Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 1, 1981

УДК 539.3

РАЗЛОЖЕНИЕ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ С УРАВНЕНИЯМИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Цурков В. И.

(Москва)

Метод декомпозиции на основе введения макропеременных применяется для управления системами с распределенными параметрами, которые описываются уравнениями в частных производных параболического типа. Приводятся центральные утверждения для итеративного процесса: критерий оптимальности промежуточного решения и локальная монотонность по функционалу исходной задачи.

Рассматривается задача об оптимальном нагреве для системы из J бесконечных пластин, ширина каждой из которых равняется l_j ($j \in [1:J]$). Температура каждой пластины $z_j(x_j, t)$ по ширине и по времени удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\partial z_j(x_j, t) / \partial t - \partial^2 z_j(x_j, t)/\partial x_j^2 = f_j(x_j, t) \in C_0\{[0, l_j] \times [0, T]\} \tag{1}$$
$$t > 0, \quad 0 < x_j < l_j$$

Заданы начальные распределения температуры, а теплообмен на границах пластин подчиняется закону Ньютона

$$\lim_{t\to+0} z_j(x_j, t) = \varphi_j(x_j) \in C_0[0, l_j] \tag{2}$$

$$\begin{gathered} \partial z_j(0, t) / \partial x_j = -\beta_j^1 [\eta_j^1(t) - z_j(0, t)] \\ \partial z_j(l_j, t)/ \partial x_j = \beta_j^2 [\eta_j^2(t) - z_j(l_j, t)] \\ (\beta_j^1)^2 + (\beta_j^2)^2 > 0, \quad \beta_j^1 \geqslant 0, \quad \beta_j^2 \geqslant 0 \end{gathered} \tag{3}$$

Вводятся векторы управления $u_j(t) = \{u_j^1(t), \ldots, u_j^I(t)\}$, которые через I-мерные векторы $b_j^k(t) = \{b_j^{1k}(t), \ldots, b_j^{Ik}(t)\}$ ($k = 1, 2$) задают температуру греющих сред

$$\eta_j^k(t) = b_j^k(t) u_j(t), \quad k = 1, 2 \tag{4}$$

На управления накладываются ограничения

$$0 \leqslant u_j(t) \leqslant a_j(t) \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{J} [d_j(t) u_j(t) - c_j^1(t) z_j(0, t) - c_j^2(t) z_j(l_j, t)] \leqslant m(t) \tag{6}$$

где $d_j(t)$ — матрицы размерности $R \times I$; $c_j^k(t)$, $m(t)$ и $a_j(t)$ — соответственно R- и I-мерные векторы.

Ограничения (5) относятся к каждой отдельной пластине, а соотношение (6) — связывающее условие для всей системы в целом. Смысл неравенства (6) может быть интерпретирован следующим образом. Пусть компоненты векторов управления $u_j = \{u_j^1, \ldots, u_j^I\}$ при каждом фиксированном $j \in [1 : J]$ характеризуют компоненты расходуемого топлива, которое требуется для поддержания температуры греющих сред. Пусть у всей системы имеются затраты за использование компонент топлива, и, кроме того, система имеет поощрения за поддержание как можно более высокой температуры на границе пластин и сред. Предполагается, что разность между указанными затратами и поощрениями, выраженная в единых измерениях, положительна и ограничена, что задается вектором $m(t)$ в правой части (6). Тогда компоненты матриц $d_j(t)$ и векторов b_j^k, $c_j^k(t)$ $(k = 1, 2)$ имеют смысл соответствующих коэффициентов пропорциональности и окончательно выясняется конкретный содержательный смысл условия (6).

Типичным для рассматриваемой постановки является функционал вида

$$(7) \qquad -\sum_{j=1}^{J} \int_0^{l_j} [z_j(\xi_j, T) - e_j(\xi_j)]^2 d\xi_j \to \max$$

где $e_j(x_j)$ — заданные функции на отрезках $[0, l_j]$, $j \in [1 : J]$.

