

гом, а центры включений располагаются на оси стрингера. 4°. Стрингер взаимодействует с пластиной в ее срединной плоскости через включения. Последним допущением исключаются из рассмотрения эксцентricность прикрепления стрингера к пластине относительно ее срединной плоскости и силы трения между пластиной и стрингером.

Введем обозначения: ν , E — соответственно коэффициент Пуассона и модуль Юнга материала пластины, A — жесткость стрингера на растяжение — сжатие, h — толщина пластины, R — расстояние между центрами смежных включений (шаг заклепок), r — радиус включений. Остальные вводимые ниже символы считаются безразмерными: величины с линейной размерностью, погонные усилия в пластине, усилия в стрингере и прикладываемые к центрам включений сосредоточенные силы отнесены соответственно к R , $Eh / (1 + \nu)$, A и $8\pi EhR / (1 + \nu)^2$.

Пусть упругая система отнесена к прямоугольным декартовым координатам x_1, x_2 , расположенным в срединной плоскости пластины, а $z = x_1 + ix_2$ — комплексная переменная ($i = \sqrt{-1}$). Полагая временно стрингер неразрушенным, отделим его мысленно от пластины (разрезая очевидным образом включения) и приложим к центрам $z_m = z_0 + me^{i\beta}$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) включений в пластине и стрингере неизвестные силы взаимодействия $X_m = X_{1m} + iX_{2m}$ и $-X_m$ соответственно. Здесь β — угол наклона стрингера к оси x_1 .

В изолированной пластине поле упругих смещений и погонных усилий определяется формулами Колосова — Мусхелишвили [6]

$$(1.1) \quad \begin{aligned} w(z) &= u_1 + iu_2 = \kappa\varphi(z) - \overline{z\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} \\ N_{11} + N_{22} &= 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] \\ N_{22} - N_{11} + 2iN_{12} &= 2[\overline{z\varphi''(z)} + \psi'(z)], \quad \kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu) \end{aligned}$$

Здесь u_α — смещение вдоль оси x_α ($\alpha = 1, 2$), $N_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) — декартовы компоненты тензора погонных усилий, $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — комплексные потенциалы, определяемые, вообще говоря, из решения плоской задачи теории упругости для плоскости с периодической системой жестких круглых включений. Допущение о малости радиуса заклепок по сравнению с их шагом (практически $\varepsilon = r/R = 0,02 - 0,1$) позволяет ограничиться учетом взаимного влияния включений асимптотически путем использования принципа суперпозиции в виде [6]

$$(1.2) \quad \varphi(z) = \varphi_*(z) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi_m(z), \quad \psi(z) = \psi_*(z) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \psi_m(z)$$

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \varphi_*(z) &= \Gamma z, \quad \psi_*(z) = \Gamma' z \\ \varphi_m(z) &= -X_m \ln(z - z_m) \end{aligned}$$

$$\psi_m(z) = \kappa \overline{X}_m \ln(z - z_m) + X_m \left[\frac{\overline{z}_m}{z - z_m} + \frac{\varepsilon^2}{(z - z_m)^2} \right]$$

$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad 4\Gamma = N_{11}^\infty + N_{22}^\infty;$$

$$2\Gamma' = N_{22}^\infty - N_{11}^\infty + 2iN_{12}^\infty)$$

Здесь $\varphi_*(z)$, $\psi_*(z)$ — потенциалы для плоскости без включений от однородного внешнего поля нагрузок, заданного на бесконечности компонентами тензора постоянных усилий $N_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2$), а $\varphi_m(z)$, $\psi_m(z)$ — потенциалы для плоскости с одним m -м круглым включением, к центру которого приложена сила X_m .

Статические условия сопряжения смежных участков изолированного стрингера в точках z_m ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) имеют вид

$$(1.4) \quad X_m = X_m^* + \omega (N_m - N_{m-1}) e^{i\beta}, \quad \omega = \frac{(1+\nu)^2 A}{8\pi E h R}$$

где X_m^* — комплексный вектор внешней силы, действующей на стрингер в центре заклепки m , N_m — усилие в стрингере на участке m (между заклепками m и $m+1$), а ω — параметр жесткости упругой системы.

