Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 1, 1981

УДК 539.3

ЖЕСТКИЙ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫЙ ДИСК И ИГЛА В АНИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

Миренкова Г.Н., Соснина Э.Г.

(Новосибирск)

Решена задача о концентрации напряжений на абсолютно жестком эллипсоидальном диске и игле в произвольной анизотропной упругой среде при действии однородного внешнего поля. Под эллипсоидальным диском (иглой) понимается эллипсоидальное включение, у которого один размер мал (велик) по сравнению с двумя другими. Получены и исследованы явные выражения для напряжений на всей поверхности жестких включений. Показано, что напряжения сингулярны (велики по сравнению с единицей, но конечны) в окрестности торца иглы при растяжении и сдвиге, действующем в плоскости кромки. Приведены явные выражения для напряжений на поверхности в частном случае трансверсально-изотропной среды.

Используется общее решение задачи о концентрации напряжений на поверхности эллипсоидальной неоднородности [1] и метод разложения решения по малому параметру]2], основанный на применении теории обобщенных функций, специальных методов выделения сингулярностей и регуляризации расходящихся интегралов.

1. Напряжения $\sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{n})$ на поверхности эллипсоидального включения в однородном внешнем поле $\sigma_0^{\lambda\mu}$ имеют вид

$$\sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{n}) = F^{\alpha\beta\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\lambda\mu}(\mathbf{n})\,\sigma_0^{\lambda\mu} \tag{1.1}$$

Здесь $F(\mathbf{n})$ — тензорный коэффициент концентрации напряжений, зависящий от нормали $\mathbf{n} = \{n_1, n_2, n_3\}$ к поверхности эллипсоида с полуосями a_α $(\alpha = 1, 2, 3)$ и представимый в виде произведения двух сомножителей

$$E^{\alpha\beta\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\lambda\mu}(\mathbf{n}) = B^{\alpha\beta\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\sigma\tau}(\mathbf{n})\,R^{\sigma\tau\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\lambda\mu} \tag{1.2}$$

Первый из сомножителей $B(\mathbf{n})$ от параметров эллипсоида зависит неявно через нормаль $\mathbf{n}$ и при переходе к предельным случаям не содержит сингулярностей. Для жесткого включения

$$B^{\alpha\beta\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\sigma\tau}(\mathbf{n}) = c^{\alpha\beta\varkappa\rho}K_{\varkappa\rho\sigma\tau}(\mathbf{n})$$

где $c^{\alpha\beta\varkappa\rho}$ — тензор упругих констант внешней среды, а тензор $K(\mathbf{n})$ для произвольной анизотропной среды строится в явном виде через фурье-образ тензора Грина. В системе координат $\{x^1, x^2, x^3\}$, жестко связанной с эллипсоидом, выражение тензора $K(\mathbf{n})$ для изотропной среды приведено в работе [1], для ортотропной среды компоненты $K(\mathbf{n})$ имеют вид

$$K_{1111}(\mathbf{n}) = \frac{n_1^2}{L}\{c_{55}c_{66}n_1^4 + c_{44}(c_{22}n_2^4 + c_{33}n_3^4) +$$
$$+ n_2^2n_3^2(\Delta_{11} - 2c_{23}c_{44}) + n_1^4[n_2^2(c_{22}c_{55} + c_{44}c_{66}) +$$
$$+ n_3^2(c_{33}c_{66} + c_{44}c_{66})]\}$$