Предполагается, что компоненты $b_j^{ik}(t)$, $d_j^{ir}(t)$, $c_j^{rk}(t)$, $m^r(t)$, $a_j^i(t)$ — ограниченные измеримые функции на отрезке $[0, T]$, а $e_j(x_j) \in L_2[0, l_j]$. Ищутся векторы управления $u_j(t) \in L_\infty^I[0, T]$, $j \in [1 : J]$ и соответствующие им функции температур $z_j(x_j, t)$, $j \in [1 : J]$, которые максимизируют функционал (7) и удовлетворяют ограничениям (4)—(6), а также уравнениям теплопроводности (1) вместе с начальными и граничными условиями (2), (3) в смысле теории распределений.

Исходная задача имеет по управлениям размерность $J \times I$. Далее указывается на сведение к задачам меньших размерностей на основе введения макроуправлений по схеме [1]. Основой построений являются принципы двойственности для экстремальных задач в банаховых пространствах [2], к которым сводятся при использовании функций Грина исходная задача и все промежуточные задачи в методе декомпозиции. Справедливость теорем двойственности для задач управления с распределенными параметрами рассматриваемого типа при условиях $b_j^{ik}(t)$, $d_j^{ir}(t)$, $c_j^k(t) \geqslant 0$ указана в [1].

Итеративный процесс строится следующим образом. Вводятся макроуправления и весовые функции

$$U^i(t) = \sum_{j=1}^{J} u_j^i(t), \; i \in [1:I], \quad \alpha_j^i(t) = \frac{u_j^i(t)}{U^i(t)}, \; j \in [1:J], \; i \in [1:I]$$

Фиксируются $\alpha_j^i(t)$ и получается задача с макроуправлениями, если в исходной вместо (4)—(6) берутся соответственно соотношения (8)—(10)

$$(8) \qquad \eta_j^k(t) = \sum_{i=1}^{I} B_j^{ik}(t) U^i(t), \quad B_j^{ik}(t) = b_j^{ik}(t) \alpha_j^i(t)$$

[1] *Тер-Крикоров А. М.* Одна задача об оптимальном нагреве. Докл. Всес. совещ. «Проблемы управления процессами в сплошных средах с отрывом и горением». Июнь, 1979, Киев.

(9) $0 \leqslant \alpha_j^i(t), \quad U^i(t) \leqslant a_j^i(t)$

(10) $\sum_{i=1}^{I} D^i(t)\, U^i(t) - \sum_{j=1}^{J} [c_j^1(t)\, z_j(0, t) + c_j^2(t)\, z_j(l_j, t)] \leqslant m(t)$

$$D^i(t) = \sum_{j=1}^{J} d_j(t)\, \alpha_j^i(t)$$

Для задачи с макроуправлениями рассматривается сопряженная [3]

(11) $-\partial w_j(x_j, t) / \partial t - \partial^2 w_j(x_j, t) / \partial x_j^2 = 0$

$$\lim_{t \to T-0} w_j(x_j, t) = -2\,[z_j(x_j, T) - e_j(x_j)]$$

$$\partial w_j(0, t) / \partial x_j = -\gamma_j^1(t) + \beta_j^1 w_j(0, t)$$

$$\partial w_j(l_j, t) / \partial x_j = \gamma_j^2(t) - \beta_j^2 w_j(l_j, t)$$

$$\gamma_j^k(t) = \delta(t) c_j^k(t); \quad k = 1, 2, \; j \in [1 : J]$$

$$\delta(t)\, D^i(t) + \sum_{j=1}^{J} [-\beta_j^1 w_j(0, t)\, B_j^{i1}(t) - \beta_j^2 w_j(l_j, t)\, B_j^{i2}(t) +$$

