

УДК 539.3:534.1

**ДИФРАКЦИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН
НА ИДЕАЛЬНОМ ЭКРАНЕ В ПЛОСКОМ ВОЛНОВОДЕ
С ТОНКИМИ УПРУГИМИ СТЕНКАМИ**

Левцкий Л. А., Лукьянов В. Д.

(Ленинград)

Рассматривается дифракционная задача для плоского волновода с упругими стенками. Граничные условия, задающие идентичный механический режим стенок волновода и содержащие производные высокого порядка, не конкретизируются. Источником поля служит набегающая из глубины волновода собственная акустическая волна. Изучается дифракция этой волны на идеальном экране высотой в половину ширины волновода. Экран считается либо абсолютно жестким (условие Неймана), либо абсолютно мягким (условие Дирихле). В качестве примеров построены решения для случая, когда стенками служат способные лишь к изгибным колебаниям пластины, и гранично-контактные условия, необходимые для однозначной разрешимости задачи [1], выбраны здесь так, что описывают спай экрана и одной из пластин. Получено также решение для случая импедансных условий на стенках волновода. Сходная задача дифракции волн на диафрагме в волноводе с идеальными стенками (абсолютно мягкими или абсолютно жесткими), не имеющая матричного характера, рассмотрена в [2].

1. Постановка задачи. Акустическое поле удовлетворяет внутри волновода (фиг. 1) однородному уравнению Гельмгольца

$$(1.1) \quad (\Delta + k^2)P(x, y) = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad -h < y < h$$

граничным условиям на стенках

$$(1.2) \quad L_\alpha P[x, (-1)^{\alpha+1}h] = 0$$

$$-\infty < x < +\infty$$

$$L_\alpha = M_1 \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial y} +$$

$$+ (-1)^{\alpha+1} M_2 \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)$$

