Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 1, 1981

УДК 539.3

НЕКОТОРЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДВУМЕРНОЙ СТАТИЧЕСКОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Шачнев В. А.

(Москва)

Получены точные решения специальных граничных задач линейной термоупругости однородного анизотропного тела цилиндрической формы в случае, когда на контуре поперечного сечения заданы усилие и перемещение в определенных направлениях. Эти направления могут согласованно меняться вдоль контура. Точные решения специальных задач используются в качестве представлений решений других граничных задач и для сведения граничной задачи к решению некоторого одномерного сингулярного интегрального уравнения. В качестве примера получено интегральное уравнение для ортотропной полосы.

1. Рассмотрим однородное анизотропное тело в форме цилиндра с произвольным поперечным сечением, на которое действуют силовые и температурные нагрузки, не меняющиеся в направлении образующей цилиндрической поверхности. Введем прямоугольную систему координат, так чтобы две оси были расположены в плоскости поперечного сечения, а третья была направлена вдоль образующей цилиндра. Тогда распределенные по граничной поверхности заданные усилия p_i $(i = 1, 2, 3)$ и относительная температура ϑ будут функциями только двух первых координат, т. е. $p_i = p_i(x_1, x_2), \vartheta = \vartheta(x_1, x_2)$. Предполагается, что усилия p_i удовлетворяют условиям равновесия на граничной поверхности.

Предположим, что отвечающие нагрузкам напряжения p_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ также двумерны. Тогда они удовлетворяют уравнениям равновесия вида

$$(1.1)\qquad \sum_{j=1}^{2} \partial_j p_{ij} = 0, \quad p_{ji} = p_{ij}$$

Здесь ∂_j — оператор частного дифференцирования по x_j (массовые силы не учитываются, их можно учесть с помощью сингулярных решений для неограниченной среды).

Для тела с прямолинейной анизотропией определяющие соотношения запишем в разрешенном относительно деформаций виде

$$(1.2)\qquad \varepsilon_{ij} = \sum_{k,\, l=1}^{3} \alpha_{ijkl} p_{kl} + \delta_{ij}\alpha_i\vartheta, \quad i, j = 1, 2, 3$$

Здесь коэффициенты α_{ijkl} удовлетворяют соотношениям симметрии $\alpha_{ijlk} = \alpha_{ijkl}$, $\alpha_{jikl} = \alpha_{ijkl}$, α_i — коэффициенты линейного расширения. Заметим, что здесь не предполагается симметрия вида $\alpha_{klij} = \alpha_{ijkl}$, поскольку существующие экспериментальные значения коэффициентов часто не удовлетворяют этому условию.

Поскольку p_{33} не входит в уравнение (1.1), исключим его и из соотношений (1.2). В результате будем иметь следующие определяющие соотношения:

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{k,\,l=1}^{3} a_{ijkl}p_{kl} + a_{ij}\vartheta + a_{ij0}\varepsilon_{33} \tag{1.3}$$

$$a_{ijkl} = \alpha_{ijkl} - a_{ij0}\alpha_{33kl}, \quad a_{ij} = \delta_{ij}\alpha_i - a_{ij0}\alpha_3 \tag{1.4}$$
$$a_{ij0} = \alpha_{ij33}/\alpha_{3333}$$

Из (1.4) следует, что $a_{ij33} = a_{33kl} = a_{33} = 0$, из (1.3) — что ε_{ij} также зависят лишь от x_1, x_2, тогда общие условия совместности деформаций [1] сводятся к соотношениям вида

$$\partial^2{}_2\varepsilon_{11} + \partial^2{}_1\varepsilon_{22} = 2\partial_1\partial_2\varepsilon_{12}, \quad \partial_2\varepsilon_{31} - \partial_1\varepsilon_{23} = c \tag{1.5}$$
$$\varepsilon_{33} = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2, \quad c,\ c_i = \text{const} \quad (i = 0, 1, 2)$$

Выделим из полей напряжений и температуры элементарные, а именно вида

$$p_{11}{}^* = p_{22}{}^* = p_{12}{}^* = 0, \quad p_{i3}^* = c_{i0} + c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2, \quad i = 1, 2, 3$$
$$\vartheta^* = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$$

Первое из полей при $c_{22} = -c_{11}$ тождественно удовлетворяет уравнениям равновесия (1.1). Отвечающие этим полям перемещения $u_i{}^*$, которые находятся интегрированием соотношений $\partial_iu_j{}^* + \partial_ju_i{}^* = 2\varepsilon_{ij}{}^*$, будут полиномами не более чем второго порядка. Подберем коэффициенты в представлении элементарных полей так, чтобы удовлетворялись соотношения (1.5). Тогда для оставшегося поля напряжений $p_{ij}{}^0 = p_{ij} - p_{ij}{}^*$ и поля температур $\vartheta^0 = \vartheta - \vartheta^*$ соотношения (1.5) будут однородными, т. е. в них следует положить $c = c_i = 0$.