$$+ \alpha_j^i(t)\, \mu_j^i(t)] \geqslant 0, \quad i \in [1 : I]$$

$$\delta(t) \geqslant 0, \quad \mu_j(t) \geqslant 0, \quad j \in [1 : J]$$

$$\sum_{j=1}^{J} \Big\{ \int_0^T \mu_j(\tau)\, a_j(\tau)\, d\tau + \int_0^{l_j} w_j(\xi_j, 0)\, \varphi_j(\xi_j)\, d\xi_j +$$

$$+ \int_0^{l_j} \int_0^T w_j(\xi_j, \tau)\, f_j(\xi_j, \tau)\, d\xi_j d\tau \Big\} + \int_0^T \delta(\tau)\, m(\tau)\, d\tau \to \min$$

Здесь вводятся R- и I-мерные векторы двойственных переменных соответственно $\delta(t)$ и $\mu_j(t)$, $j \in [1 : J]$, а также двойственные функции $w_j(x_j, t)$, $j \in [1 : J]$.

Пусть при заданных функциях $\alpha_j^i(t)$ найдены единственные оптимальные решения задачи с макроуправлениями (1)—(3), (8)—(10), (7) $U^{i\circ}(t) > 0$, $z_j^\circ(x_j, t)$ и сопряженной к ней (11) $\delta^\circ(t)$, $\mu_j^\circ(t)$, $w_j^\circ(x_j, t)$. Формулируются задачи для отдельных пластин, которые при каждом $j \in [1 : J]$ задаются соотношениями (1)—(5), а в функционалы из (7) добавляются слагаемые

$$-\int_0^T \delta^\circ(\tau)\, [d_j(\tau)\, u_j(\tau) - c_j^1(\tau)\, z_j(0, \tau) - c_j^2(\tau)\, z_j(l_j, \tau)]\, d\tau$$

Пусть $u_j^*(t)$ $(j \in [1 : J]$ — ограниченные измеримые оптимальные решения задач для отдельных пластин, которым соответствуют распределения температуры $z_j^*(x_j, t)$. Определяются управления $u_j^{i\circ}(t) = \alpha_j^i(t) U^{i\circ}(t)$. Вводятся функции $\alpha_j^i(t, \rho)$, как в [1], и переход к следующей итерации осуществляется так же, как в указанной работе. Имеем

$$\alpha_j^i(t, \rho_j) = [u_j^{i\circ}(t) + \rho_j(u_j^{i*}(t) - u_j^{i\circ}(t))] \Big[\sum_{j=1}^{J} (u_j^{i\circ}(t) +$$

$$+ \rho_j(u_j^{i*}(t) - u_j^{i\circ}(t)) \Big]^{-1}$$

$$0 \leqslant \rho_j \leqslant 1, \quad j \in [1 : J]$$

Подставляя фиксированные весовые функции согласно выписанному соотношению в исходную задачу (1)—(7), получаем задачу с макроуправлениями, оптимальное значение функционала которой $g^\circ(\rho_j)$ — функция параметров ρ_j. Ставится задача максимизации $g^\circ(\rho_j)$ при $\rho_j \in [0, 1]$. Если максимум в этой задаче достигается при некоторых значениях ρ_j° $(j \in [1:J])$, то весовые функции для следующего шага итеративного процесса вычисляются из выписанного соотношения, куда вместо ρ_j подставляются значения ρ_j°.

Таким образом, на каждом шаге итераций решается задача с макроуправлениями, содержащая по управлениям I переменных, решаются также J задач для отдельных пластин с I переменными — управлениями, наконец, имеется задача максимизации с J параметрами ρ_j.