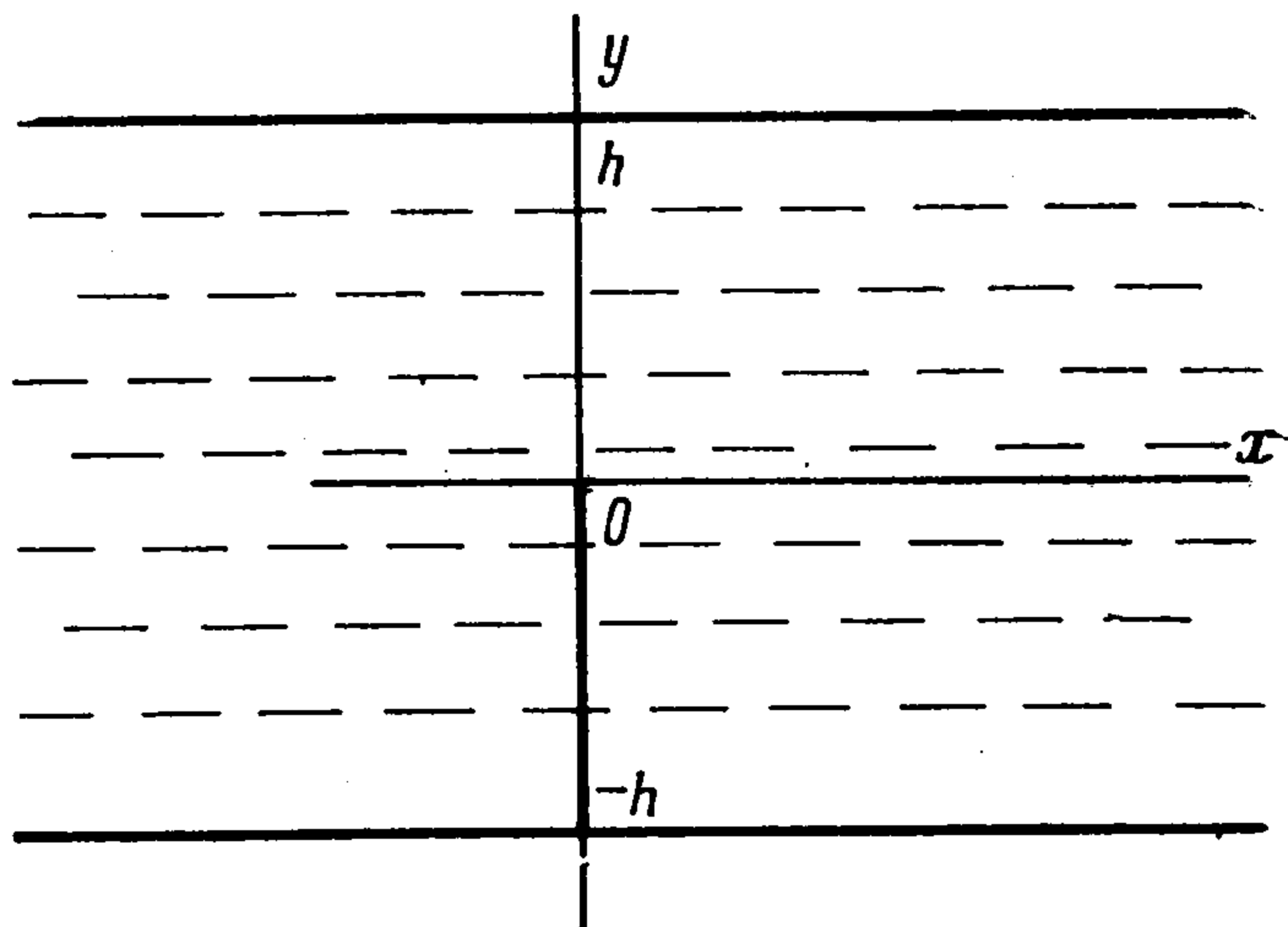
$$\alpha = 1, 2$$

и условию Дирихле либо Неймана на экране

$$(1.3) \quad P(0, y) = 0$$

$$-h < y < 0$$

$$(1.4) \quad \frac{\partial P(0, y)}{\partial x} = 0, \quad -h < y < 0$$



Здесь k — волновое число в среде, M_1, M_2 — полиномы аргумента $-\partial^2 / \partial x^2$, коэффициенты которых зависят от механических параметров задачи. Будем считать, что порядок $2n_1$ полинома M_1 выше порядка $2n_2$ полинома M_2 .

Приведем два примера реализации операторов L_α .

В импедансном случае

$$(1.5) \quad L_\alpha = \frac{\partial}{\partial y} + (-1)^{\alpha+1} \eta$$

и порядок полиномов M_1, M_2 равен нулю.

Если стенками волновода служат способные только к изгибным колебаниям пластины, то

$$(1.6) \quad L_\alpha = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} - \kappa^4 \right) \frac{\partial}{\partial y} + (-1)^{\alpha+1} \nu, \quad \nu = \frac{\rho_0 \omega^2}{D}, \quad \kappa^4 = \frac{\rho \omega^2}{D}$$

где ρ_0, ρ — соответственно плотность жидкости и поверхностная плотность пластины, D — цилиндрическая жесткость пластины, ω — частота колебаний. Зависимость волновых процессов от времени выбрана в виде $e^{-i\omega t}$ и везде далее опущена.

Рассмотрим дифракцию на экране в волноводе симметричной по y нормальной моды давления, набегающей на экран из правой половины волновода

$$P_0(x, y) = \exp(-i\lambda_0 x) \operatorname{ch}(\gamma_0 y), \quad \gamma = \gamma(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - k^2} \\ \gamma_0 = \gamma(\lambda_0)$$

Волновое число λ_0 нормальной моды находится из условия, что $P_0(x, y)$ удовлетворяет граничным условиям (1.2)

$$L_1 P_0(x, h) = 0$$

Отметим, что $P_0(x, y)$ удовлетворяет всем условиям задачи, кроме условия (1.3) или (1.4) на экране. Случай, когда источником поля служит антисимметричная по y нормальная мода $P_0(x, y) = \exp(-i\lambda_0 y) \operatorname{sh}(\gamma_0 y)$, рассматривается аналогично.