Таким образом, рассматриваемые ниже поля p_{ij} будем считать определенными лишь с точностью до элементарных. Представим их с помощью функции напряжений F и G:

$$p_{11} = \partial_2{}^2F, \quad p_{22} = \partial_1{}^2F, \quad p_{12} = -\partial_1\partial_2F, \quad p_{31} = \partial_2G, \quad p_{23} = -\partial_1G \tag{1.6}$$

Из (1.5) и (1.6), где $\varepsilon_{33} = 0$ и $c = 0$, получим следующую систему уравнений для функций напряжений:

$$L_{11}F + 2L_{12}G = -M_1\vartheta, \quad L_{21}F + 2L_{22}G = -M_2\vartheta \tag{1.7}$$
$$L_{11} = a_{1111}\partial_2{}^4 - 2(a_{1112} + a_{1211})\partial_2{}^3\partial_1 + (a_{1122} + a_{2211} + 4a_{1212})\partial_2{}^2\partial_1{}^2 -$$
$$- 2(a_{2212} + a_{1222})\partial_2\partial_1{}^3 + a_{2222}\partial_1{}^4$$
$$L_{22} = a_{3131}\partial_2{}^2 - (a_{3123} + a_{2331})\partial_2\partial_1 + a_{2323}\partial_1{}^2$$
$$L_{12} = a_{1131}\partial_2{}^3 - (a_{1123} + 2a_{1231})\partial_2{}^2\partial_1 +$$
$$+ (a_{2231} + 2a_{1223})\partial_2\partial_1{}^2 - a_{2223}\partial_1{}^2$$
$$L_{21} = a_{3111}\partial_2{}^3 - (a_{2311} + 2a_{3112})\partial_2{}^2\partial_1 +$$
$$+ (a_{3122} + 2a_{2312})\partial_2\partial_1{}^2 - a_{2322}\partial_1{}^3$$
$$M = a_{11}\partial_2{}^2 - 2a_{12}\partial_2\partial_1 + a_{22}\partial_1{}^2, \quad M_2 = a_{31}\partial_2 - a_{23}\partial_1$$

Заметим, что $L_{21} = L_{12}$, если $a_{klij} = a_{ijkl}$.

Примем, что температура ϑ удовлетворяет уравнению теплопроводности вида

$$L_0\vartheta = 0,\ L_0 = k_{22}\partial_2{}^2 + 2k_{12}\partial_1\partial_2 + k_{11}\partial_1{}^2 \tag{1.8}$$

где оператор L_0 — строго эллиптический. Последнее означает, что характеристический многочлен $l_0 = k_{22}\gamma^2 + 2k_{12}\gamma + k_{22}$ имеет только комплексные корни $\gamma_0 = \alpha_0 + i\beta_0$ и $\bar\gamma_0$. Разложению $l_0(\gamma)$ на множители отвечает представление оператора $L_0 = k_{22}(\partial_2 - \gamma_0\partial_1)(\partial_2 - \bar\gamma_0\partial_1)$. Ядра каждого сомножителя есть аналитические в области сечения функции [2] $T_1(z_0)$, $T_2(\bar z_0)$, $z_0 = x_1 + \gamma_0 x_2$, и общее (классическое) решение уравнения (1.8) согласно теореме Боджио [1] имеет вид $\vartheta = T_1(z_0) + T_2(\bar z_0)$. Учитывая, что ϑ вещественно, получим, что $T_2 = \bar T$, $T_1 = T$ и окончательно запишем общее решение в виде $\vartheta = 2\mathrm{Re}T(z_0)$, где $T(z_0)$ — аналитическая в области поперечного сечения функция комплексной переменной. Предположим, что $T(z_0)$ также является и некоторым частным решением уравнения (1.8), удовлетворяющим заданному граничному условию.

Согласно полученному представлению для ϑ система уравнений (1.7) будет иметь вид

$$\begin{gathered}L_{11}F + 2L_{12}G = -2\mathrm{Re}\,(m_1(\gamma_0)\,T''(z_0)),\ m_1 = a_{11}\gamma^2 - 2a_{12}\gamma + a_{23}\\ L_{21}F + 2L_{22}G = -2\mathrm{Re}\,(m_2(\gamma_0)\,T''(z_0)),\ m_2 = a_{31}\gamma - a_{23}\end{gathered} \tag{1.9}$$

Здесь m_i — характеристические многочлены операторов M_i.

Полагая, что поле температур не сводится к элементарному и потому $T''(z_0) \neq 0$, частное решение системы (1.9) определим в виде

$$F = -2\mathrm{Re}\,(k_1(\gamma_0)\,H_0(z_0)),\quad G = -\mathrm{Re}\,(k_2(\gamma_0)\,H_0(z_0))$$
$$H_0''(z_0) = T(z_0)$$
$$k_1 = (m_1 l_{22} - m_2 l_{12})/l,\ k_2 = (m_2 l_1 - m_1 l_{21})/l,\ l = l_{11}l_{22} - l_{12}l_{21}$$

Здесь l_{ij} — характеристические многочлены операторов L_{ij}.