Формулируется критерий оптимальности для исходной задачи допустимого промежуточного решения $u_j^\circ(t)$, $z_j^\circ(x_j, t)$. Соответствующее условие заключается в выполнении равенства

$$\begin{aligned}(12)\qquad &\sum_{j=1}^{J}\Big\{-\int_0^{l_j}[z_j^*(\xi_j, T)-e_j(\xi_j)]^2 d\xi_j-\int_0^T\delta^\circ(\tau)[d_j(\tau)u_j^*(\tau)-\\ &-c_j^1(\tau)z_j^*(0,\tau)-c_j^2(\tau)z_j^*(l_j,\tau)]d\tau+\\ &+\int_0^{l_j}[z_j^\circ(\xi_j, t)-e_j(\xi_j)]^2 d\xi_j\Big\}+\int_0^T\delta^2(\tau)m(\tau)d\tau=0\end{aligned}$$

Выведем условие (12). Пусть $\nu_j^*(t)$, $v_j^*(x_j,t)$ $(j\in[1:J])$ — оптимальные решения двойственных задач для каждой из пластин. Тогда набор $\delta^\circ(t)$, $\nu_j^*(t)$, $v_j^*(x_j, t)$ является допустимым решением к двойственной задаче для исходной. Критерием оптимальности допустимого к (1)—(7) решения $u_j^\circ(t)$, $z_j^\circ(x_j, t)$ служит равенство значений функционалов пары сопряженных задач

$$\sum_{j=1}^{J}\Omega_j+\int_0^T\delta^\circ(\tau)m(\tau)d\tau=-\sum_{j=1}^{J}\int_0^{l_j}[z_j^\circ(\xi_j, T)-e_j(\xi_j)]^2 d\xi_j$$

$$\begin{aligned}\Omega_j=&\int_0^T\nu_j^*(\tau)a_j(\tau)d\tau+\int_0^{l_j}v_j^*(\xi_j, 0)\varphi_j(\xi_j)d\xi_j+\\ &+\int_0^{l_j}\int_0^T v_j^*(\xi_j,\tau)f_j(\xi_j,\tau)d\xi_j d\tau\end{aligned}$$

Из равенства оптимальных значений функционалов пар сопряженных задач для отдельных пластин имеем

$$\begin{aligned}\Omega_j=&\int_0^{l_j}[z_j^*(\xi_j, T)-e_j(\xi_j)]^2 d\xi_j-\\ &-\int_0^T\delta^\circ(\tau)[d_j(\tau)u_j^*(\tau)-c_j^1 z_j^*(0,\tau)-c_j^2(\tau)z_j^*(l_j,\tau)]d\tau\end{aligned}$$

Из двух последних соотношений следует (12). Если решение $u_j^\circ(t)$, $z_j^\circ(x_j, t)$ $(j \in [1:J])$ неоптимально для исходной задачи, то (12) выполняется как неравенство «строго больше».

Монотонность по функционалу итеративного метода устанавливается по схеме [1]. Берется $\rho_j = \rho$ ($j \in [1:J]$) и находится производная по ρ в точке $\rho = 0$ для оптимального значения функционала $g^\circ(\rho)$ задачи с макроуправлениями. Для этого дифференцируется функционал Лагранжа с учетом формулы для $\partial \alpha_j^i(t, 0) / \partial \rho$ и зависимости $z_j^\circ(x_j, t)$ от ρ. После ряда преобразований с учетом предпоследних ограничений в (11), которые в силу $U^{i\circ}(t) > 0$ выполняются как строгие равенства, окончательно получаем

$$(g^\circ(0))' = \sum_{j=1}^{J} \int_0^T [\beta_j^1 w_j^\circ(0, \tau) b_j^1(\tau) + \\ + \beta_j^2 w_j^\circ(l_j, \tau) b_j^2(\tau) - \delta^\circ(\tau) d_j(\tau) - \mu_j^\circ(\tau)]\, u^*(\tau)\, d\tau \tag{13}$$

Далее, путем интегрирования по частям преобразуется равенство

$$\sum_{j=1}^{J} \int_0^{l_j} \int_0^T [\partial w_j^\circ(\xi_j \tau)/\partial\tau + \partial^2 w_j(\xi_j, \tau)/\partial \xi_j^2] \times \\ \times [z_j^*(\xi_j, \tau) - z_j^\circ(\xi_j, \tau)]\, d\xi_j\, d\tau = 0$$