Введем с помощью соотношений

$$X_m e^{-i\beta} = P_m + iQ_m, \quad X_m^* e^{-i\beta} = P_m^* + iQ_m^*$$

соответственно осевые (P_m, P_m^*) и поперечные (Q_m, Q_m^*) составляющие сил X_m и X_m^* . Согласно (1.4) $Q_m = Q_m^*$, а

$$(1.5) \quad P_m = P_m^* + \omega (N_m - N_{m-1})$$

В неповрежденной системе условия совместного деформирования пластины и стрингера будут выполнены, если потребовать, чтобы при всех целых m было справедливо равенство

$$\operatorname{Re} \{ [w(z_{m+1}) - w(z_m)] e^{-i\beta} \} = N_m$$

Преобразуя его левую часть с помощью формул (1.1) — (1.5), с учетом малости ε найдем

$$(1.6) \quad \gamma - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma_{m-n} P_n = N_m$$

$$(1.7) \quad \Gamma_0 = -\Gamma_{-1} = -1 + \varepsilon^2 - 2\kappa \ln \varepsilon$$

$$\Gamma_n = -\Gamma_{-n-1} = 2\kappa \ln(1 + n^{-1}) - \varepsilon^2 \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \quad (n \neq 0, -1)$$

$$2\gamma = \frac{1-\nu}{1+\nu} (N_{11}^\infty + N_{22}^\infty) + (N_{11}^\infty - N_{22}^\infty) \cos 2\beta + 2N_{12}^\infty \sin 2\beta$$

При всех целых m совокупность соотношений (1.5) и (1.6) образует бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно искомых величин N_m и P_m . В дальнейшем удобно принять за основные неизвестные реактивные силы P_m . Исключая из упомянутых соотношений усилия N_m , убеждаемся в том, что для определения P_m служит система уравнений

$$(1.8) \quad P_m + \omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{m-n} P_n = P_m^* \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$(1.9) \quad B_0 = 2\Gamma_0 = -2(1 - \varepsilon^2 + 2\kappa \ln \varepsilon)$$

$$B_1 = \Gamma_1 + \Gamma_{-1} = 1 - 1,75\varepsilon^2 + 2\kappa \ln 2\varepsilon$$

$$B_n = \Gamma_n + \Gamma_{-n} = 2\kappa \ln(1 - n^{-2}) + 2\varepsilon^2 \frac{3n^2 - 1}{n^2(n^2 - 1)^2} \quad (|n| \neq 0, 1)$$

Этим завершается постановка задачи о дискретном взаимодействии пластины и неповрежденного стрингера.

Переходя к формулировке аналогичной задачи для однократно поврежденного стрингера, выделим два принципиально возможных варианта его повреждения. В первом варианте будем предполагать, что стрингер разрушен по сечению, проходящему через центр какой-либо заклепки, в результате чего связь стрингера с этой заклепкой утрачена (фиг. 1). Ко второму варианту отнесем случаи, в которых разрушенное сечение стрингера расположено между заклепками и не влияет на связь стрингера с заклепками.

Остановимся сначала на первом варианте повреждения стрингера. Для определенности будем считать, что разрушенное сечение проходит через центр нулевой заклепки. В этом случае уравнения (1.6) сохраняют силу при всех целых $m \neq 0, -1$. Что касается условий сопряжения (1.5), то в них следует положить $N_{-1} = N_0 = 0$. Исключая из системы (1.5), (1.6) (с учетом сделанных оговорок) отличные от нуля усилия N_m , найдем

$$(1.10) \quad P_m + \omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{m-n} P_n = P_m^* \quad (m = \pm 2, \pm 3, \dots)$$

$$(1.11) \quad P_1 + \omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma_{1-n} P_n = P_1^* + \omega \gamma$$

$$P_{-1} - \omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma_{-2-n} P_n = P_{-1}^* - \omega \gamma, \quad P_0 = P_0^*$$

При изучении второго варианта повреждения примем, что стрингер разрушен по какому-то сечению участка -1 . При такой реализации повреждения условия совместности (1.6) остаются справедливыми при всех целых $m \neq -1$, а зависимости (1.5) дополняются очевидным равенством $N_{-1} = 0$. Исключая из этих уравнений усилия N_m ($m \neq -1$), получим

$$(1.12) \quad P_m + \omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{m-n} P_n = P_m^* \quad (m = 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

$$(1.13) \quad P_0 + \omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma_{-n} P_n = P_0^* + \omega \gamma$$

$$P_{-1} - \omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma_{-2-n} P_n = P_{-1}^* - \omega \gamma$$

Для соответствующих вариантов повреждения стрингера системы (1.10), (1.11) и (1.12), (1.13), подобно системе (1.8) для неповрежденного стрингера, позволяют находить реактивные силы P_m . Во всех случаях упругое поле усилий и смещений в пластине определяются по ним в соответствии с формулами (1.1) — (1.3), а отличные от нуля усилия в стрингере — из соотношений (1.5).