Разбивая полное поле $P(x, y)$ и $P_0(x, y)$ на четную или нечетную части по координате x

$$P(x, y) = P_s(x, y) + P_a(x, y), \quad P_s(x, y) = 1/2 [P(x, y) + P(-x, y)]$$

$$P_a(x, y) = 1/2 [P(x, y) - P(-x, y)]$$

приходим к двум независимым задачам в полубесконечном волноводе.

На торце этого полубесконечного волновода при $x = 0, |y| < h$ в случае абсолютно жесткого экрана в волноводе выполнены такие условия:

$$(1.7) \quad \frac{\partial P_s(0, y)}{\partial x} = 0, \quad -h < y < h$$

$$(1.8) \quad P_a(0, y) = 0, \quad 0 < y < h, \quad \frac{\partial P_a(0, y)}{\partial x} = 0, \quad -h < y < 0$$

Для случая абсолютно мягкого экрана имеем аналогичные условия

$$P_a(0, y) = 0, \quad -h < y < h$$

$$\frac{\partial P_s(0, y)}{\partial x} = 0, \quad 0 < y < h, \quad P_s(0, y) = 0, \quad -h < y < 0$$

Если порядок $2n_1 + 1$ граничного оператора L_α больше единицы, то для единственности решения необходимо указать гранично-контактные условия, задающие механический режим в угловых точках полубесконечного волновода. Для верхней стенки — это условие отсутствия механических дефектов в стенке волновода, для нижней — условие прикрепления диафрагмы к стенке. Рассеянное поле строится в соответствии с принципом предельного поглощения и должно удовлетворять условию Майкснера «на ребре» [3]. В соответствии с принятым в [4, 5] методом решения гранично-контактных задач будем искать решение для четной и нечетной по x составляющей поля $P_s(x, y)$, $P_a(x, y)$ в виде суммы частного решения $R(x, y)$ неоднородной задачи и общего решения $Q(x, y)$ однородной задачи. Функция $R(x, y)$ однозначно находится из требования, чтобы в угловых точках она имела непрерывные производные всех порядков, которые участвуют в гранично-контактных условиях.

Функция $Q(x, y)$ содержит разрывы производных полного поля в точках $(0, \pm h)$ и описывает расходящееся от этих точек поле [5].

2. Решение нечетной задачи. Представим частное решение $R_{0a}(x, y)$ в виде

$$(2.1) \quad R_{0a}(x, y) = 1/2 [P_0(x, y) + (-1)^\alpha P_0(-x, y)] + R_{\alpha 0}(x, y)$$

Здесь и везде далее $\alpha = 1$, если $0 < y < h$, $\alpha = 2$, если $-h < y < 0$. Неизвестные функции $R_{0a}(x, y)$ разложим по плоским волнам

$$(2.2) \quad R_{\alpha a}(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} [r_{\alpha s}(\lambda) \operatorname{ch}(\gamma y) + r_{\alpha a}(\lambda) \operatorname{sh}(\gamma y)] d\lambda$$

Граничные условия на торце (1.8) будут выполнены, если потребовать нечетность функций $r_{1s}(\lambda)$, $r_{1a}(\lambda)$ и четность $r_{2s}(\lambda)$, $r_{2a}(\lambda)$. Вводя вектор-функцию $r(\lambda) = \| r_{1s}(\lambda), r_{1a}(\lambda), r_{2s}(\lambda), r_{2a}(\lambda) \|$ (* — знак транспонирования), запишем это условие в матричной форме

$$(2.3) \quad r(\lambda) = E r(-\lambda)$$

где E — диагональная матрица с элементами $a_{11} = a_{22} = -1$, $a_{33} = a_{44} = 1$.