Окончательно получаем

$$\sum_{j=1}^{J} \Big\{ - \int_0^{l_j} 2[z_j^\circ(\xi_j, T) - e_j(\xi_j)]\,[z_j^*(\xi_j, T) - z_j^\circ(\xi_j, T)]\, d\xi_j - \\ - \int_0^T [(\beta_j^1 w_j^\circ(0, \tau) b_j^1(\tau) + \beta_j^2 w_j^\circ(l_j, \tau) b_j^2(\tau))(u_j^*(\tau) - u_j^\circ(\tau)) + \\ + \delta^\circ(\tau)(c_j^1(\tau)(z_j^*(0, \tau) - z_j^\circ(0, \tau) + c_j^2(\tau)(z_j^*(l_j, \tau) - z_j^\circ(l_j, \tau))]\, d\tau \Big\} \tag{14}$$

Прибавляя к правой части (13) выражение в (14) вместе с равными нулю, в силу условий дополняющей нежесткости, следующими слагаемыми:

$$\int_0^T \Big\{ \delta^\circ(\tau) \Big[m(\tau) - \sum_{j=1}^{J} (d_j(\tau) u_j^\circ(\tau) - \\ - c_j^1(\tau) z_j^\circ(0, \tau) - c_j^2(\tau) z_j^\circ(l_j, \tau)) \Big] \Big\}\, d\tau,$$

$$\sum_{j=1}^{J} \int_0^T [\delta^\circ(\tau) d_j(\tau) - \beta_j^1 w_j(0, \tau) b_j^1(\tau) - \beta_j^2 w_j(l_j, \tau) + \mu_j^\circ(\tau)]\, u_j^\circ(\tau)\, d\tau,$$

$$\sum_{j=1}^{J} \int_0^T (a_j(\tau) - u_j^\circ(\tau))\, \mu_j^\circ(\tau)\, d\tau$$

окончательно получаем

$$(g^\circ(0))' = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3$$

$$\pi_2 = \sum_{j=1}^{J} \int_0^T \mu^\circ(\tau)(a_j(\tau) - u_j^*(\tau))\, d\tau$$

$$\pi_3 = \sum_{j=1}^{J} \int_0^{l_j} \{[z_j^*(\xi_j T) - e_j(\xi_j)]^2 - 2[z_j^\circ(\xi_j, T) - e_j(\xi_j)] \times \\ \times [z_j^*(\xi_j, T) - z_j^\circ(\xi_j, T)] - [z_j^\circ(\xi_j, T) - e_j(\xi_j)]^2\}\, d\xi_j$$

Здесь $\pi_1 > 0$ — левая часть (12); $\pi_2 \geqslant 0$ в силу (5), (11); $\pi_3 \geqslant 0$ ввиду выпуклости функционала (7).

Таким образом, $(g^\circ(0))' > 0$, откуда следует монотонность по функционалу итеративного метода разложения.

Предыдущие рассмотрения относятся к задаче управления нагревом пластин, описываемым одномерными по пространственным переменным уравнениями теплопроводности, при линейных ограничениях и квадратичном функционале. Однако с использованием формализма [2] построения метода декомпозиции распространяются для более общих систем с распределенными параметрами параболического типа, когда имеются многомерные пространственные переменные, а также выпуклые ограничения и функционал.