Общее решение однородной системы уравнений, отвечающей системе (1.9), представим в виде $F = L_{22}H$, $G = -{}^1/_2L_{21}H$, исключая при этом случай, когда L_{21} и L_{22} могут иметь общий нетривиальный множитель. Тогда H удовлетворяет уравнению

$$LH = 0,\quad L = L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}$$

Характеристическое уравнение $l(\gamma) = 0$ имеет три комплексных корня $\gamma_n = \alpha_n + i\beta_n$, $n = 1, 2, 3$ и три сопряженных к ним (см. [3]). Предположим, что все корни разные; случай равных корней рассмотрим как вырожденный в окончательном решении задачи. Разлагая многочлен $l(\gamma)$ на множители и представляя оператор L аналогично оператору теплопроводности L_0, получим общее решение в виде

$$H = 2\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{3} H_n(z_n),\quad z_n = x_1 + \gamma_n x_2$$

Здесь $H_n(z_n)$ — аналитические функции в области определения своих переменных. Общее решение системы (1.9) имеет вид

$$(1.10)\qquad F = 2\mathrm{Re}\Big(\sum_{n=1}^{3} l_{22}(\gamma_n)E_n(z_n) - k_1(\gamma_0)H_0(z_0)\Big)$$

$$G = -\mathrm{Re}\Big(\sum_{n=1}^{3} l_{21}(\gamma_n)E_n(z_n) + k_2(\gamma_0)H_0(z_0)\Big)$$

Здесь $E_n = H_n''(z_n)$ — аналитические функции.

Для определения E_n получим для них соотношения на границе, отвечающие основным задачам теории упругости. Из соотношений для функций напряжений на контуре сечения [3]

$$\partial_2 F = P_1,\quad -\partial_1 F = P_2,\quad G = P_3,\quad P_i = \pm\int p_i ds,\quad i = 1, 2, 3$$

где P_i определены с точностью до несущественной константы, выбираемой так, чтобы P_i в заданной точке контура принимали нужные значения (знак плюс берется для внешнего контура сечения, ds — дифференциал дуги контура), вытекают следующие условия на контуре для функций $\Phi_n = E_n'$ $(j = 1, 2)$:

$$(1.11)\qquad 2\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{3}\gamma_n^{2-j} l_{22}(\gamma_n)\Phi_n(z_n) = (-1)^{j-1}T_j$$

$$\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{3} l_{21}(\gamma_n)\Phi_n(z_n) = -T_3$$

$$(1.12)\qquad T_j = P_j - 2\mathrm{Re}\,((-\gamma_0)^{2-j}k_1(\gamma_0)H_0'(z_0))$$

$$T_3 = P_3 + \mathrm{Re}\,(k_2(\gamma_0)H_0'(z_0))$$

При $T_j = 0$ из (1.12) следует условие эквивалентности температурных и силовых нагрузок на границе.

Найдем теперь граничные условия для функций $\Phi_n(z_n)$, вытекающие из граничных условий для перемещений. Определяя напряжения согласно выражениям (1.6) и (1.10) получим

$$(1.13)\qquad p_{ij} = 2\mathrm{Re}\Big(\sum_{n=1}^{3}(-\gamma_n)^{4-i-j}l_{22}(\gamma_n)\Phi'(z_n) - (-\gamma_0)^{4-i-j}k_1(\gamma_0)T(z_0)\Big)$$

$$p_{i3} = \mathrm{Re}\Big(\sum_{n=1}^{3}(-\gamma_n)^{2-i}l_{21}(\gamma_n)\Phi_n'(z_n) + (-\gamma_0)^{2-i}k_2(\gamma_0)T(z_0)\Big)$$

Интегрируя уравнения $\partial_i u_j + \partial_j u_i = 2\varepsilon_{ij}$, определив при этом деформации из соотношений (1.4) с учетом (1.13), для перемещений получим

$$(1.14)\qquad u_i = 2\mathrm{Re}\Big(\sum_{n=1}^{3}\gamma_n^{1-i}\varepsilon_{ii}^*(\gamma_n)\Phi_n(z_n) - \gamma_0^{1-i}\varepsilon_{ii0}^*(\gamma_0)H_0'(z_0)\Big)$$

$$u_3 = 4\mathrm{Re}\Big(\sum_{n=1}^{3}\varepsilon_{31}^*(\gamma_n)\Phi_n(z_n) - \varepsilon_{310}^*(\gamma_0)H_0'(z_0)\Big)$$

$$\varepsilon_{ij}^* = (a_{ij11}\gamma^2 - 2a_{ij12}\gamma + a_{ij22})l_{22}(\gamma) - (a_{ij31}\gamma - a_{ij23})l_{21}(\gamma)$$

$$\varepsilon_{ij0}^* = a_{ij} - (a_{ij11}\gamma^2 - 2a_{ij12}\gamma + a_{ij22})k_1(\gamma) - (a_{ij31}\gamma - a_{ij23})k_2(\gamma)$$

Из (1.14) вытекают граничные условия для $\Phi_n(z_n)$.