$$K_{1122}(\mathbf{n}) = \frac{n_1^2 n_2^2}{L} \{n_3^2 [(c_{13} + c_{55})(c_{23} + c_{44}) -$$
$$- c_{33}(c_{12} + c_{66})] - (c_{12} + c_{66})(c_{55} n_1^2 + c_{44} n_2^2)\}$$
$$K_{1212}(\mathbf{n}) = \frac{1}{L} \{c_{33} n_3^4 (c_{55} n_1^2 + c_{44} n_2^2) + n_1^4 [n_2^2 (c_{11} c_{44} - 2c_{12} c_{55}) +$$
$$+ n_3^2 (\Delta_{22} - 2c_{13} c_{55})] + n_2^4 [n_1^2 (c_{22} c_{55} - 2c_{12} c_{44}) +$$
$$+ n_3^2 (\Delta_{11} - 2c_{23} c_{44})] + 2n_1^2 n_2^2 n_3^2 [\Delta_{12} + c_{23} c_{55} + c_{13} c_{44} +$$
$$+ 2c_{44} c_{55} + c_{11} c_{55} n_1^6 + c_{22} c_{44} n_2^6\}$$
$$K_{1213}(\mathbf{n}) = \frac{n_2 n_3}{L} \{n_2^2 n_3^2 (\Delta_{11} - 2c_{23} c_{44}) + n_1^2 (n_2^2 \Delta_{13} + n_3^2 \Delta_{12}) +$$
$$+ c_{44}(c_{22} n_2^4 + c_{33} n_3^4) + n_1^4 (\Delta_{23} - c_{11} c_{44})\}$$
$$K_{1211}(\mathbf{n}) = \frac{n_1 n_2}{2L} \{c_{44}(c_{22} n_2^4 + c_{33} n_3^4) - c_{12} c_{55} n_1^4 +$$
$$+ n_1^2 n_3^2 (\Delta_{12} + c_{55} c_{23} + c_{44} c_{13} + 2c_{44} c_{55}) +$$
$$+ n_1^2 n_2^2 (c_{22} c_{55} - c_{12} c_{44}) + n_2^2 n_3^2 (\Delta_{11} - 2c_{23} c_{44})\}$$
$$K_{1233}(\mathbf{n}) = \frac{n_1^2 n_2^2 n_3^2}{2L} \{n_1^2 (\Delta_{23} + c_{12} c_{55} - c_{11} c_{44}) +$$
$$+ n_2^2 (\Delta_{12} + c_{12} c_{44} - c_{22} c_{55}) - n_3^2 (c_{13} c_{44} + c_{23} c_{55} + 2c_{44} c_{55})\}$$
$$L = c_{11} c_{55} c_{66} n_1^6 + c_{22} c_{44} c_{66} n_2^6 + c_{33} c_{44} c_{55} n_3^6 +$$
$$+ n_1^4 \{n_2^2 [c_{55} \Delta_{33} + c_{66}(c_{11} c_{44} - 2c_{12} c_{55}) +$$
$$+ n_3^2 [c_{66} \Delta_{22} + c_{55}(c_{11} c_{44} - 2c_{13} c_{66})\} + n_2^4 \{n_1^2 [c_{44} \Delta_{33} + c_{66}(c_{22} c_{55} -$$
$$- 2c_{12} c_{55})] + n_3^2 [c_{66} \Delta_{11} + c_{44}(c_{22} c_{55} - 2c_{23} c_{66})]\} +$$
$$+ n_3^4 \{n_2^2 [c_{55} \Delta_{11} + c_{44}(c_{33} c_{66} - 2c_{23} c_{55})] + n_1^2 (c_{44} \Delta_{22} + c_{55}(c_{33} c_{66} -$$
$$- 2c_{13} c_{44})]\} + n_1^2 n_2^2 n_3^2 [\Delta + 2c_{44} c_{55} c_{66} + 2c_{44}(\Delta_{23} c_{13} c_{66}) +$$
$$+ 2c_{55}(\Delta_{13} + c_{12} c_{44}) + 2c_{66}(\Delta_{12} + c_{23} c_{55})]$$
$$c_{\alpha\beta} = c^{\alpha\alpha\beta\beta} \ (\alpha, \beta = 1, 2, 3), \quad c_{44} = c^{2323}, \quad c_{55} = c^{1313}, \quad c_{66} = c^{1212}$$

Здесь Δ и $\Delta_{\alpha\beta}$ — соответственно определитель и алгебраическое дополнение элемента $c_{\alpha\beta}$ матрицы $\| c_{\alpha\beta} \|$ $(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$. Остальные компоненты тензора $K_{\alpha\beta\lambda\mu}(\mathbf{n})$ получаются из данных циклической перестановкой индексов 1, 2, 3 и 4, 5, 6.

