить в следующем виде (a — длина направляющей цилиндра):

$$T(\lambda) = D + T_1(\lambda), \quad D\left(\exp\frac{2n\pi i\beta}{a}\right) = \frac{2|n|\pi}{a}\exp\frac{2n\pi i\beta}{a} \tag{2.2}$$

Здесь $T_1(\lambda)$ — интегральный оператор порядка —1, ядро которого — мероморфная функция λ с полюсами в точках спектра задачи

$$\Delta\varphi + (\omega^2 c^{-1} - \varkappa^2)\varphi = 0, \quad \varphi|_\Gamma = 0 \tag{2.3}$$

Представление оператора $T(\lambda)$ в виде (2.2) можно получить вычислением его символа (см. [4]). Это можно сделать используя, например, явный вид фундаментального решения уравнения Гельмгольца. При этом главный символ оператора $T(\lambda)$ оказывается равным $|\xi|$. Если обозначить через D оператор с таким символом, то легко можно показать, что для D имеет место второе соотношение (2.2). Мероморфность $T_1(\lambda)$ как функции λ следует из определения оператора $T(\lambda)$. Отметим, что оператор $T_1(\lambda)$ представим в виде

$$T_1(\lambda)w = T_2(\lambda)w + \sum_{\lambda_i\in G}\frac{f_i(\beta)(f_i, w)}{\lambda_i - \lambda} \tag{2.4}$$

где λ_i — полюса ядра $T_1(\lambda)$ в области G комплексной плоскости. Оператор $T_2(\lambda)$ аналитичен в G, $f_i(\beta)$ — гладкие функции на Г. Из первых двух уравнений (2.1) выразим u, v через w и подставим их в третье уравнение. Из последних двух уравнений (2.1) выразим w через $\varphi|_\Gamma$ при помощи оператора $T(\lambda)$: $w = (i\omega)^{-1}T(\lambda)\varphi$.

Тогда с учетом (2.4) заключаем, что система (2.1) эквивалентна следующему уравнению:

$$\frac{h^3}{12}\left[\frac{d^2}{d\beta^2} - \varkappa^2\right]^2 (D + T_2(\lambda))\varphi + hK(\lambda)\varphi = \tag{2.5}$$
$$= \lambda\,[h(D + T_2 + \rho E)]\,\varphi, \quad \rho = \frac{\rho_f}{(1-\sigma^2)\rho_s}$$

Здесь $K(\lambda)$ — интегральный оператор с ядром, мероморфным по λ, причем в соответствии с (2.4) $K(\lambda)$ можно выбрать так, чтобы мероморфная часть $K(\lambda)$ на отрезке $I = [\lambda_1, \lambda_2]$ была конечномерна, а оператор $T_2(\lambda)$ регулярен.

Определяющую роль в дальнейшем играет уравнение

$$\frac{h^3}{12}\frac{d^4}{d\beta^4}D\varphi = \lambda\,(hD + \rho E)\,\varphi \tag{2.6}$$

Рассмотрим периодическую задачу для уравнения (2.6). Учитывая второе соотношение (2.2), видим, что уравнение (2.6) на Г имеет полную систему собственных функций $\exp(2n\pi i\beta/a)$. При этом его двукратные собственные числа имеют вид

$$\lambda_n^{\pm} = (h^3/12)(2|n|\pi/a)^5\,[h(2|n|\pi/a) + \rho]^{-1} \tag{2.7}$$

Можно убедиться, что из (2.7) следует утверждение: существуют постоянные $\varepsilon > 0$ и $h_0 > 0$, такие, что при (2.8)

$$0 < h < h_0, \quad \varepsilon < \{F(\lambda)\} < 1 - \varepsilon \tag{2.8}$$
$$\left(F(\lambda) = \frac{a}{2\pi\mu}\left((\rho\lambda)^{1/5} + 12^{1/5}5^{-1}\mu^{2/5}\left(\frac{\lambda^2}{\rho^3}\right)^{1/5}\right), \quad \mu = \frac{h^{3/5}}{12^{1/5}}\right.$$

функция распределения собственных чисел $n_0(\lambda)$ периодической задачи для уравнения (2.6) имеет вид

(2.9) $$n_0(\lambda) = 2[F(\lambda)] + 1$$

3. Обозначим через $\sigma_1(\lambda)$ и $\sigma_2(\lambda)$ функции распределения собственных чисел задачи (2.3) и периодической задачи для плоских колебаний цилиндрической оболочки с k волнами вдоль образующей.