2. Для восстановления аналитических функций по их граничным значениям, связанным соотношениями (1.11), (1.14), рассмотрим некоторые специальные задачи. Степень определенности таких задач, связана с характером анизотропии материала. Рассмотрим здесь лишь ортотропный материал, для которого в определяющих соотношениях (1.3)

$$a_{iikl} = 0,\ k \neq l;\ a_{ijkk} = 0,\ i \neq j;\ a_{ijkl} = 0,\ kl \neq ij$$

В этом случае $L_{12} = L_{21} = 0$ и система уравнений (1.7) распадается на два независимых уравнения $L_{11}F = -M_1\vartheta$, $L_{22}G = 0$, что отвечает разделению задачи на изгиб с растяжением и кручение с продольным сдвигом в направлении образующей цилиндра. Последняя задача не связана с температурным полем. Рассмотрим здесь только первую задачу, решение второй тривиально.

Оператор теплопроводности имеет вид $L_0 = k_{22}\partial_2^2 + k_{11}\partial_1^2$, и, следовательно, $\gamma_0 = i\sqrt{k_{11}/k_{22}}$. Характеристическое уравнение, отвечающее оператору L_{11}, находится в виде

$$l_{11}(\gamma) = a_{1111}\gamma^4 + (a_{1122} + a_{2211} + 4a_{1212})\gamma^2 + a_{2222} = 0 \tag{2.1}$$

и имеет два комплексных корня и два сопряженных с ними. Полагая в (1.10) $l_{12} = l_{21} = 0$, получим для функции напряжений представление

$$F = 2\operatorname{Re}\Big(\sum_{n=1}^{2} F_n(z_n) - m_1(\gamma_0)\, l_{11}^{-1}(\gamma_0)\, F_0(z_0)\Big), \quad 2\operatorname{Re} F_0''(z_0) = \vartheta \tag{2.2}$$

Здесь $F_n(z_n)$ — аналитические функции своих переменных $z_n = x_1 + \gamma_n x_2$.

Граничные условия для функций $\Phi_n = F_n'$ в терминах силовых нагрузок и температуры будут иметь вид

$$2\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{2} \gamma_n^{2-j}\Phi_n(z_n) = (-1)^{j-1}T_j, \qquad j = 1, 2 \tag{2.3}$$

$$T_j = P_j - 2\operatorname{Re}\left((-\gamma_0)^{2-j}\, m_1(\gamma_0)\, l_{11}^{-1}(\gamma_0)\, F_0'(z_0)\right)$$

В терминах перемещений и температуры

$$2\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{2} \gamma_n^{1-j}\varepsilon_j(\gamma_n)\,\Phi_n(z_n) = U_j, \quad \varepsilon_j = a_{jj11}\gamma^2 + a_{jj22} \tag{2.4}$$

$$U_j = u_j + 2\operatorname{Re}\left(\gamma_0^{1-j}\left(a_{jj} - \varepsilon_j(\gamma_0)\, m_1(\gamma_0)\, l_{11}^{-1}(\gamma_0)\, F_0'(z_0)\right)\right)$$

Рассмотрим следующую граничную задачу. Пусть T_θ и U_{θ^*} — граничные «усилие» и «перемещение» в направлении соответственно углов θ и θ^* к оси x_1. Согласно (2.3) и (2.4), на границе имеем

$$T_\theta = T_1\cos\theta + T_2\sin\theta = 2\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{2} t_n\Phi_n(z_n), \quad U_{\theta^*} = 2\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{2} d_n\Phi_n(z_n) \tag{2.5}$$

$$t_n = \gamma_n\cos\theta - \sin\theta, \quad d_n = \varepsilon_1(\gamma_n)\cos\theta^* + \gamma_n^{-1}\varepsilon_2(\gamma_n)\sin\theta^*$$

Введем вспомогательные функции $\Psi_n = t_n\Phi_n(z_n)$. Граничные соотношения (2.5) представим в виде

$$2\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{2}\Psi_n = T_\theta, \quad 2\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{2}\varkappa_n\Psi_n = U_{\theta^*}, \quad \varkappa_n = \frac{d_n(\theta^*)}{t_n(\theta)} \tag{2.6}$$

Определим углы θ и θ^*, так, чтобы коэффициенты $\varkappa_n$ стали вещественными, т. е.

(2.7) $$\operatorname{Im} \varkappa_n (\theta, \theta^*) = 0, \ n = 1, 2$$

Исследуем нетривиальные решения этих уравнений.

Характеристическое уравнение (2.1) в зависимости от знака детерминанта $d = (a_{1122} + a_{2211} + 4a_{1212})^2 - 4a_{1111}a_{2222}$ имеет корни двух видов: если $d > 0$, то $\gamma_n = i\beta_n$, если $d < 0$, то $\gamma_n = \mp \alpha + i\beta$, $n = 1, 2$, и по два с ними сопряженных (случай равных корней исключается).

Для корней вида $\gamma_n = i\beta_n$ условие (2.7) возможно в двух случаях: $\theta = 0$, $\theta^* = \pi / 2$ или $\theta = \pi / 2$, $\theta^* = 0$. В первом случае на границе тела задаются усилие T_1 и перемещение U_2, во втором — перемещение U_1 и усилие T_2.