Граничные условия (1.2) приводят к интегральным уравнениям ($x > 0$)

$$(2.4) \quad \begin{aligned} L_\alpha R_{\alpha a}[x, (-1)^{\alpha+1} h] &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} [(-1)^{\alpha+1} r_{\alpha s}(\lambda) l_s(\lambda) + r_{\alpha a}(\lambda) l_a(\lambda)] d\lambda = 0 \\ l_s(\lambda) &= \gamma M_1(\lambda^2) \operatorname{sh}(\gamma h) + M_2(\lambda^2) \operatorname{ch}(\gamma h) \\ l_a(\lambda) &= \gamma M_1(\lambda^2) \operatorname{ch}(\gamma h) + M_2(\lambda^2) \operatorname{sh}(\gamma h) \end{aligned}$$

В силу непрерывности поля $R_{0a}(x, y)$ и его нормальной производной $\frac{\partial R_{0a}(x, y)}{\partial y}$ вдоль срединной плоскости волновода $y = 0$ имеет интеграль-

ные уравнения ($x > 0$)

$$(2.5) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} [r_{1s}(\lambda) - r_{2s}(\lambda)] d\lambda = P_0(-x, 0)$$

$$(2.6) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} \gamma [r_{1a}(\lambda) - r_{2a}(\lambda)] d\lambda = 0$$

Уравнения (2.4)–(2.6) будут тождественно удовлетворены, если потребовать

$$(2.7) \quad G(\lambda)r(\lambda) = \Phi^+(\lambda) + f(\lambda)$$

$$G(\lambda) = \begin{vmatrix} l_s(\lambda) & l_a(\lambda) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & -l_s(\lambda) & l_a(\lambda) \end{vmatrix}$$

$$f(\lambda) = \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \|0, 1, 0, 0\|^*$$

$$\Phi^+(\lambda) = \|\varphi_1^+(\lambda), \varphi_2^+(\lambda), \varphi_3^+(\lambda), \varphi_4^+(\lambda)\|^*$$

Здесь компоненты вектор-функции Φ^+ — функции аналитические в верхней полуплоскости.

Исключим неизвестную вектор-функцию $r(\lambda)$, воспользовавшись (2.7), (2.3) и соотношением

$$G(\lambda)r(-\lambda) = \Phi^+(-\lambda) + f^+(-\lambda)$$

полученным из (2.7) формальной заменой λ на $-\lambda$. Компоненты $\Phi^+(-\lambda)$ — это функции, аналитические в нижней полуплоскости переменной λ ($\text{Im } \lambda < 0$).

Таким образом приходим к матричной неоднородной задаче Римана

$$(2.8) \quad \Phi^+(\lambda) = B(\lambda)\Phi^+(-\lambda) + B(\lambda)f(-\lambda) - f(\lambda)$$

$$B_-(\lambda) = G(\lambda)EG^{-1}(\lambda)$$

$$B(\lambda) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/l_s(\lambda) & 0 & g(\lambda) & 1/l_s(\lambda) \\ -\gamma/l_a(\lambda) & 1/g(\lambda) & 0 & -\gamma/l_a(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad g(\lambda) = \frac{l_a(\lambda)}{\gamma l_s(\lambda)}$$

для нахождения кусочно-аналитической вектор-функции $\Phi(\lambda)$ по линейному соотношению, связывающему предельные значения ($\text{Im } \lambda \rightarrow +0$) этой функции $\Phi^+(\pm\lambda)$ на вещественной оси переменной λ . Для решения задачи представим матрицу $B(\lambda)$ в виде произведения матриц $B_1^+(\lambda)$ и $B_2^+(-\lambda)$, элементы которых будут аналитическими функциями соответственно в верхней и нижней полуплоскости λ

$$(2.9) \quad B(\lambda) = B_1^+(\lambda)B_2^+(\lambda)$$

$$B_1^+(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -g^+(\lambda)\Psi_1^+(\lambda) & g^+(\lambda) & 0 & g^+(\lambda)\Psi_1^+(\lambda) \\ -\Psi_2^+(\lambda)/g^+(\lambda) & 0 & 1/g^+(\lambda) & \Psi_2^+(\lambda)/g^+(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$B_2^+(-\lambda) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ \Psi_1^+(-\lambda) & 0 & g^+(-\lambda) & -\Psi_1^+(-\lambda) \\ \Psi_2^+(-\lambda) & 1/g^+(-\lambda) & 0 & \Psi_2^+(-\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Элементы матриц определяются на основании следующих соотношений:

$$g(\lambda) = g^+(\lambda)g^-(\lambda), \quad g^+(\lambda) = g^-(-\lambda), \quad g^+(\pm\lambda) = O(\lambda^{-1/2}) \\ |\lambda| \rightarrow +\infty$$

$$\Psi_1^+(\lambda) + \Psi_1^+(-\lambda) = -\frac{1}{g^+(\lambda)l_s(\lambda)}$$

$$\Psi_2^+(\lambda) + \Psi_2^+(-\lambda) = -\frac{1}{g^+(-\lambda)l_s(\lambda)}$$