2. Решение бесконечных алгебраических систем. Рассмотрим формальные разложения

$$B(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m z^m, \quad \Gamma(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Gamma_m z^m$$

являющиеся преобразованиями Лорана бесконечных последовательностей $\{B_m\}$ и $\{\Gamma_m\}$ соответственно. Можно показать, что эти функции регулярны лишь на единичной окружности C и, согласно (1.7), (1.9), между ними существует зависимость

$$B(\zeta) = (1 - \zeta)\Gamma(\zeta), \quad (\zeta \in C)$$

Предположим, что функции

$$P(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} P_m z^m, \quad P^*(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} P_m^* z^m$$

регулярны, по крайней мере, на единичной окружности C . Для $P(z)$ это допущение оправдывается решением задачи. Что касается $P^*(z)$, то принятое условие регулярности не является ограничительным, так как практически всегда из заданного распределения сил P_m^* следует регулярность $P^*(z)$ в кольце, содержащем C .

По определению обратного преобразования Лорана

$$(2.1) \quad P_m = \frac{1}{2\pi i} \int_C P(\zeta) \zeta^{-m-1} d\zeta \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Аналогичные соотношения имеют место для P_m^* и $P^*(z)$.

Заметим, что в (2.1) и ниже интегрирование по контуру C осуществляется против часовой стрелки.

В случае неповрежденного стрингера система (1.8) с помощью соотношений типа (2.1) приводится к виду

$$(2.2) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C [G(\zeta) P(\zeta) - P^*(\zeta)] \zeta^{-m-1} d\zeta = 0$$

$$(2.3) \quad G(\zeta) = 1 + \omega B(\zeta) = 1 + \omega(1 - \zeta)\Gamma(\zeta) \quad (\zeta \in C)$$

где показатель m пробегает все множество целых чисел. Поэтому можно записать

$$P(\zeta) = G^{-1}(\zeta)P^*(\zeta) \quad (\zeta \in C)$$

Подставляя это выражение в (2.1), найдем, что решение системы (1.8) имеет вид

$$(2.4) \quad P_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{m-n} P_n^* \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Вошедшие сюда величины g_n вычисляются по формулам

$$(2.5) \quad g_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\zeta^{-n-1} d\zeta}{G(\zeta)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos n\sigma}{g(\sigma)} d\sigma \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$g(\sigma) = G(e^{i\sigma}) = 1 + 2\omega \left\{ (\cos \sigma - 1) \left[1 + 2\kappa \ln 2\varepsilon + \right. \right. \\ \left. \left. + \varepsilon^2 \left(\frac{\sigma^2}{2} - \pi\sigma + \frac{\pi^2}{3} \right) \right] + 2\kappa \sum_{m=2}^{\infty} \ln(1 - m^{-2}) (\cos m\sigma - 1) \right\} \\ (\sigma \in [0, \pi])$$

Перейдем к построению решения системы (1.10), (1.11). Ее бесконечная подсистема (1.10), подобно системе (1.8), с помощью соотношений типа (2.1) сводится к уравнениям (2.2), справедливым при любых целых $m \neq 0, \pm 1$. Все эти уравнения будут выполняться, если

$$(2.6) \quad P(\zeta) = P^+(\zeta) + P^-(\zeta) = \\ = G^{-1}(\zeta) [P^*(\zeta) + a_1\zeta + a_0 + a_{-1}\zeta^{-1}] \quad (\zeta \in C)$$

Здесь $P^+(z)$ и $P^-(z)$ — соответственно правильная и главная части функции $P(z)$, а a_1, a_0, a_{-1} — пока неизвестные постоянные, для определения которых служат еще неиспользованные уравнения (1.11).