Предлагаемый ниже пример допускает аналитическое исследование всех построений метода декомпозиции. Рассматривается линейная задача

$$\begin{aligned}
&\partial z_1(x,t)/\partial t - \partial^2 z_1(x,t)/\partial x^2 = 0, \quad \partial z_2(x,t)/\partial t - \partial^2 z_2(x,t)/\partial x^2 = 0\\
&z_1(x,0) = 0, \quad z_2(x,0) = 0, \quad x \in [0,l]\\
&\partial z_1(0,t)/\partial x = -[u_1(t) - z_1(0,t)], \quad \partial z_2(0,t)/\partial x = -[u_2(t) - z_2(0,t)]\\
&\partial z_1(l,t)/\partial x = [u_1(t) - z_1(l,t)], \quad \partial z_2(l,t)/\partial x = [u_2(t) - z_2(l,t)]\\
&0 \leqslant u_1(t) \leqslant n_1, \quad 0 \leqslant u_2(t) \leqslant n_2; \quad u_1(t) + u_2(t) \leqslant v\\
&f = \int_0^l [\gamma_1 z_1(\xi,T) + \gamma_2 z_2(\xi,t)]\,d\xi \to \max
\end{aligned} \tag{15}$$

где постоянные n_1, n_2, v, γ_1, γ_2 положительны и для определенности $\gamma_2 > \gamma_1$.

Для (15) выписывается сопряженная задача

$$\begin{aligned}
&-\partial y_1(x,t)/\partial t - \partial^2 y_1(x,t)/\partial x^2 = 0, \quad -\partial y_2(x,t)/\partial t - \partial^2 y_2(x,t)/\partial x^2 = 0\\
&y_1(x,t) = \gamma_1, \quad y_2(x,t) = \gamma_2, \quad x \in [0,l]\\
&\partial y_1(0,t)/\partial x = y_1(0,t), \quad \partial y_2(0,t)/\partial x = y_2(0,t)\\
&\partial y_1(l,t)/\partial x = -y_1(l,t), \quad \partial y_2(l,t)/\partial x = -y_2(l,t)\\
&\psi_1(t) - y_1(0,t) - y_1(l,t) + \chi(t) \geqslant 0, \quad \psi_2(t) - y_2(0,t) - y_2(l,t) +\\
&+ \chi(t) \geqslant 0\\
&\varphi = \int_0^l [n_1\psi_1(\tau) + n_2\psi_2(\tau) + v\chi(\tau)]\,d\tau \to \min
\end{aligned} \tag{16}$$

Первые четыре пары соотношений в (16) интегрируются независимо. Используя традиционную технику метода Фурье для смешанных задач, получаем для оптимальных функций $y_1(x,t) = \gamma_1\,\omega(x,t)$, $y_2(x,t) = \gamma_2\,\omega(x,t)$. Здесь $\omega(x,t)$ — некоторая симметричная относительно прямой $x = l/2$ функция, изображаемая в виде ряда Фурье (она не выписывается). Важно заметить, что существует такое $T > 0$, что при всех $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 \leqslant x \leqslant l$ имеет место неравенство $\omega(x,t) \geqslant 0$.

Для нахождения оптимальных управлений задачи (15) используется принцип максимума Понтрягина [2]. Вводя функцию Понтрягина П, приходим к задаче

$$\begin{aligned}
&\Pi = 2\omega(0,t)\,[\gamma_1 u_1(t) + \gamma_2 u_2(t)] \to \max\\
&u_1(t) + u_2(t) \leqslant v, \quad 0 \leqslant u_1(t) \leqslant n_1, \quad 0 \leqslant u_2(t) \leqslant n_2
\end{aligned} \tag{17}$$

Рассмотрим простейший частный случай $v < n_1$, $v < n_2$. Тогда решение задачи (17) будет $u_1(t) = 0$, $u_2(t) = v$. Отсюда после интегрирования четырех первых пар соотношений в (15) с использованием указанного метода Фурье получаем оптимальные распределения $z_1(x, t) = 0$, $z_2(x, t) = v\Omega(x, t)$. Оптимальное значение функционала задачи (15) записывается в виде $f = v\gamma_2\Lambda$, где Λ — постоянная величина.