Четная функция $g(\lambda)$ мероморфна, имеет множество попарно противоположных простых нулей и полюсов, Факторизацию $g(\lambda)$ следует проводить, например, согласно [3]; $\psi_{1,2}^+(\lambda)$ — предельные значения ($\text{Im } \lambda \rightarrow +0$) кусочно-аналитических функций $\psi_{1,2}(\lambda)$

$$\Psi_1(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{g^+(\tau)l_s(\tau)(\tau-\lambda)}$$

$$\Psi_2(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{g^+(-\tau)l_s(\tau)(\tau-\lambda)}$$

С учетом (2.9) перепишем (2.8) в виде

$$(2.10) \quad [B_1^+(\lambda)]^{-1}\Phi^+(\lambda) - V^+(\lambda) = B_2^+(-\lambda)\Phi^+(-\lambda) + V^+(-\lambda)$$

Здесь $V^+(\lambda)$ — значения в верхней полуплоскости кусочно-аналитической вектор-функции $V(\lambda)$

$$V(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \{B_2^+(-\tau)f(-\tau) - [B_1^+(\tau)]^{-1}f(\tau)\} \frac{d\tau}{\tau-\lambda}$$

$$V^+(\lambda) - V^+(-\lambda) = B_2^+(-\lambda)f(-\lambda) + [B_1^+(\lambda)]^{-1}f(\lambda) \\ \text{Im } \lambda \rightarrow 0$$

Обе части (2.10) определяют согласно теореме об аналитическом продолжении общую, аналитическую во всей комплексной плоскости вектор-функцию $W(\lambda) = \|w_1(\lambda), w_2(\lambda), w_3(\lambda), w_4(\lambda)\|^*$. В силу требуемой непрерывности производных частного решения $R_0(x, y)$ функции $\varphi_1^+(\lambda)$, $\varphi_4^+(\lambda)$, а с ними $w_1(\lambda)$, $w_4(\lambda)$ равны нулю.

Поскольку имеет место асимптотика

$$\varphi_2^+(\lambda) = O(\lambda^{-1}), \quad \varphi_3^+(\lambda) = O(\lambda^{-1}), \quad |\lambda| \rightarrow +\infty$$

то $w_2^+(\lambda)$, $w_3(\lambda)$ также равны нулю, т. е. вектор $W(\lambda)$ нулевой. С учетом этого из (2.10) и (2.7) окончательно получаем

$$(2.11) \quad r(\lambda) = G^{-1}(\lambda)[B^+(\lambda)V^+(\lambda) + f(\lambda)] \\ V^+(\lambda) = \|0, v_2^+(\lambda), v_3^+(\lambda), 0\|^*$$

$$r_{\alpha s}(\lambda) = \frac{1}{2} \left[\frac{(-1)^{\alpha+1}}{\lambda - \lambda_0} - g^+(-\lambda) v_3^+(\lambda) + (-1)^{\alpha+1} g^+(\lambda) v_2^+(\lambda) \right]$$

$$r_{\alpha a}(\lambda) = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{\gamma g(\lambda)(\lambda - \lambda_0)} - \frac{v_2^+(\lambda)}{\gamma g^+(-\lambda)} + (-1)^{\alpha+1} \frac{v_3^+(\lambda)}{\gamma g^+(\lambda)} \right]$$

$$v_2^+(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \lim_{\text{Im } \lambda \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{g^+(\tau)(\tau - \lambda_0)(\tau - \lambda)}$$

$$v_3^+(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \lim_{\text{Im } \lambda \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{g^+(-\tau)(\tau - \lambda_0)(\tau - \lambda)}$$