Для корней вида $\gamma_n = \mp \alpha + i\beta$ согласно (2.7) справедливы следующие формулы определения углов:

$$\operatorname{tg} \theta = \pm \varepsilon (a_{2222}/a_{1111})^{1/4}, \quad \operatorname{tg} \theta^* = \mp \varepsilon (a_{1111}/a_{2222})^{1/4}$$

$$\varepsilon = ((\sqrt{a_{1111}a_{2222}} - a_{1122})/(\sqrt{a_{2222}a_{1111}} - a_{2211}))^{1/2}$$

Для полученных значений θ и θ^* в обоих случаях корней $\varkappa_2 \neq \varkappa_1$, поэтому система (2.6) разрешима единственным образом относительно $\operatorname{Re} \Psi_n$. Решая, получим

(2.8) $$\operatorname{Re} \Psi_1 = \frac{\varkappa_2 T_\theta - U_{\theta^*}}{2(\varkappa_2 - \varkappa_1)}, \quad \operatorname{Re} \Psi_2 = -\frac{\varkappa_1 T_\theta - U_{\theta^*}}{2(\varkappa_2 - \varkappa_1)}$$

Таким образом, граничная задача свелась к восстановлению аналитических в своих областях определения функций по их вещественной части на границе. Пусть $z = f(\zeta)$ — отображение какой-либо стандартной области в плоскости комплексной переменной $\zeta = \xi + i\eta$ в заданную область комплексной переменной $z = x + iy$ $(x = x_1, \ y = x_2)$. В качестве стандартной области можно выбрать любую, для которой эффективно строится оператор Шварца, восстанавливающий аналитическую в области функцию по ее вещественной части на границе. Для определенности примем, что область поперечного сечения односвязна и ограничена кусочно-гладкой кривой, а в качестве стандартной области выбрана полуплоскость $\eta \geqslant 0$.

Отображения

$$z_n = A_n z, \quad A_n = \begin{Vmatrix} 1 & \alpha_n \\ 0 & \beta_n \end{Vmatrix}, \quad n = 1, 2$$

(где $\alpha_n + i\beta_n = \gamma_n$ — корни характеристического уравнения) переводят область поперечного сечения бруса в соответствующие области плоскостей комплексных переменных $z_n = x_n + iy_n = x + \gamma_n y$, $n = 1, 2$. Отображения $z_n = A_n f(\zeta)$ не являются конформными, поэтому рассмотрим одновременно отображения $z_n = f_n(\zeta_n)$, $\zeta_n = \xi_n + i\eta_n$, $n = 1, 2$, конформно отображающие верхние полуплоскости $\eta_n \geqslant 0$ в образы поперечного сечения при отображениях $z_n = A_n z$. Имеем тогда связывающие переменные ζ_n и ζ соотношения $f_n(\zeta_n) = A_n f(\zeta)$, $n = 1, 2$.

Предположим, что T_θ и U_{θ^*} заданы как функции z, и введем следующие вещественные функции:

$$\psi_n(\xi_n) = \frac{\varkappa_{3-n}T_\theta - U_{\theta^*}(z)}{\varkappa_2 - \varkappa_1}, \quad z = A_n^{-1} f_n(\xi_n), \qquad n = 1, 2 \tag{2.9}$$

Согласно (2.8), получим

$$2 \operatorname{Re} \Psi_n = (-1)^{n-1} \psi_n(\xi_n), \; n = 1, \; 2$$

Пусть T_θ и U_{θ^*} заданы так, что функции ψ_n имеют определенный конечный предел при $\xi_n \to \infty$ ($\xi \to 0$) и на всей оси удовлетворяют условию Гельдера. Применяя оператор Шварца для полуплоскости, получим следующие представления искомых функций:

$$\Psi_n(z_n) = \frac{(-1)^{n-1}}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_n(\tau_n)}{\tau_n - \zeta_n(z_n)} d\tau_n + ic, \quad \zeta_n(z_n) = f_n^{-1}(z_n)$$

Для дальнейшего постоянная c несущественна и будет опущена. Если $\psi_n(\infty) \neq 0$, то под интегралом следует заменить $\psi_n(\tau_n)$ на $\psi_n(\tau_n) - \psi_n(\infty)$.

Полученные представления для Ψ_n дают точное решение граничных задач в случае, когда на границе сечения цилиндрического тела заданы усилие T_θ и перемещение U_{θ^*}. Чтобы определить связь полученных представлений с другими граничными задачами, зададимся усилием и перемещением в направлении углов ω и ω^* к оси x. Тогда, используя формулы (2.5), в которых θ следует заменить на ω, и положив $\Phi_n = t_n^{-1}\Psi_n$, где на границе согласно формулам Сохоцкого — Племеля выполняется соотношение

$$\Psi_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2}\left(\psi_n(\xi_n) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_n(\tau_n)}{\tau_n - \xi_n} d\tau_n\right)$$

получим

$$\left\| \begin{matrix} T_\omega \\ U_{\omega^*} \end{matrix} \right\| = \sum_{n=1}^{2} (-1)^{n-1} \left(\operatorname{Re} \left\| \begin{matrix} \sigma_n \\ \chi_n \end{matrix} \right\| \psi_n(\xi_n) + \operatorname{Im} \left\| \begin{matrix} \sigma_n \\ \chi_n \end{matrix} \right\| \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_n(\tau_n)}{\tau_n - \xi_n} d\tau_n \right) \tag{2.10}$$

$$\sigma_n = t_n(\omega)/t_n(\theta), \quad \chi_n = d(\omega^*)/t_n(\theta)$$

Представления (2.10) непосредственно приводят к интегральным уравнениям при решении различных граничных задач. Для примера рассмотрим первую граничную задачу теории упругости, когда на границе заданы усилия T_1 и T_2 или, что то же, T_θ и T_ω.