Второй сомножитель R в (1.2) существенно зависит от формы включения. Для эллипсоида это постоянный тензор орторомбической структуры, обратный тензору

$$B = \frac{a_1 a_2 a_3}{4\pi} \int_\Omega B(\mathbf{n}) \frac{dn}{(\mathbf{n}a^2\mathbf{n})^{3/2}}$$
$$\mathbf{n}a^2\mathbf{n} = a_1^2 n_1^2 + a_2^2 n_2^2 + a_3^2 n_3^2$$

При переходе к диску и игле тензор R становится сингулярным.

Для описания геометрии рассматриваемых предельных случаев, как и в [2], введем безразмерные параметры

$$\alpha = a_2/a_1, \quad \xi = a_3/a_2 \ (a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3)$$

причем $\alpha \ll 1$, $\xi \sim 1$ соответствует игле, $\xi \ll 1$, $\alpha \sim 1$ — диску, $\alpha \ll 1$, $\xi \ll 1$ — вытянутому диску.

Решение задачи о концентрации напряжений на игле и диске сводится к вычислению главных членов разложения тензора R по соответствующему малому параметру. Решение ищется в классе обобщенных функций.

2. Рассмотрим сначала жесткий диск ($\xi \ll 1$, $\alpha \sim 1$). Применяя предложенный в [2] метод разложения тензора B по малому параметру ξ, получим

$$B = B_0 + \xi B_1 + O(\xi^2), \quad B_0 = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{B(\varphi, \pm 1)'}{\cos^2\varphi + \alpha^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

$$B_1 = \frac{\alpha^2}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\cos^2\varphi + \alpha^2\sin^2\varphi)^{3/2}}\int_{-1}^{1} \frac{B(\varphi, t) - B(\varphi, \pm 1)}{(1-t^2)^{3/2}}\,dt$$

$$B(\varphi, t) \equiv B(\mathbf{n}(\varphi, t)), \quad t = \cos\theta$$

(φ, θ — сферические координаты с полярной осью, направленной по оси x^3).

Отметим, что тензор B_0 для произвольной анизотропной среды легко вычисляется и равен значению тензора $B(\mathbf{n})$ при $n_1 = n_2 = 0$, $n_3 = 1$. В частности, для ортотропной среды отличные от нуля компоненты B_0 имеют вид

$$B_{0\cdot\cdot 33}^{11\cdot\cdot} = \frac{c_{13}}{c_{33}}, \quad B_{0\cdot\cdot 33}^{22\cdot\cdot} = \frac{c_{23}}{c_{33}}, \quad B_{0\cdot\cdot 33}^{33\cdot\cdot} = 1, \quad B_{0\cdot\cdot 13}^{13\cdot\cdot} = B_{0\cdot\cdot 23}^{23\cdot\cdot} = \frac{1}{2}$$

Это позволяет, не производя конкретных вычислений коэффициента B_1, для произвольной анизотропной среды установить порядок сингулярностей в компонентах коэффициента концентрации и соответственно напряжений на поверхности диска. Действительно, компоненты тензора B имеют следующие порядки по ξ:

$$B_{\cdot\cdot\beta\beta}^{\alpha\alpha\cdot\cdot} \sim B_{\cdot\cdot 12}^{12\cdot\cdot} \sim \xi$$

$$B_{\cdot\cdot 33}^{\alpha\alpha\cdot\cdot} \sim B_{\cdot\cdot 13}^{13\cdot\cdot} \sim B_{\cdot\cdot 23}^{23\cdot\cdot} \sim \mathrm{const} + O(\xi) \quad (\alpha = 1, 2, 3;\ \beta = 1, 2)$$

Компоненты обратного тензора R имеют сингулярности порядка ξ^{-1} в компонентах $R_{\cdot\cdot\alpha\alpha}^{11\cdot\cdot}$, $R_{\cdot\cdot\alpha\alpha}^{22\cdot\cdot}$, $R_{\cdot\cdot 12}^{12\cdot\cdot}$.