Теорема 2. Пусть концы фиксированного отрезка $I = [\lambda_1, \lambda_2]$ не принадлежат спектру указанных выше задач. Существуют постоянные $\varepsilon > 0$ и $h_0 > 0$, такие, что при $0 < h \leqslant h_0$ и $\varepsilon < \{F(\lambda_i)\} < 1 - \varepsilon$ для количества собственных чисел моментной задачи (2.5) на отрезке I справедлива формула

(3.1) $$n(\lambda_2) - n(\lambda_1) = 2F(\lambda_2) - 2F(\lambda_1) + \sigma_1(\lambda_2) - \sigma_1(\lambda_1) + \sigma_2(\lambda_2) - \sigma_2(\lambda_1)$$

Доказательство. Предположим, что на отрезке I отсутствуют собственные числа задачи (2.3) и задачи плоских колебаний с k волнами по образующей. Тогда уравнение (2.5) можно представить в виде

(3.2) $$\frac{h^3}{12}\frac{d^4}{d\beta^4}D\varphi - \lambda(hD + \rho E)\varphi + h^3A\varphi + hB\varphi = 0$$

где порядок A равен 3, порядок B равен -1, причем операторы A и B регулярно зависят от λ на отрезке I. Рассмотрим на комплексной плоскости прямоугольник Π со сторонами, параллельными осям координат. Пусть его вертикальные стороны проходят через точки λ_1 и λ_2.

Сделаем в уравнении (3.2) замену $\psi = (hD + \rho E)\varphi$. Получим

(3.3) $$P\psi - \lambda\psi + (h^3A + hB)(hD + \rho E^{-})^1\psi = 0$$

$$P = \frac{h^3}{12}\frac{d^4}{d\beta^4}D(hD + \rho E)^{-1}$$

Обозначая резольвенту оператора P через R_λ, имеем оценки при

(3.4) $$\| R_\lambda B(hD + \rho E)^{-1} \| \leqslant c_1/\mu, \quad \| R_\lambda A(hD + \rho E)^{-1} \| \leqslant c_2/\mu^3$$

которые можно получить учитывая явный вид собственных чисел (2.7) уравнения (2.6). Интегрируя резольвенту уравнения (3.3) по контуру Π с учетом (3.4) и того, что спектр оператора P совпадает со спектром уравнения (2.6), получаем (3.1).

Пусть теперь на отрезке I один, для простоты однократный, полюс λ_* оператора T_1, т. е. уравнение (2.5) имеет при $\lambda \in I$ вид

(3.5) $$\frac{h^3}{12}\frac{d^4}{d\beta^4}D\varphi - \lambda(hD + \rho E)\varphi + (h^3A + hB)\varphi + h\frac{f_1(s)(f_2, \varphi)}{\lambda_* - \lambda} = 0$$

Можно показать, что уравнение (3.5) эквивалентно следующему интегральному уравнению с мероморфным ядром:

(3.6) $$\psi + hf_1(s)(f_2, (hD + \rho E)^{-1}R_\lambda\psi)/(\lambda_* - \lambda) = 0$$

Определитель Фредгольма уравнения (3.6) можно представить в виде

(3.7) $$\lambda - \lambda_* + O(\mu^{2/3}) + \mu^{5/3}\sum_{\lambda_i(\mu)\in I}\frac{(f_1, y_i)(y_i, (hD + \rho E)^{-1}f_2)}{\lambda_i(\mu) - \lambda} = 0$$

где $\lambda \in \Pi$, $\lambda_i(\mu)$ — полюса R_λ на отрезке I. Ввиду гладкости $f(s)$ скалярное произведение (f, y_i) убывает быстрее любой степени μ при $\mu \to 0$. Поэтому из принципа аргумента вытекает, что в достаточно большом прямоугольнике число нулей уравнения (3.7) на единицу больше числа его полюсов $\lambda_i(\mu)$. Так как в силу теоремы 1 собственные числа уравнения (3.7) вещественны, теорема 2 доказана.