Задача с макроуправлениями отличается от (15) следующими соответствующими связями:

$$\partial z_1(0, t) / \partial x = -[\alpha_1(t) U(t) - z_1(0, t)], \quad \partial z_2(0, t)/\partial x = -[\alpha_2(t) U(t) - z_2(0, t)]$$

$$\partial z_1(l, t) / \partial x = [\alpha_1(t) U(t) - z_1(l, t)], \quad \partial z_2(l, t)/\partial x = [\alpha_2(t) U(t) - z_2(l, t)]$$

$$\alpha_1(t) U(t) \leqslant n_1, \quad \alpha_2(t) U(t) \leqslant n_2, \quad U(t) \leqslant v, \quad U(t) \geqslant 0$$

Будем брать постоянные по времени веса $\alpha_1, \alpha_2 \geqslant 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Тогда решение задачи с макроуправлениями есть $U^0(t) = v$ и, кроме того, $g^\circ(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2) \times v\Lambda$. Если рассмотреть двойственную задачу к задаче с макроуправлениями, то опять получим после независимого интегрирования $w_1^\circ(x, t) = \gamma_1\omega(x, t)$, $w_2^\circ(x, t) = \gamma_2\omega \times (x, t)$, $\omega(0, t) = \omega(l, t) = \omega(t)$. Двойственное условие в этой задаче, согласно (11), дает $2(\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2)\omega(t) - \alpha_1\eta_1^\circ(t) - \alpha_2\eta_1^\circ(t) - \delta^\circ(t) = 0$. Поскольку $\eta_1^\circ(t) = \eta_2^\circ(t) = 0$, то имеем $\delta^\circ(t) = 2(\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2)\omega(t)$.

Локальная задача для первой пластины задается первыми пятью соотношениями (15) и функционалом

$$\gamma_1 \int_0^l z_1(\xi, T)\, d\xi - \int_0^T 2(\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2)\,\omega(\tau)\, u_1(\tau)\, d\tau \to \max$$

Эта задача с использованием принципа максимума Понтрягина сводится к следующей:

$$2[\gamma_1 - (\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2)]\omega(t)\, u_1(t) = \alpha_2(\gamma_1 - \gamma_2)\omega(t) u_1(t) \to \max$$

$$0 \leqslant u_1(t) \leqslant n_1$$

Поскольку $\gamma_1 - \gamma_2 < 0$, то ее решение $u_1^*(t) = 0$. Аналогично вторая локальная задача дает

$$\alpha_1(\gamma_2 - \gamma_1)\,\omega(t) u_2(t) \to \max, \quad 0 \leqslant u_2(t) \leqslant n_2$$

откуда ввиду $\gamma_2 - \gamma_1 > 0$ имеем $u_2^*(t) = n_2$.

Далее, в соответствии с построениями метода разложения вычисляются весовые функции в зависимости от параметров ρ_1, ρ_2. Имеем

$$\alpha_1(\rho_1, \rho_2) = \alpha_1 v(1 - \rho_1) / [v - \alpha_1 v\rho_1 + (n_2 - \alpha_2 v)\rho_2]$$

$$\alpha_2(\rho_1, \rho_2) = [\alpha_2 v + (n_2 - \alpha_2 v)\rho_2] / [v - \alpha_1 v\rho_1 + (n_2 - \alpha_2 v)\rho_2]$$

Подстановка этих весов в ранее выписанное значение для $g^\circ(\alpha_1, \alpha_2)$ приводит к максимизации на единичном квадрате по ρ_1, ρ_2 следующей дробно-линейной функции:

$$g^\circ(\rho_1, \rho_2) = [\gamma_1\alpha_1 v(1 - \rho_1) + \gamma_2\alpha_2 v + \gamma_2(n_2 - \alpha_2 v)\rho_2] / [v - \alpha_1 v\rho_1 + (n_2 - \alpha_2 v)\rho_2]$$

Можно установить, что максимум выписанной функции достигается при $\rho_1 = 1$ и любом значении ρ_2 на отрезке $[0, 1]$, при этом $u_1^\circ(\rho_1^\circ, \rho_2^\circ) = 0$, $u_2^\circ(\rho_1^\circ, \rho_2^\circ) = v$. Таким образом, решение задачи (15) найдено за один шаг.