Из формул (1.1), (1.2), учитывая лишь сингулярные члены, получим выражения для напряжений на поверхности диска

$$\sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{n}) = [B_{\cdot\cdot 11}^{\alpha\beta\cdot\cdot}(\mathbf{n})R_{\cdot\cdot\lambda\lambda}^{11\cdot\cdot} + B_{\cdot\cdot 22}^{\alpha\beta\cdot\cdot}(\mathbf{n})R_{\cdot\cdot\lambda\lambda}^{22\cdot\cdot}]\sigma_0^{\lambda\lambda} + 4B_{\cdot\cdot 12}^{\alpha\beta\cdot\cdot}(\mathbf{n})R_{\cdot\cdot 12}^{12\cdot\cdot}\sigma_0^{12}$$

Отсюда видно, что сингулярности в напряжениях могут появиться при действии внешнего растяжения $\sigma_0^{\lambda\lambda}$ ($\lambda = 1, 2, 3$) и сдвига σ_0^{12}, действующего в плоскости кромки диска ($n_3 = 0$)

$$\sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{n}) = [B_{\cdot\cdot 11}^{\alpha\beta\cdot\cdot}(\mathbf{n})R_{\cdot\cdot\lambda\lambda}^{11\cdot\cdot} + B_{\cdot\cdot 22}^{\alpha\beta\cdot\cdot}(\mathbf{n})R_{\cdot\cdot\lambda\lambda}^{22\cdot\cdot}]\sigma_0^{\lambda\lambda}, \quad \sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{n}) = 4B_{\cdot\cdot 12}^{\alpha\beta\cdot\cdot}(\mathbf{n})R_{\cdot\cdot 12}^{12\cdot\cdot}\sigma_0^{12}$$

Учитывая структуру тензора $B(\mathbf{n})$, получаем, что поведение сингулярных составляющих напряжений определяется следующими величинами:

при растяжении

$$\sigma^{\alpha\alpha}(\mathbf{n}) \sim [n_1^2 R_{\cdot\cdot\lambda\lambda}^{11\cdot\cdot} + n_2^2 R_{\cdot\cdot\lambda\lambda}^{22\cdot\cdot}]\sigma_0^{\lambda\lambda} \sim (n_1^2 + n_2^2)\xi^{-1}\sigma_0^{\lambda\lambda}$$

$$\sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{n}) \sim n_\alpha n_\beta [R_{\cdot\cdot\lambda\lambda}^{11\cdot\cdot} + R_{\cdot\cdot\lambda\lambda}^{22\cdot\cdot}]\sigma_0^{\lambda\lambda} \sim n_\alpha n_\beta \xi^{-1}\sigma_0^{\lambda\lambda}, \quad \alpha \neq \beta$$

при сдвиге

$$\sigma^{\alpha\alpha}(\mathbf{n}) \sim n_1 n_2 \xi^{-1}\sigma_0^{12}, \quad \sigma^{12}(\mathbf{n}) \sim (n_1^2 + n_2^2)\xi^{-1}\sigma_0^{12}$$

$$\sigma^{13}(\mathbf{n}) \sim n_1 n_3 \xi^{-1}\sigma_0^{12}, \quad \sigma^{23}(\mathbf{n}) \sim n_2 n_3 \xi^{-1}\sigma_0^{12}$$

Из полученных формул следует, что на кромке диска ($n_1^2 + n_2^2 = 1$) и в ее окрестности сингулярности возникают в напряжениях $\sigma^{\alpha\alpha}(\mathbf{n})$ ($\alpha = 1, 2, 3$) и $\sigma^{12}(\mathbf{n})$, а в напряжениях $\sigma^{13}(\mathbf{n})$ и $\sigma^{23}(\mathbf{n})$ при сдвиге $\sigma_0{}^{12}$ имеет место явление всплеска напряжений (напряжения достигают максимума в окрестности кромки, хотя на самой кромке они равны нулю).

3. Рассмотрим иглу ($\alpha \ll 1$, $\xi \sim 1$). Проводя преобразования в тензоре B, аналогичные преобразованиям для полой иглы [2], и применяя метод регуляризации интегралов от обобщенных однородных функций (см. [3], с. 385), получим следующее разложение для тензора B:

$$B = B_0 + B_1\alpha^2\ln\alpha + O(\alpha^2) \tag{3.1}$$

$$B_0 = \frac{\xi}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{B(\varphi, 0)}{\cos^2\varphi + \xi^2\sin^2\varphi}d, \quad \varphi B_1 = -\int_0^{2\pi} B_{t^2}''(\varphi, 0)\,d\varphi$$

$$B(\varphi, 0) \equiv B(\mathbf{n}(\varphi, t))|_{t=0}, \quad t = \cos\theta$$

Здесь φ, θ — сферические координаты с полярной осью, направленной по оси x^1.