Для корней характеристического уравнения вида $\gamma_n = i\beta_n$ имеем $\operatorname{Re}\sigma_2 = \operatorname{Re}\sigma_1 = \operatorname{Re}\sigma$. Если определяющие соотношения симметричны, т. е. $a_{klij} = a_{ijkl}$, это справедливо и для корней вида $\gamma_n = \mp\alpha + i\beta$. В дальнейшем будем рассматривать только эти случаи. Из (2.9) и (2.10) получим интегральное уравнение относительно $U^*(\xi) = U_{\theta^*}(f(\xi))$ вида

$$\sum_{n=1}^{2} \frac{(-1)^n \operatorname{Im}\sigma_n}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{U^*(\tau(\tau_n))}{\tau_n - \xi_n(\xi)} d\tau_n = T^*(\xi), \quad \xi_n(\xi) = f_n^{-1}(A_n f(\xi)) \tag{2.11}$$

$$T^*(\xi) = (\varkappa_2 - \varkappa_1)(T_\omega^*(\xi) - \operatorname{Re}\sigma T_\theta^*(\xi)) - \sum_{n=1}^{2} \frac{(-1)^n \varkappa_{3-n} \operatorname{Im}\sigma_n}{\pi} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T_\theta^*(\tau(\tau_n))}{\tau_n - \xi_n(\xi)} d\tau_n, \quad T_{\theta,\omega}^*(\xi) = T_{\theta,\omega}(f(\xi))$$

Полученное уравнение является сингулярным интегральным уравнением со сдвигом, вопросы существования решения которого рассмотрены в работах [4, 5]. Здесь существование единственного решения при соответствующих предположениях будет вытекать из дальнейшего. В формуле (2.10) положим $\omega = \theta^*$ и $\omega^* = \theta$ и выберем две различные пары значений θ и θ^*. Рассмотрим случай корней $\gamma_n = i\beta_n$. Полагая $\theta = 0$, $\theta^* = \pi / 2$, из (2.9) и (2.10) имеем

$$\left\| \begin{matrix} U_1^* \\ T_2^* \end{matrix} \right\| = \sum_{n=1}^{2} \frac{(-1)^{n-1}\beta_n}{\pi a_{2222}(\beta_2^2 - \beta_1^2)} \left\| \begin{matrix} \lambda_n \\ 1 \end{matrix} \right\| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_{3-n}T_1^* - \beta_{3-n}^2 U_2^*}{\tau_n - \xi_n} d\tau_n \tag{2.12}$$

$$\lambda_n = a_{1111}\beta_n^2 - a_{1122}, \quad \mu_n = a_{2211}\beta_n^2 - a_{2222}$$

Полагая $\theta = \pi / 2$, $\theta^* = 0$, получим

$$\left\| \begin{matrix} T_1^* \\ U_2^* \end{matrix} \right\| = \sum_{n=1}^{2} \frac{(-1)^{n-1}\beta_n}{\pi a_{1111}(\beta_2^2 - \beta_1^2)} \left\| \begin{matrix} 1 \\ \mu_n/\beta_n^2 \end{matrix} \right\| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-\lambda_{3-n}T_2^* + U_1^*}{\tau_n - \xi_n} d\tau_n \tag{2.13}$$

Из представления формул (2.12), (2.13) в операторной форме

$$\left\| \begin{matrix} U_1^* \\ T_2^* \end{matrix} \right\| = \mathbf{K} \left\| \begin{matrix} T_1^* \\ U_2^* \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} T_1^* \\ U_2^* \end{matrix} \right\| = \mathbf{N} \left\| \begin{matrix} U_1^* \\ T_2^* \end{matrix} \right\|$$

следует, что операторы **K** и **N** взаимообратны. Из существования обратного оператора вытекает существование единственного решения соответствующих интегральных уравнений в классе функций, непрерывных по Гельдеру. Вместе с тем операторы **K** и **N** представляют собой интегральные преобразования с обращением для любой пары функций, непрерывных по Гельдеру на всей числовой оси.