Первые два из них с помощью соотношений типа (2.1) можно представить в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C [1 + \omega\Gamma(\zeta)] P(\zeta) \zeta^{-2} d\zeta = P_1^* + \omega\gamma \\ \frac{1}{2\pi i} \int_C [1 - \omega\zeta\Gamma(\zeta)] P(\zeta) d\zeta = P_{-1}^* - \omega\gamma$$

Подставляя сюда (2.6), с учетом зависимости (2.3) найдем

$$P^+(1) - P^-(1) = P^{*+}(1) - P^{*-}(1) + 2\omega\gamma - a_1 - a_0 - a_{-1} \\ P^+(1) - P^-(1) = P^{*+}(1) - P^{*-}(1) + 2\omega\gamma + a_1 + a_0 + a_{-1}$$

Здесь $P^{*+}(1)$ и $P^{*-}(1)$ — предельные значения соответственно правильной $P^{*+}(z)$ и главной $P^{*-}(z)$ частей функции $P^*(z)$ в точке $z = 1$.

Последние уравнения равносильны тождествам

$$(2.7) \quad a_1 + a_0 + a_{-1} = 0$$

$$(2.8) \quad P^+(1) - P^-(1) = P^{*+}(1) - P^{*-}(1) + 2\omega\gamma$$

Чтобы преобразовать (2.8) в явную зависимость между искомыми постоянными, необходимо найти функции $P^+(z)$ и $P^-(z)$. В связи с этим заметим, что выражение

$$(2.9) \quad P(\zeta) = P^+(\zeta) + P^-(\zeta) = \\ = G^{-1}(\zeta) [P^*(\zeta) + a_0(1 - \zeta^{-1}) + a_1(\zeta - \zeta^{-1})] \quad (\zeta \in C)$$

вытекающее из формул (2.6) и (2.7), можно трактовать как простейшую задачу Римана — Гильберта. Ее решение, удовлетворяющее очевидному условию $P^-(\infty) = 0$, имеет вид [7]

$$(2.10) \quad P^\pm(z) = \pm [p^\pm(z) + a_0\lambda_0^\pm(z) + a_1\lambda_1^\pm(z)] \quad (z \in D_\pm)$$

Здесь введены кусочно-голоморфные функции

$$(2.11) \quad p^\pm(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{P^*(\zeta) d\zeta}{G(\zeta)(\zeta - z)}, \quad \lambda_0^\pm(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(1 - \zeta^{-1}) d\zeta}{G(\zeta)(\zeta - z)} \\ \lambda_1^\pm(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(\zeta - \zeta^{-1}) d\zeta}{G(\zeta)(\zeta - z)} \quad (z \in D_\pm)$$

и символы D_+ и D_- для областей, расположенных соответственно внутри и вне единичной окружности C .

Формулы Сохоцкого для функций (2.10), (2.11) позволяют привести уравнение (2.8) к виду

$$(2.12) \quad a_0 g_0 + a_1 (g_0 + g_1) = \frac{1}{2} [P^{*+}(1) - P^{*-}(1)] + \omega\gamma - p(1)$$

$$(2.13) \quad 2p(1) = p^+(1) + p^-(1) = \frac{1}{\pi i} \int_C \frac{P^*(\zeta) d\zeta}{G(\zeta)(\zeta-1)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} P_m^* \sum_{n=-m}^m g_n$$

где учтено, что (см. (2.11), (2.5))

$$\lambda_0(1) = \frac{\lambda_0^+(1) + \lambda_0^-(1)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d\zeta}{\zeta G(\zeta)} = g_0$$

$$\lambda_1(1) = \frac{\lambda_1^+(1) + \lambda_1^-(1)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(1+\zeta) d\zeta}{\zeta G(\zeta)} = g_0 + g_1$$

Заметим, что согласно (2.1) и (2.9)

$$(2.14) \quad P_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{m-n} P_n^* + a_0 (g_m - g_{m+1}) + a_1 (g_{m-1} - g_{m+1})$$

($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

Отсюда с учетом последнего уравнения (1.11) получим

$$a_0 = \frac{1}{g_0 - g_1} \left(P_0^* - \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n P_n^* \right)$$

Постоянная a_1 легко определяется теперь из уравнения (2.12).