В отличие от полой иглы для вычисления главного члена разложения тензора R в B необходимо учесть по крайней мере два первых члена, так как тензор B_0 не имеет обратного.

Пользуясь разложением (3.1), устанавливаем, что компоненты $B^{\beta\beta\cdot\cdot}_{\cdot\cdot 11}$ тензора B имеют порядок $\alpha^2\ln\alpha$, а все остальные порядка [const + $+ O(\alpha^2\ln\alpha)$]. Соответственно в тензоре R сингулярность порядка $(\alpha^2\ln\alpha)^{-1}$ имеет место в компонентах $R^{11\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\beta\beta}$ ($\beta = 1, 2, 3$).

Из формул (1.1), (1.2) получим сингулярные составляющие напряжений на поверхности иглы

$$\sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{n}) = B^{\alpha\beta\cdot\cdot}_{\cdot\cdot 11}(\mathbf{n})\,R^{11\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\lambda\lambda}\sigma_0^{\lambda\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, 3)$$

Отсюда видно, что сингулярные напряжения на поверхности иглы возникают только при действии внешних растягивающих усилий. Чистый сдвиг не вызывает сингулярностей в напряжениях. Учитывая структуру тензора $B(\mathbf{n})$, можно показать, что поведение напряжений на поверхности иглы определяется следующими величинами:

$$\sigma^{\beta\beta}(\mathbf{n}) \sim n_1^2(\alpha^2\ln\alpha)^{-1}\sigma_0^{\lambda\lambda} \quad (\beta = 1, 2, 3)$$

$$\sigma^{23}(\mathbf{n}) \sim n_1^2 n_2 n_3(\alpha^2\ln\alpha)^{-1}\sigma_0^{\lambda\lambda}$$

$$\sigma^{12}(\mathbf{n}) \sim n_1 n_2(\alpha^2\ln\alpha)^{-1}\sigma_0^{\lambda\lambda}, \quad \sigma^{13}(n) \sim n_1 n_3(\alpha^2\ln\alpha)^{-1}\sigma_0^{\lambda\lambda}$$

Анализируя полученные выражения, находим, что напряжения $\sigma^{\beta\beta}(\mathbf{n})$ сингулярны в торце иглы ($n_1 = 1$) и ее окрестности, а в компонентах $\sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{n})$ ($\alpha \neq \beta$) в окрестности торцов имеет место явление всплеска напряжений.

4. Рассмотрим представляющий самостоятельный интерес случай вытянутого диска ($\alpha \ll 1$, $\xi \ll 1$). Разложения тензоров B и R для вытянутого диска можно получить предельным переходом из формул для диска конечных размеров при $\alpha \to 0$ или из формул для иглы при $\xi \to 0$.

Переходя, например, в (3.1) к пределу при $\xi \to 0$, получим

$$B = B_0 + B_1\xi + B_2\xi\alpha^2 \ln\alpha + \ldots$$

$$B_0 = B(\varphi, t)\big|_{\varphi=\pi/2,\, t=0} = B\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

$$B_1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{B(\varphi, 0) - B\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)}{\cos^2\varphi}\, d\varphi, \quad B_2 = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} B_{t^2}''(\varphi, 0)\, d\varphi$$

Здесь выражение для B_1 записано в регуляризованной форме. Проводя рассуждения, аналогичные предыдущим, устанавливаем, что качественная картина поведения напряжений на поверхности вытянутого диска такая же, как и в случае диска конечных размеров, т. е. сингулярности в напряжениях имеют место на кромке диска и в ее окрестности. Однако если при сдвиговых усилиях порядки сингулярностей в обоих случаях одинаковы, то при растяжении напряжения порядка ξ^{-1} на вытянутом диске имеют место только в боковых точках кромки, возрастая до величин порядка $(\xi\alpha^2 \ln\alpha)^{-1}$ в окрестности торцов.