Рассмотрим теперь случай равных корней характеристического уравнения, который получим предельным переходом при $\beta_2 \to \beta_1$ в соотношениях (2.12), (2.13). Предположим, что функция $\xi_2 = f_2^{-1}(A_2 A_1^{-1} f_1(\xi_1))$, взаимооднозначно отображающая числовую ось на себя, имеет достаточную гладкость. Пусть $\gamma_n = i\beta_n$. Рассмотрим только второе соотношение (2.12), которое запишем в виде уравнения относительно U_2^*:

$$\beta_1\beta_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta_1 k(\xi_1, \tau_1) - \beta_2}{\beta_2 - \beta_1} \frac{U_2^*(\tau(\tau_1))}{\tau_1 - \xi_1} d\tau_1 = \pi a_{2222}(\beta_1 + \beta_2) T_2^*(\xi(\zeta_1)) + \tag{2.14}$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta_2\mu_1 k(\xi_1, \tau_1) - \beta_1\mu_2}{\beta_2 - \beta_1} \frac{T_1^*(\tau(\tau_1))}{\tau_1 - \xi_1} d\tau_1$$

$$k(\xi_1, \tau_1) = \tau_2'(\tau_1)(\tau_1 - \xi_1)/(\tau_2(\tau_1) - \xi_2(\xi_1))$$

Полагая

$$\beta_1 = \beta, \quad \beta_2 = \beta + \varepsilon, \quad \xi_2 = \varphi(\xi_1, \varepsilon) = \xi_1 + \varphi^{\cdot}(\xi_1)\,\varepsilon + o(\varepsilon)$$
$$\varphi^{\cdot}(\xi_1) = (\partial\varphi/\partial\varepsilon)_{\varepsilon=0}$$

и переходя к пределу под знаком интеграла при $\varepsilon \to 0$, получим интегральное уравнение для случая равных корней в виде

$$(2.15)\qquad \frac{\beta}{2\pi a_{2222}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + \beta k^{\circ}(\xi_1, \tau_1)}{\tau_1 - \xi_1} U_2^*(\tau(\tau_1))\, d\tau_1 = -T_2^*(\xi(\xi_1)) +$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta^{-1} - \lambda\beta - (1 + \lambda\beta^2) k^{\circ}(\xi_1, \tau_1)}{\tau_1 - \xi_1} T_1^*(\tau(\tau_1))\, d\tau_1$$
$$k^{\circ}(\xi_1, \tau_1) = \frac{\varphi^{\cdot}(\tau_1) - \varphi^{\cdot}(\xi_1)}{\tau_1 - \xi_1} - \frac{\partial\varphi^{\cdot}(\tau_1)}{\partial\tau_1}, \qquad \lambda = -\frac{a_{2211}}{a_{2222}}$$

Для изотропного материала $a_{2222} = (1 - \nu^2) / E$, $a_{2211} = -\nu(1 + \nu)/E$, $\lambda = \nu(1 - \nu)$, ν — коэффициент Пуассона, E — модуль упругости, характеристическое уравнение (2.1) имеет равные корни $\gamma_n = i$, так что $\beta = 1$, и в (2.15) следует положить $\tau_1 = \tau$, $\xi_1 = \xi$.

Пример. Если в уравнении (2.14) $k(\xi_1, \tau_1) = 1$, а в (2.15) $k^{\circ}(\xi_1, \tau_1) = 0$, то эти уравнения решаются точно применением оператора обращения Коши. Этим случаям отвечают соответственно зависимости $\xi_2 = a\xi_1 + b$, $\varphi^{\cdot}(\xi_1) = a\xi_1 + b$, $a, b = \mathrm{const}$, частный случай первой из которых использован в [3] для решения анизотропной задачи о деформации области, лежащей вне параболы. Преобразования $z_n = A_n z$ переводят параболу в параболы, а области вне парабол являются образами полуплоскости при отображениях $z_n = \beta_n^2(\zeta_n^2 + i2q\zeta_n) - q^2$, где q — параметр параболы. Соотношение между ζ_2 и ζ_1 на границе полуплоскости дает $\beta_2\xi_2 = \beta_1\xi_1$, что соответствует рассматриваемому случаю. Приведем решение для изотропной среды:

$$U_2^*(\xi) = \frac{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}{2E} T_1^*(\xi) + \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T_2(\tau)}{\tau - \xi} d\tau$$

Уравнения (2.14), (2.15) получены в предположении достаточной гладкости входящих в них функций. Распространим теперь эти уравнения на случай более общего вида функции $\xi_2 = \varphi(\xi_1)$. Преобразуем интегральное уравнение (2.14) к виду, где формально не присутствуют условия гладкости указанной функции. Для этого сначала получим формулу перестановки сингулярных интегралов со специальными ядрами.

Для вещественной функции $u(\xi)$, непрерывной по Гельдеру на всей числовой оси, и для функции $\varphi(\xi)$, отображающей взаимооднозначно числовую ось на себя, производная которой отлична от нуля и непрерывна по Гельдеру, имеем

$$\frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\rho - \xi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\tau)\, d\tau}{\tau - \varphi(\rho)} d\rho = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\rho - \xi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(\rho, \sigma)\, d\sigma}{\sigma - \rho} d\rho$$
$$v(\rho, \sigma) = \frac{u(\varphi(\sigma))\, \varphi'(\sigma)(\sigma - \rho)}{\varphi(\sigma) - \varphi(\rho)}$$

Здесь функция v непрерывна по Гельдеру. Применяя к последнему интегралу перестановку Бертрана — Пуанкаре, получим

$$\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\rho-\xi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\tau)\,d\tau}{\tau-\varphi(\rho)}\,d\rho = -u(\varphi(\xi)) + \tag{2.16}$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}u(\tau)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\rho}{(\rho-\xi)(\tau-\varphi(\rho))}\,d\tau$$

Здесь внутренний интеграл справа понимается в смысле главного значения относительно точек ξ и $\varphi^{-1}(\tau)$.