Общее решение однородной задачи $Q_\alpha(x, y)$, описывающее расходящееся от точек $(0, \pm h)$ поле, будем искать в виде

$$(2.12) \quad Q_\alpha(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} [q_{\alpha s}(\lambda) \text{ch}(\gamma y) + q_{\alpha a}(\lambda) \text{sh}(\gamma y)] d\lambda$$

причем предположим, что функции $q_{\alpha s}(\lambda)$, $q_{\alpha a}(\lambda)$ имеют ту же четность, что и $r_{\alpha s}(\lambda)$, $r_{\alpha a}(\lambda)$ (2.3) и ищутся аналогичным путем с тем лишь отличием, что уравнение (2.7) однородно.

Для непрерывности поля в окрестности $(0, \pm h)$ достаточно потребовать следующей оценки при $|\lambda| \rightarrow +\infty$:

$$(2.13) \quad q_{\alpha s}(\lambda) = O(\lambda^{-1-\varepsilon_1}), \quad q_{\alpha a}(\lambda) = O(\lambda^{-1-\varepsilon_2}), \quad 0 < \varepsilon_{1,2} < 1/2$$

С учетом оценок (2.12) вектор-функция $W(\lambda)$, определяемая здесь уравнением типа (2.10), имеет вид

$$W(\lambda) = \| S_n(\lambda), 0, 0, S_{n-1}(\lambda) \| *$$

где $S_n(\lambda)$, $S_{n-1}(\lambda)$ — полиномы степеней n , $n-1$, причем, как видно из (2.7), $S_n(\lambda)$ — полином по нечетным степеням λ , $S_{n-1}(\lambda)$ — по четным, $n = \max[0, 2n_1 - 1]$. Коэффициенты этих полиномов определяются далее из гранично-контактных условий. Окончательные выражения для $q_{\alpha s}(\lambda)$, $q_{\alpha a}(\lambda)$ таковы:

$$q_{\alpha s}(\lambda) = \frac{1}{2} \left[\frac{S_n(\lambda) - S_{n-1}(\lambda)}{l_s(\lambda)} + (-1)^{\alpha+1} g^+(\lambda) w_2^+(\lambda) - g^+(-\lambda) w_3^+(\lambda) \right]$$

$$q_{\alpha a}(\lambda) = \frac{1}{2} \left[\frac{S_n(\lambda) + S_{n-1}(\lambda)}{l_a(\lambda)} - \frac{w_2^+(\lambda)}{\gamma g^+(-\lambda)} + (-1)^{\alpha+1} \frac{w_3^+(\lambda)}{\gamma g^+(\lambda)} \right]$$

$$w_2^+(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\text{Im } \lambda \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[S_n(\tau) + S_{n-1}(\tau)]}{l_s(\tau) g^+(\tau)(\tau - \lambda)} d\tau$$

$$w_3^+(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\text{Im } \lambda \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[S_n(\tau) - S_{n-1}(\tau)]}{l_s(\tau) g^+(-\tau)(\tau - \lambda)} d\tau$$

3. Решение четной задачи. Частное решение неоднородной задачи, удовлетворяющее соотношениям (1.1), (1.2), (1.6) и гладкое со всеми производными в точках $(0, \pm h)$, имеет вид

$$(3.1) \quad R_{0s}(x, y) = 1/2 [P_0(x, y) + P_0(-x, y)]$$

Общее решение однородной задачи запишем в форме

$$T_s(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} [t_s(\lambda) \operatorname{ch}(\gamma y) + t_a(\lambda) \operatorname{sh}(\gamma y)] d\lambda$$

потребовав для тождественного выполнения соотношения (1.6) четность функций $t_s(\lambda)$, $t_a(\lambda)$, которые являются амплитудами соответственно симметричных и антисимметричных по y колебаний.