Заменяя в (2.14) a_0 и a_1 полученными для них выражениями, найдем, что решение системы (1.10), (1.11) имеет вид

$$(2.15) \quad P_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{m-n} P_n^* +$$

$$+ \left(P_0^* - \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n P_n^* \right) \frac{g_0 (g_m - g_{m-1}) + g_1 (g_m - g_{m+1})}{g_0^2 - g_1^2} +$$

$$+ \left[\frac{P^{*+}(1) - P^{*-}(1)}{2} + \omega\gamma - p(1) \right] \frac{g_{m-1} - g_{m+1}}{g_0 + g_1}$$

($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

Аналогичным образом можно построить и решение системы (1.12), (1.13). Однако в этом нет необходимости, так как оно может быть выведено из предыдущих рассуждений, если в них принять $a_1 = 0$. Искомое решение является следствием формул (2.12), (2.14) при $a_1 = 0$ и имеет вид

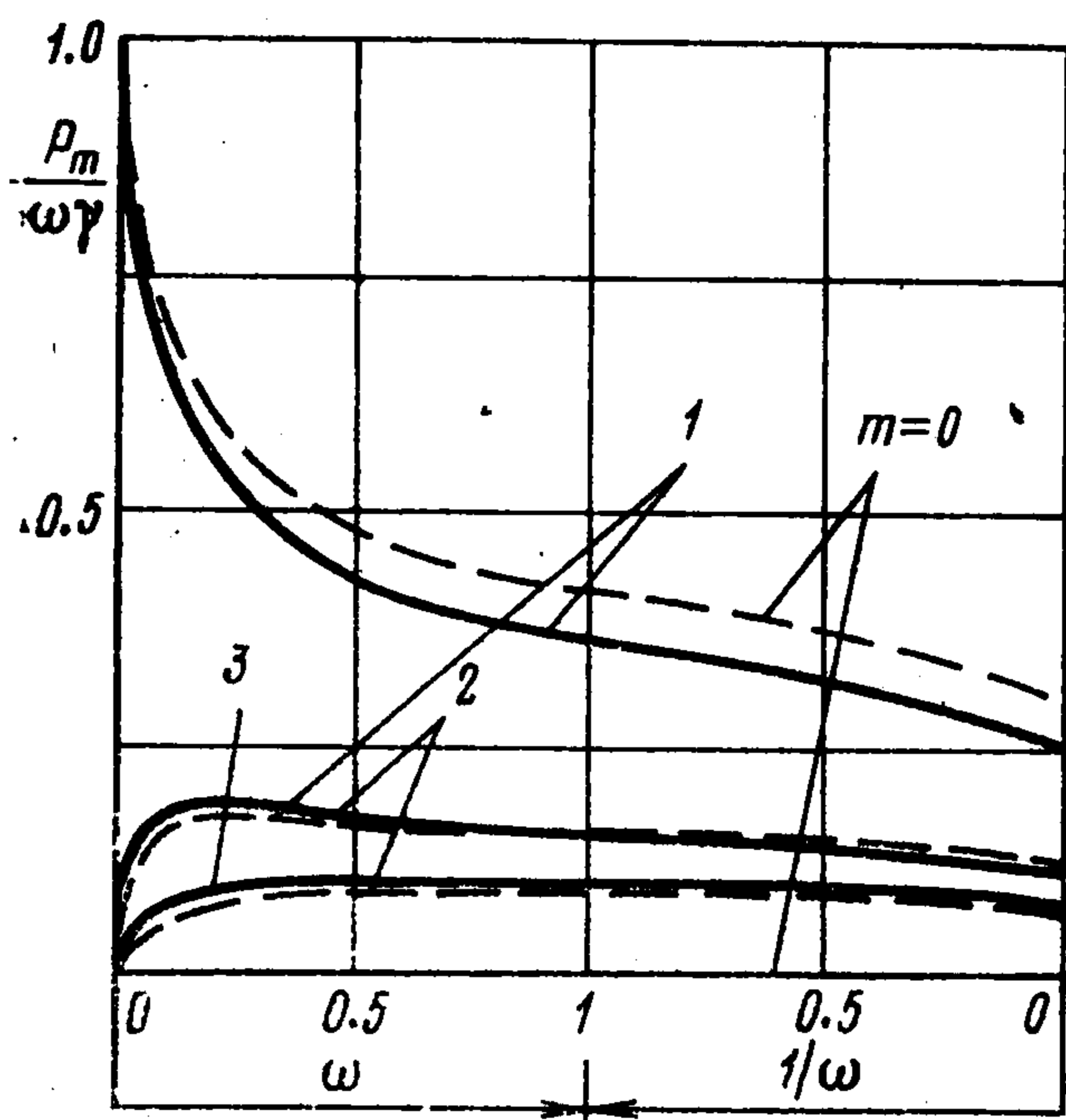
$$(2.16) \quad P_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{m-n} P_n^* +$$