Применяя теперь к уравнению (2.11) оператор S, так что

$$Su(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\rho)}{\rho-\xi}\,d\rho$$

учитывая, что $S^2u = -u$, и полагая, что условия формулы (2.16) выполнены, получим следующее интегральное уравнение:

$$\operatorname{Im}(\sigma_1-\sigma_2)\,U^*(\xi) + \frac{\operatorname{Im}\sigma_2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}k(\xi_1(\xi),\tau_2)\,U^*(\tau(\tau_2))\,d\tau_2 = \tag{2.17}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{T^*(\rho(\rho_1))}{\rho_1-\xi_1(\xi)}\,d\rho_1$$

$$k(\xi_1,\tau_2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\rho_1}{(\rho_1-\xi_1)(\tau_2-\varphi(\rho_1))}$$

В качестве приложения уравнения (2.17) получим интегральное уравнение изгиба полосы. Отображения $z_n = A_n z$ переводят полосу ширины h, параллельную оси x, в так же расположенные полосы шириной $\beta_n h$ для любых корней характеристического уравнения. Для определенности рассмотрим случай $\gamma_n = \mp\alpha + i\beta$, который имеет место для многих видов древесины [6], например для березы. Верхние полуплоскости отображаются в полосы функциями $z_n = \pi^{-1}\beta_n h \ln \zeta_n$, так что на границе имеем

$$\xi_1 \geqslant 0,\ \xi_2 = \xi_1;\ \xi_1 \leqslant 0,\ \xi_2 = c\xi_1,\ c = \exp(2\pi\alpha/\beta)$$

Из (2.17) при $\xi_1 \neq 0$, $\tau_2 \neq 0$ получим

$$k(\xi_1,\ \tau_2) = \frac{\ln|\tau_2| - \ln|\xi_1|}{\pi(\tau_2-\xi_1)} - \frac{\ln|\tau_2| - \ln|c\xi_1|}{\pi(\tau_2-c\xi_1)},\quad \tau_2 \neq \xi_1,\ c\xi_1$$

Для остальных ξ_1 и τ_2 имеем

$$\xi_1>0,\quad k(\xi,\ c\xi_1) = \frac{1}{\pi\xi_1}\left(\frac{\ln c}{c-1}-\frac{1}{c}\right);\quad \xi_1<0,\quad k(\xi_1,\ c\xi_1)=\infty$$

$$\xi_1>0,\quad k(\xi_1,\xi_1)=\infty;\quad \xi_1<0,\quad k(\xi_1,\ \xi_1) = \frac{1}{\pi\xi_1}\left(1-\frac{\ln c}{c-1}\right)$$

$$k(0,\tau_2) = 2\pi\alpha/\beta,\ k(\xi_1, 0) = \infty$$

3. Построим теперь более общие представления для ортотропного материала в случае, когда граничные условия могут меняться вдоль границы, а именно предположим, что θ и сопряженный с ним угол θ^* есть функции точек границы. Для этого положим, что соотношение (2.7) выполняется лишь для какого-то одного n. В случае корней $\gamma_n = i\beta_n$, $n = 1, 2$ отсюда

следует зависимость между углами вида

$$\operatorname{ctg}\theta^* = \frac{a_{2211} - a_{2222}\beta_n^{-2}}{a_{1111}\beta_n^2 - a_{1122}}\operatorname{tg}\theta$$

Выберем для определенности $n = 2$. Вместо (2.6) тогда получим

(3.1) $$2\mathrm{Re}\Psi_1 + 2\mathrm{Re}\Psi_2 = T_\theta,\quad 2\mathrm{Re}(\varkappa_1\Psi_1) + 2\varkappa_2\mathrm{Re}\Psi_2 = U_{\theta^*}$$

Исключая Ψ_2, получим $2\mathrm{Re}((\varkappa_2 - \varkappa_1)\Psi_1) = \varkappa_2 T_\theta - U_{\theta^*}$. Полагая, что $\varkappa_2 - \varkappa_1$ зависит от точек границы так, что $(\varkappa_2 - \varkappa_1)\Psi_1$ — граничное значение аналитической функции, аналогично найдем

(3.2) $$\Psi_1(z_1) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi_1(\tau_1)}{\tau_1 - \zeta_1(z_1)}d\tau_1$$

Здесь функция ψ_1 определяется из уравнения (2.9), но уже не является вещественной. Определяя $\mathrm{Re}\Psi_1$ на границе из (3.2) с помощью формулы Сохоцкого — Племеля, из первого соотношения в (3.1) получим

$$\Psi_2(z_2) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{T_\theta^*(\tau(\tau_2)) - 2\mathrm{Re}\,\Psi_1^*(\tau(\tau_2))}{\tau_2 - \zeta_2(z_2)}d\tau_2$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
2. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959. 628 с.
3. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
4. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
5. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1977. 448 с.
6. *Уголев Б. Н.* Испытания древесины и древесных материалов. М.: Лесная пром-сть, 1965. 250 с.

Поступила в редакцию
22.I.1980