Замечание 3°. Пусть концы отрезка I убывают при $h \to 0$ и ведут себя как h^α ($\alpha < 1$). Можно проверить, что теорема 2 остается справедливой и в этом случае, причем в правой части (3.2) остаются только два первых слагаемых.

Пусть $\lambda = \lambda_1 h$. Представим уравнение (2.8) в виде

$$\frac{h^2}{12}\frac{d^4}{d\beta^4} D\varphi + K(0)\varphi + h\,[hA + T(\lambda_1) + K_1(\lambda_1)]\,\varphi = \lambda_1\rho\varphi \tag{3.8}$$

Если в уравнении (3.8) положить $h = 0$, получится вырожденное уравнение

$$K(0)\,\varphi = \lambda_1\rho\varphi \tag{3.9}$$

эквивалентное «безмоментной» системе уравнений

$$\begin{aligned}
&-\left[\frac{1-\sigma}{2}\frac{d^2}{d\beta^2} - \varkappa^2\right] u - \frac{1+\sigma}{2}\varkappa\frac{dv}{d\beta} + \frac{1}{R(\beta)}\varkappa w = 0\\
&\frac{1+\sigma}{2}\varkappa u - \left[\frac{d^2}{d\beta^2} - \frac{1-\sigma}{2}\varkappa^2\right] v + \frac{d}{d\beta}\left(\frac{w}{R(\beta)}\right) = 0\\
&\frac{1}{R(\beta)}\varkappa u - \frac{1}{R(\beta)}\frac{dv}{d\beta} + \frac{1}{R^2(\beta)} w = \lambda_1\rho T^{-1} w
\end{aligned} \tag{3.10}$$

где T^{-1} — интегральный оператор, обратный оператору (2.2). Спектр системы уравнений (3.10) дискретный и сгущается в нуле.

Обозначим через $\sigma_3(\lambda_1)$ число собственных значений системы уравнений (3.10), больших, чем λ_1. Пусть, как и раньше, $\sigma_1(\lambda)$ — функция распределения собственных значений задачи Дирихле уравнения Гельмгольца в области, ограниченной контуром Г, $\sigma_2(\lambda)$ — функция распределения собственных значений периодической задачи для уравнения плоских колебаний с k волнами вдоль образующей.

Обозначим через S объединение спектров этих задач.

Теорема 3. Существуют постоянные $\varepsilon > 0$ и $h_0 > 0$, такие, что при $0 < h \leqslant h_0$, $\varepsilon < F(\lambda) < 1 - \varepsilon$, $\lambda > \Lambda h$, $\operatorname{dist}(\lambda, S) > \varepsilon$, где $\Lambda > 0$ — любое число, функция распределения собственных частот $n(\lambda)$ задачи (2.1) имеет вид

$$n(\lambda) = 2F(\lambda) + 1 + \sigma_1(\lambda) + \sigma_2(\lambda) - \sigma_3(\lambda / h) \tag{3.11}$$

Обозначим резольвенту периодической задачи на Г для уравнения

$$\frac{h^2}{12}\frac{d^4}{d\beta^4} D\varphi = \lambda_1\rho\varphi \tag{3.12}$$

через R_{λ_1}. Тогда резольвенту $R_{\lambda_1}^{(1)}$ аналогичной задачи для уравнения (3.8) можно представить в виде

$$R_{\lambda_1}^{(1)} = (E + hR_{\lambda_1}(hA + T(\lambda_1) + K_1(\lambda_1)) + R_{\lambda_1}K(0))^{-1} R_{\lambda_1} \tag{3.13}$$

Можно показать, что

$$\| hR_{\lambda_1}(hA + T(\lambda_1) + K_1(\lambda_1)) \| \to 0, \quad \| R_{\lambda_1}K(0) + \lambda_1^{-1}K(0) \| \to 0 \quad (h \to 0)$$