Отметим, что на жестких включениях в отличие от полостей [2] порядок сингулярности в напряжениях существенно зависит от количества малых параметров, описывающих геометрию включения: сингулярности на игле и диске характеризуются одним малым параметром, на вытянутом — двумя.

5. В заключение приведем явные выражения для напряжений вдоль главных сечений $n_1 = 0$, $n_2 = 0$ поверхности жестких включений в трансверсально-изотропной среде. Запишем напряжения в локальной системе координат, связанной в каждой точке поверхности с нормалью n следующим образом:

$$\mathbf{e}_{3'} = \mathbf{n}, \quad \mathbf{e}_{1'} = \frac{\mathbf{n}\times\mathbf{e}_3}{\sqrt{n_1^2+n_2^2}}, \quad \mathbf{e}_{2'} = \frac{\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{e}_3)}{\sqrt{n_1^2+n_2^2}}$$

($\mathbf{e}_\alpha$ — орты системы координат x^α, $\mathbf{e}_{\alpha'}$ — орты локальной системы). Тогда напряжение $\sigma^{3'3'}(\mathbf{n})$ всегда направлено по нормали к поверхности, $\sigma^{1'1'}(\mathbf{n})$ — перпендикулярно плоскости сечения, $\sigma^{2'2'}(\mathbf{n})$ — вдоль контура сечения.

Ввиду громоздкости общих выражений приведем формулы для напряжений $\sigma^{\alpha'\beta'}(\mathbf{n})$ лишь с учетом сингулярных членов. В сечении $n_2 = 0$ для ортотропной среды они имеют вид

(5.1)
$$\sigma^{1'1'}(\mathbf{n}) = \frac{n_1^2}{f(\mathbf{n})}\left[n_1^2 c_{12}c_{55} - n_3^2(\Delta_{12} + c_{23}c_{55})\right] R^{11\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\alpha\alpha}\sigma_0^{\alpha\alpha}$$

$$\sigma^{2'2'}(\mathbf{n}) = \frac{n_1^2}{f(\mathbf{n})}\left[n_1^4 c_{13}c_{55} + (\Delta_{22} - c_{55}(c_{13} + 2c_{33}))\, n_3^4 + \right.$$
$$\left. + n_1^2 n_3^2 c_{55}(c_{11} - c_{33} + 2c_{13})\right] R^{11\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\alpha\alpha}\sigma_0^{\alpha\alpha}$$

$$\sigma^{3'3'}(\mathbf{n}) = n_1^2 R^{11\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\alpha\alpha}\sigma_0^{\alpha\alpha} + 4n_1 n_2 R^{12\cdot\cdot}_{\cdot\cdot12}\sigma_0^{12}, \quad \sigma^{1'2'}(\mathbf{n}) = \frac{2n_1^2 n_3(c_{44} - c_{66})}{c_{44}n_3^2 + c_{66}n_1^2} R^{12\cdot\cdot}_{\cdot\cdot12}$$

$$\sigma^{2'3'}(\mathbf{n}) = n_1 n_3 R^{11\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\alpha\alpha}\sigma_0^{\alpha\alpha}, \quad \sigma^{1'3'}(\mathbf{n}) = -2n_1 R^{12\cdot\cdot}_{\cdot\cdot12}\sigma_0^{12}$$

$$f(\mathbf{n}) = c_{55}(c_{11}n_1^4 + c_{33}n_3^4) + (\Delta_{22} - 2c_{13}c_{55})n_1^2 n_3^2$$

Чтобы получить напряжения $\sigma^{\alpha'\beta'}(\mathbf{n})$ в сечении $n_1 = 0$, нужно в правых частях формул (5.1) заменить индексы $1 \leftrightarrow 2$, $4 \leftrightarrow 5$.