$$+ \left[\frac{P^{*+}(1) - P^{*-}(1)}{2} + \omega\gamma - p(1) \right] \frac{g_m - g_{m+1}}{g_0} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Действительно, бесконечная подсистема (1.12) с помощью соотношений типа (2.1) вновь сводится к уравнениям (2.2), справедливым теперь при всех целых $m \neq 0, -1$. Очевидно, что функция (2.6) будет удовлетворять этим уравнениям при условии $a_1 = 0$.

Можно, далее, убедиться и в том, что с помощью этой функции уравнения (1.13), подобно первому и второму уравнениям (1.11), преобразуются в тождества (2.7) (при $a_1 = 0$) и (2.8). Проследив дальнейший ход построения решения системы (1.10), (1.11), приходим к формуле (2.16).

Решения (2.15) и (2.16) показывают, что вычисление реактивных сил P_m в системе с поврежденным стрингером свелось, как и в неповрежденной системе, к квадратурам (2.5). Сравнивая эти решения с формулой (2.4), убеждаемся в том, что первые слагаемые в них отвечают системе с неповрежденным стрингером, а влияние повреждений [описывается последующими слагаемыми].



Фиг. 2

Следует подчеркнуть, что все предыдущие рассуждения, включая окончательные результаты (2.15), (2.16), справедливы для оговоренных выше типов повреждения стрингера, место расположения которых относительно принятой нумерации заклепок было строго фиксировано. Последнее не ограничивает общность полученных результатов, которые, как легко видеть, можно распространить на случай произвольного расположения повреждения стрингера относительно нумерации заклепок путем сдвига по индексу. Так, если стрингер разрушен по заклепке s , то решение получается из формулы (2.15) после замены в ее

правой части m на $m - s$. Аналогично, чтобы найти решение задачи для стрингера, поврежденного [между заклепками в пролете s , достаточно в правой части формулы (2.16) заменить m на $m - s - 1$.

В заключение отметим, что изложенный подход позволяет решать и более сложные задачи о дискретном взаимодействии неограниченной пластины и многократно поврежденного бесконечного стрингера.

3. Некоторые численные результаты. В качестве примера рассмотрим случай, когда на упругую систему действует лишь внешнее поле нагрузок пластины. Тогда $P_m^* = 0$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), $p(1) = 0$ (см. (2.13)) и согласно (2.15), (2.16)

$$(3.1) \quad \frac{P_m}{\omega\gamma} = \frac{g_{m-1} - g_{m+1}}{g_0 + g_1} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

если стрингер поврежден по нулевой заклепке, и

$$(3.2) \quad \frac{P_m}{\omega\gamma} = \frac{g_m - g_{m+1}}{g_0} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

если стрингер разрушен между заклепками на участке -1 .

Некоторые результаты вычисления реактивных сил в наиболее нагруженных заклепках при $\nu = 1/3$ и $\varepsilon = 0,1$ представлены на фиг. 2; сплошные линии отвечают формуле (3.1), а штриховые — формуле (3.2). Заметим, что при таком же нагружении упругой системы с неповрежденным стрингером реактивные силы во всех заклепках равны нулю (см. (2.4)).

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыбаков Л. С., Черепанов Г. П. Дискретное взаимодействие пластины с полубесконечным стрингером. — ПММ, 1977, т. 41, вып. 2, с. 322.
2. Черепанов Г. П., Рыбаков Л. С. К расчету клепаных панелей. — Прикл. механика, 1977, т. 13, № 8, с. 3.
3. Образцов И. Ф., Рыбаков Л. С., Лукашина Н. В. О дискретном взаимодействии пластины и стержня. — Прикл. механика, 1979, т. 15, № 11, с. 82.
4. Лукашина Н. В., Образцов И. Ф., Рыбаков Л. С. Дискретное взаимодействие бесконечной пластины и полубесконечной балки. — Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 4, с. 170.
5. Budiansky B., Wu Tai Te. Transfer of load to a sheet from a rivet — attached stiffener. — J. Math. and Phys., 1961, v. 40, No. 2, p. 142.
6. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966, 708 с.
7. Газов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.

Поступила в редакцию
9.VI.1980