Граничные условия (1.2) для $T_s(x, y)$ приводят к интегральным уравнениям

$$(3.2) \quad L_\alpha T_s(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} [(-1)^\alpha t_s(\lambda) l_s(\lambda) + t_a(\lambda) l_a(\lambda)] d\lambda = 0$$

Система (3.2) будет удовлетворена, если

$$t_s(\lambda) l_s(\lambda) = \varphi_1^+(\lambda), \quad t_a(\lambda) l_a(\lambda) = \varphi_2^+(\lambda)$$

где, как и раньше, $\varphi_{1,2}^+(\lambda)$ — функция, аналитическая в верхней полуплоскости переменной λ . Учитывая четность $t_s(\lambda)$, $t_a(\lambda)$, получим

$$\varphi_{1,2}^+(\lambda) = \varphi_{1,2}^+(-\lambda), \quad \operatorname{Im} \lambda = 0$$

Отсюда по теореме об аналитическом продолжении через контур имеем с учетом непрерывности поля в точках $(0, \pm h)$, что $\varphi_{1,2}(\lambda)$ — полиномы по четным степеням λ порядка $n - 1$, $n = \max[0, 2n_1 - 1]$. Обозначим эти полиномы через $u_s(\lambda)$, $u_a(\lambda)$, окончательно получим

$$t_s(\lambda) = u_s(\lambda) / l_s(\lambda), \quad t_a(\lambda) = u_a(\lambda) / l_a(\lambda)$$

$2n_1$ коэффициентов этих полиномов определяют из гранично-контактных условий.

4. Гранично-контактные условия. Если на стенках волновода выполняются импедансные граничные условия, т. е. L_α — оператор (1.5), то $n_1 = 0$, полиномы $u_s(\lambda)$, $u_a(\lambda)$, $S_n(\lambda)$, $S_{n-1}(\lambda)$ тождественно равны нулю и решение задачи дается формулами (3.1), (2.11), (2.2), (2.1). Пусть теперь L_α — оператор (1.6), тогда $n_1 = 2$ и требуется определить четыре коэффициента для поля $Q_a(x, y)$ и столько же для поля $T_s(x, y)$.

На верхней пластине $y = +h$ должно выполняться условие отсутствия дефекта пластины при $x = 0$ [6]

$$(4.1) \quad \frac{\partial P(-0, h)}{\partial y} = \frac{\partial P(+0, h)}{\partial y}$$

$$(4.2) \quad \frac{\partial^2 P(-0, h)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 P(+0, h)}{\partial y \partial x}$$

$$(4.3) \quad \frac{\partial^3 P(-0, h)}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 P(+0, h)}{\partial y \partial x^2}$$

$$(4.4) \quad \frac{\partial^4 P(-0, h)}{\partial y \partial x^3} = \frac{\partial^4 P(+0, h)}{\partial y \partial x^3}$$

На нижней пластине из уравнений движения диафрагмы [7] имеем

$$(4.5) \quad \frac{\partial P(\pm 0, -h)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 P(\pm 0, -h)}{\partial y \partial x} = 0$$

Потребуем выполнения условий (4.1) — (4.5) порознь для x -симметричной и x -антисимметричной задач.

Для поля $R_{0s}(x, y) + Q_s(x, y)$ условия (4.2), (4.4) выполняются тождественно в силу четности $t_s(\lambda)$, $t_a(\lambda)$, а условия (4.1), (4.3) имеют вид

$$(4.6) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+i0\lambda} \gamma \lambda^n [t_s(\lambda) \operatorname{sh}(\gamma h) + t_a(\lambda) \operatorname{ch}(\gamma h)] d\lambda = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i0\lambda} \gamma \lambda^n [t_s(\lambda) \operatorname{sh}(\gamma h) + t_a(\lambda) \operatorname{ch}(\gamma h)] d\lambda = 0, \quad n = 0, 2$$

Здесь использовано обозначение [6]

$$\lim_{x \rightarrow \pm 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) e^{\pm i0\lambda} d\lambda$$

Условия (4.5) приводят к уравнениям

$$(4.7) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+i0\lambda} \gamma [-t_s(\lambda) \operatorname{sh}(\gamma h) + t_a(\lambda) \operatorname{ch}(\gamma h)] d\lambda = 2\pi i \gamma_0 \operatorname{sh}(\gamma_0 h) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+i0\lambda} \gamma \lambda^2 [-t_s(\lambda) \operatorname{sh}(\gamma h) + t_a(\lambda) \operatorname{ch}(\gamma h)] d\lambda = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i0\lambda} \gamma \lambda^2 [-t_s(\lambda) \operatorname{sh}(\gamma h) + t_a(\lambda) \operatorname{ch}(\gamma h)] d\lambda = 0$$