Для трансверсально-изотропной среды с осью упругой симметрии, направленной по оси x^1, компоненты $c_{\alpha\beta}$ равны

$$c_{11} = E_1(1 - \nu_1^2)\Delta_1, \qquad c_{22} = c_{33} = E_1(\rho - \nu_1^2)\Delta_1$$
$$c_{12} = c_{13} = \nu_2 E_1(1 + \nu_1)\Delta_1, \quad c_{23} = E_1(\nu_1\rho + \nu_2^2)\Delta_1$$
$$c_{44} = {}^1/_2(c_{22} - c_{23}), \qquad c_{55} = c_{66} = G$$
$$\rho = E_1 / E_2, \quad \Delta_1 = (1 + \nu_1)^{-1}[\rho(1 - \nu_1) - 2\nu_2^2]^{-1}$$

Здесь E_1, ν_1 и E_2, ν_2 — модули Юнга и коэффициенты Пуассона среды в плоскости изотропии и направлении оси упругой симметрии соответственно, G — модуль сдвига в направлении оси симметрии.

Компоненты тензора R для вытянутого диска имеют вид

$$R^{11\cdot\cdot}_{\cdot\cdot11} = \frac{1}{\xi}\frac{G}{E_2}\left\{\frac{1}{\alpha^2|\ln\alpha|} + \frac{(1-g)(1-\nu_1+g)(1-\nu_1)}{4\varkappa(3-\nu_1)}\right\} \tag{5.2}$$

$$R^{11\cdot\cdot}_{\cdot\cdot22} = -\frac{1}{\xi}\frac{G}{E_2}\left\{\frac{\nu_2}{\alpha^2|\ln\alpha|} + \frac{(1-\nu_1+g)(\nu_2-4\varkappa)}{4\varkappa(3-\nu_1)}\right\}$$

$$R^{11\cdot\cdot}_{\cdot\cdot33} = -\frac{1}{\xi}\frac{G}{E_1}\left\{\frac{\nu_2}{\alpha^2|\ln\alpha|} + \frac{(1-\nu_1+g)(\nu_2+4\nu_1\varkappa)}{4\varkappa(3-\nu_1)}\right\}$$

$$R^{22\cdot\cdot}_{\cdot\cdot11} = \frac{1}{\xi}\frac{G}{E_2}\frac{g(1-\nu_1)}{3-\nu_1}, \quad R^{22\cdot\cdot}_{\cdot\cdot22} = \frac{1}{\xi}\frac{G}{E_1}\frac{4\varkappa-\nu_2}{3-\nu_1}$$

$$R^{22\cdot\cdot}_{\cdot\cdot33} = -\frac{1}{\xi}\frac{G}{E_1}\frac{4\nu_1\varkappa}{3-\nu_1}, \quad R^{12\cdot\cdot}_{\cdot\cdot12} = \frac{1}{2\xi}$$

$$g = \frac{E_2\nu_2}{G(1+\nu_1)}, \quad \varkappa = \frac{E_1}{2G(1+\nu_1)}$$

Для иглы

$$R^{11\cdot\cdot}_{\cdot\cdot22} = R^{11\cdot\cdot}_{\cdot\cdot33} = -\nu_2, \quad R^{11\cdot\cdot}_{\cdot\cdot11} = -\frac{1}{\alpha^2\ln\alpha}\frac{G\nu_2}{\xi E_1} \tag{5.3}$$

В изотропном случае $\sigma^{\alpha'\beta'}(\mathbf{n})$ получаются из (5.1)—(5.3) при $\varkappa = 1$, $g = 2\nu$, $G/E_1 = G/E_2 = {}^1/_2(1 + \nu)$, где ν — коэффициент Пуассона.

В осесимметричной задаче ($\xi = 1$, $\sigma_0^{22} = \sigma_0^{33}$, $\sigma_0^{\alpha\beta} = 0$ $(\alpha \neq \beta)$) выражения (5.1), (5.3) совпадает с известными [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кунин И. А., Соснина Э. Г.* Концентрация напряжений на эллипсоидальной неоднородности в анизотропной упругой среде.— ПММ, 1973, т. 37, вып. 2.
2. *Кунин И. А., Миренкова Г. Н., Соснина Э. Г.* Эллипсоидальная трещина и игла в анизотропной упругой среде.— ПММ, 1973, т. 37, вып. 3.
3. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959.
4. *Вольперт В. С.* Концентрация напряжений около эллипсоидальной полости или включения в трансверсально-изотропном теле.— Тр. Новосиб. ин-та инж. ж.-д. трансп., 1972, вып. 137.

Поступила в редакцию
11.VI.1979