если λ_1 удовлетворяет условиям теоремы 3. Рассмотрим в комплексной λ_1-плоскости замкнутый контур П, проходящий через точку λ_1 на положительной вещественной полуоси, содержащий внутри себя отрезок $[0, \lambda_1]$ и удовлетворяющий условиям теоремы. Тогда на этом контуре

$$R_{\lambda_1}^{(1)} = \left(E - \frac{1}{\lambda_1}K(0) + o(h)\right)^{-1} R_{\lambda_1} \tag{3.14}$$

Обозначим резольвенту уравнения (3.9) через $R_{\lambda_1}^{(0)}$. Используя (3.14), получим, что на контуре П

$$\left\| R_{\lambda_1}^{(1)} - R_{\lambda_1} - R_{\lambda_1}^{(0)} - \frac{1}{\lambda_1}E \right\| \to 0 \quad (h \to 0) \tag{3.15}$$

Интегрируя (3.15) по контуру П, получаем формулу (3.11) для случая $\lambda = \lambda_1 h$. Полная формула (3.11) получается с учетом теоремы 2 и замечания 3°.

Отметим в заключение, что первому слагаемому в формуле (3.11) соответствуют на промежутке между собственными числами вырожденной задачи быстро меняющиеся собственные вектор-функции. Их компоненты имеют вид

$$u = -\frac{\mu^2\sigma}{F^2(\lambda)R(\beta)}\exp\left(iF(\lambda)\frac{\beta}{\mu}\right)(1+O(\mu))$$

$$v = \frac{\mu}{iF(\lambda)R(\beta)}\exp\left(iF(\lambda)\cdot\frac{\beta}{\mu}\right)(1+O(\mu))$$

$$w = \exp\left(iF(\lambda)\frac{\beta}{\mu}\right)(1+O)(\mu)),\quad \varphi|_\Gamma = \frac{i\omega\mu}{|F(\lambda)|}\exp\left(iF(\lambda)\frac{\beta}{\mu}\right)(1+O(\mu))$$

$$\varphi|_\Omega = \frac{i\omega\mu}{|F(\lambda)|}\exp\left(iF(\lambda)\frac{\beta}{\mu} - |F(\lambda)|\frac{\rho}{\mu}\right)(1+O(\mu))\,\theta(\rho)$$

где ρ — расстояние по нормали от границы Γ, $\theta(\rho)$ — срезающая функция.

Поступила 4 IV 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Асланян А. Г., Лидский В. Б.* Распределение собственных частот тонких упругих оболочек. М., «Наука», 1974.
2. *Odhnoff J.* Operators generated by differential problems with eigenvalue parameter in equation and boundary condition. Medd. Lunds Univ. Mat. Sem., 1959, vol. 14, 1—80.
3. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М., «Наука», 1965.
4. *Hörmander L.* Pseudo-differential operators. Communs Pure and Appl. Math., 1965, vol. 18, No. 3, 501—507.

УДК 539.3

О НАИЛУЧШЕМ РАСПОЛОЖЕНИИ ПЛОСКОСТЕЙ УПРУГОЙ СИММЕТРИИ В ОРТОТРОПНОМ ТЕЛЕ

Серегин Г. А., Троицкий В. А.

(Ленинград)

Рассмотрена задача об оптимальном расположении плоскостей упругой симметрии ортотропного тела по критерию минимума потенциальной энергии деформации, которой характеризуется жесткость тела. Анализ полученных условий оптимальности приводит к перестановочности тензоров напряжений и деформаций. Установлены механически различные способы реализации условия оптимальности. Для двумерных задач аналогичный анализ приведен в работе [1].

1. Рассмотрим линейное упругое тело V, ограниченное поверхностью S. Упругое состояние этого тела описывается вектором перемещения $\mathbf{u}$, тензорами деформаций ε и напряжений σ, связанных соотношениями [2]

$$\operatorname{div}\sigma + \mathbf{F} = 0,\quad 2\varepsilon = \nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T \tag{1.1}$$

в которых $\mathbf{F}$ — вектор объемных усилий, верхним индексом T обозначена операция транспонирования. Соотношения упругости задаются тензором упругости четвертого