Записав явный вид полиномов $u_s(\lambda)$, $u_a(\lambda)$

$$u_s(\lambda) = a + b\lambda^2, \quad u_a(\lambda) = c + d\lambda^2$$

и подставив их в (4.6), (4.7), получим систему

$$(4.8) \quad aI_{0s} + bI_{2s} + cI_{0a} + dI_{2a} = 0, \quad aI_{2s} + bI_{4s} + cI_{2a} + dI_{4a} = 0 \\ -aI_{0s} - bI_{2s} + cI_{0a} + dI_{4a} = 2\pi i \gamma_0 \operatorname{sh}(\gamma_0 h); \quad -aI_{2s} - bI_{4s} + \\ + cI_{2a} + dI_{4a} = 0$$

для определения гранично-контактных постоянных a , b , c , d . Коэффициенты системы (обозначенные I_{ns} , I_{na}) имеют вид

$$I_{ns} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+i0\lambda} \gamma \lambda^n \operatorname{sh}(\gamma h) \frac{d\lambda}{l_s(\lambda)}, \quad I_{na} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+i0\lambda} \gamma \lambda^n \operatorname{ch}(\gamma h) \frac{d\lambda}{l_a(\lambda)}$$

При $n = 0, 2$ интегралы I_{ns} , I_{na} сходятся в обычном смысле.

Замыкая контур $(-\infty, +\infty)$ в верхнюю полуплоскость, получим

$$I_{ns} = \sum_{N=1}^{+\infty} \frac{\gamma \lambda^N \operatorname{sh}(\gamma h)}{l_s'(\lambda)} \Big|_{\lambda=\xi_N}, \quad I_{na} = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\gamma \lambda^N \operatorname{ch}(\gamma h)}{l_a'(\lambda)} \Big|_{\lambda=\xi_N}$$

При фиксированной частоте ω в волноводе существует лишь конечное число распространяющихся мод. Затухающие моды имеют асимптотику $\xi_n = O(N)$ и ряды сходятся.

Коэффициент I_{4s} можно представить в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+i0\lambda} \gamma \lambda^4 \operatorname{sh}(\gamma h) \frac{d\lambda}{l_s(\lambda)} = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+i0\lambda} d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+i0\lambda} \frac{[\gamma \lambda^4 \operatorname{sh}(\gamma h) - v \operatorname{ch}(\gamma h)]}{l_s(\lambda)} d\lambda$$

При замыкании в верхнюю полуплоскость получим

$$I_{4s} = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\kappa^4 \gamma \operatorname{sh}(\gamma h) - \nu \operatorname{ch}(\gamma h)}{l'_s(\lambda)} \Big|_{\lambda=\xi_N}$$

Гранично-контактные условия для X -антисимметричной части поля рассматриваются аналогично.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коузов Д. П. О решении уравнения Гельмгольца для полуплоскости при граничных условиях, содержащих производные высокого порядка. — ПММ, 1967, т. 31, вып. 1, с. 164.
2. Вайнштейн Л. А. Теория дифракции и метод факторизации. М.: Сов. радио, 1966, с. 431.
3. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974. 323 с.
4. Красильников В. Н. О решении некоторых гранично-контактных задач линейной гидродинамики. — ПММ, 1961, т. 25, вып. 4, с. 764.
5. Коузов Д. П. Об акустическом поле точечного источника в прямоугольном объеме, ограниченном тонкими упругими стенками. — ПММ, 1979, т. 43, вып. 2, с. 305.
6. Коузов Д. П. Дифракция цилиндрической гидроакустической волны на стыке двух полубесконечных пластин. — ПММ, 1969, т. 33, вып. 2, с. 240.
7. Белинский Б. П. Дифракция плоской волны на пластине, подкрепленной выступающим ребром жесткости. — ПММ, 1978, т. 42, вып. 3, с. 486.

Поступила в редакцию
1.VII.1980