Проверим для рассматриваемого случая выполнение критерия оптимальности (12). Имеем

$$\pi_1 = \gamma_2 \int_0^l z_2^*(\xi, T)\, d\xi + \int_0^T v\delta^\circ(\tau)\, d\tau -$$

$$- \int_0^T (u_1^* + u_2^*)\,\delta^\circ(\tau)\, d\tau - \gamma_1 \int_0^l z_1^\circ(\xi, T)\, d\xi - \gamma_2 \int_0^l z_2^\circ(\xi, T)\, d\xi = \gamma_2 n_2\Lambda +$$

$$+ (v - n_2) \int_0^T \delta^\circ(\tau)\, d\tau - \alpha_1\gamma_1 v\Lambda - \alpha_2\gamma_2 v\Lambda$$

Постоянная Λ вычисляется из равенства оптимальных значений функционалов сопряженной пары задач с макроуправлениями

$$\int_0^T v\delta^\circ(\tau)\,d\tau = v(\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2)\,\Lambda$$

Учитывая последнее равенство, получаем $\pi_1 = n_2\alpha_1(\gamma_2 - \gamma_1)\Lambda$, и поэтому $\pi_1 = 0$ при $\alpha_1 = 0$.

Рассмотрим частный случай $v < n_1$, $n_2 < v$. Тогда, так же как и ранее, находится оптимальное решение задачи (15) $u_1(t) = v - n_2$, $u_2(t) = n_2$. Решение сопряженной задачи для задачи с макроуправлениями зависит от соотношения между величинами v и n_2/α_2, где α_2 — начальный постоянный весовой множитель. Пусть выполнено неравенство

(18) $\qquad \alpha_2 < n_2 / v$

Тогда получается, как и ранее $U^\circ(t) = v$, $\eta_1^\circ(t) = \eta_2^\circ(t) = 0$, $\delta^\circ(t) = 2(\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2)\,\omega(t)$, а локальные задачи дают $u_1^*(t) = 0$, $u_2^*(t) = n_2$. Имеем задачу максимизации на единичном квадрате по ρ_1, ρ_2 той же функции $g^\circ(\rho_1, \rho_2)$, что и в предыдущем случае, однако при $\rho_1^\circ = 1$ нарушается условие (18). Рассматривается величина α_2 как функция от ρ_1 при $\rho_2 = 0$ в виде $\alpha_2(\rho_1) = \alpha_2 / (1 - \alpha_1\rho_1)$ и ищется точка ρ_1^*, где перестает выполняться условие (18). Имеем уравнение $\alpha_2(\rho_1) = n_2/v$, откуда получаем $\rho_1^* = (n_2 - \alpha_2 v) / n_2\alpha_2$, $\rho_1^* \in [0, 1]$. Важно заметить, что точка $(\rho_1^*, 0)$ дает управление $u_1^\circ = \alpha_1(\rho_1^*, 0)\,U^\circ$, $u_2^\circ = \alpha_2(\rho_1^*, 0)\,U^\circ$, которое является оптимальным решением задачи (18). Так же исследуются и другие частные случаи данного примера.

Автор признателен Л. А. Галину за полезные беседы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Цурков В. И.* Декомпозиция в динамических задачах с управлением.— ПММ, 1979, т. 43, № 5, с. 949.
2. *Тер-Крикоров А. М.* Выпуклое программирование в пространстве, сопряженном пространству Банаха, и выпуклые задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1976, т. 16, № 2, с. 351.
3. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.

Поступила в редакцию
1.XI.1979