

УДК 530.182

АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ ИНВАРИАНТНЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Иванов М. Я., Слободкина Ф. А.

(Москва)

Исследуются особенности решений со стационарной структурой дивергентных инвариантных квазилинейных уравнений третьего порядка, предложенных в [1]. Эти уравнения, записанные для функции от двух независимых переменных — пространственной координаты и времени, моделируют физические процессы с диссипацией, нелинейными и осцилляционными эффектами. Они, в частности, описывают нестационарные потенциальные движения в слое несжимаемой жидкости со свободной поверхностью, например нестационарные плоские струи или поверхностные волны на мелкой воде. Другая область их применения — исследование свойств некоторых разностных схем второго порядка аппроксимации, где аналогичные уравнения получаются как соответствующие дифференциальные приближения изучаемых схем.

Ниже проводится качественный анализ стационарных решений этих уравнений в фазовой плоскости. В результате устанавливается взаимосвязь свойств инвариантности со свойствами симметрии решений, изучается вопрос о возможности предельного перехода к соответствующим обобщенным решениям квазилинейного уравнения первого порядка, показывается, в каких случаях существуют стационарные решения в подвижной системе координат, описывающие фронт ударной волны, а также стационарные решения типа солитонов. Для некоторых из рассмотренных вариантов стационарных решений приводятся соответствующие численные результаты интегрирования исходных нестационарных уравнений, подтверждающие результаты качественного анализа.

1. Рассмотрим дивергентное инвариантное квазилинейное уравнение следующего вида:

$$(1.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + \beta \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при $\alpha = \text{const} \geq 0$, $\varepsilon = \text{const} \geq 0$ и $\beta = \text{const}$ произвольного знака. Данное уравнение можно трактовать как некоторый регуляризатор третьего порядка для квазилинейного уравнения первого порядка

$$(1.2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

либо для уравнения Бюргерса

$$(1.3) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

сохраняющий вполне определенные свойства инвариантности этих уравнений. Все приведенные уравнения инвариантны относительно геометрической группы преобразований Пуанкаре [1].

Физический процесс, описываемый уравнением (1.1), характеризуется эффектами нелинейности uu_x , входящими также в (1.2) и (1.3), диссипации αu_{xx} , содержащейся в (1.3), «квадратичной вязкости» $\varepsilon (u_x^2)_x$, осцилляционными эффектами, связанными с наличием слагаемого βu_{txx} при $\beta > 0$, и некоторыми эффектами, присущими широко распространенному уравнению Кортевега — де Вриза [2] и регуляризованному уравнению для длинных волн [3] (слагаемые $\beta (uu_{xx})_x$ и βu_{txx} при $\beta < 0$).

Покажем, что инвариантное уравнение третьего порядка вида (1.1) описывает нестационарные потенциальные движения в слое несжимаемой невязкой жидкости со свободной поверхностью.

Рассмотрим слой невязкой несжимаемой жидкости конечной толщины, ограниченный с одной стороны плоскостью (x_1, x_2) , являющийся либо стенкой, либо плоскостью симметрии, и с другой стороны свободной поверхностью $y = h(x, t)$. Ось y при этом направлена вертикально вверх. Будем исходить из следующей общепринятой системы уравнений и граничных условий [4—6]: уравнения Лапласа

$$(1.4) \quad \nabla^2 \varphi + \frac{1}{\beta} \varphi_{yy} = 0 \quad \left(\nabla = i_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + i_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$$

кинетического и динамического граничных условий на свободной поверхности

$$(1.5) \quad h_t + (\nabla \varphi \nabla) h = \frac{1}{\beta} \varphi_y$$

$$(1.6) \quad \varphi_t + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{2\beta} \varphi_y^2 + gh = 0$$

и граничного условия для потенциала при $y = 0$

$$(1.7) \quad \varphi_y = 0$$

Здесь t — время, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ — векторная координата в горизонтальной плоскости, i_1, i_2 — единичные орты координатных осей x_1, x_2 соответственно, $\varphi(x, y, t)$ — потенциал скоростей, g — ускорение свободного падения.

Все величины в (1.4) — (1.7) считаются безразмерными. Обезразмеривание параметров проведено по формулам

$$x_1 = x_1^\circ / l, \quad x_2 = x_2^\circ / l, \quad y = y^\circ / h_0, \quad t = ct^\circ / l$$

$$h = h^\circ / h_0, \quad \varphi = \varphi^\circ / (cl), \quad g = g^\circ h_0 / c^2$$

Градусом помечены размерные параметры, l — характерный размер длины по координатам x_1 и x_2 , h_0 — характерный размер длины по координате y (например, средняя толщина слоя жидкости), c — характерная скорость.

Ниже, как принято в [4—6], предполагается малость безразмерного геометрического параметра $\beta = h_0^2 / l^2$. Однако в отличие от подхода, изложенного в [4—6], заранее не будет предполагаться малость другого параметра — отношения скоростей v_0 / c , где v_0 — характерная скорость частиц на поверхности жидкости, а c — характерная скорость процесса (например, для волн на мелкой воде в качестве c можно взять $\sqrt{gh_0}$ — предельную скорость распространения волн).

Основываясь на (1.4) — (1.7), получим обычным путем [4—6] упрощенные уравнения для некоторых конкретных случаев. Рассмотрим двумерное нестационарное движение слоя жидкости в плоскости (x, y) . Решение уравнения Лапласа (1.4), удовлетворяющее граничному условию (1.7), может быть представлено в виде разложения по степеням y [5, 6]

$$(1.8) \quad \varphi = f - \frac{\beta}{2} y^2 f_{xx} + \frac{\beta^2}{24} y^4 f_{xxxx} + O(\beta^3)$$

где функция f зависит только от переменных x и t . Подставляя (1.8) в граничные условия на свободной поверхности (1.5) и (1.6) и вводя горизонтальную скорость $u = f_x$, получим с точностью $O(\beta^2)$ систему уравнений

$$(1.9) \quad \begin{aligned} h_t + (uh)_x - \frac{\beta h^2}{2} \left[(hu_{xx})_x - \frac{2}{3} hu_{xxx} \right] &= 0 \\ u_t + uu_x + gh_x - \frac{\beta}{2} [h^2 (u_{tx} + uu_{xx} - u_x^2)]_x &= 0 \end{aligned}$$

При отброшенных последних слагаемых, содержащих множителем параметр β , имеем уравнения мелкой воды [4, 5, 7], описывающие, в частности, распространение одномерных волн над горизонтальным дном. Уравнения (1.9) представляют собой следующее приближение, включающее дисперсионную поправку для одномерных волн, и их можно трактовать как некоторый расширенный вариант известных уравнений Буссинеска [4—6].

Пусть свободная поверхность $h(x, t)$ испытывает незначительные возмущения. Заменяя в поправочных слагаемых, пропорциональных β , $h(x, t)$ постоянным средним значением h_0 , вместо (1.9) получим модельную систему, которую в отсутствие гравитационных сил можно решать последовательно. При этом второе уравнение принимает вид инвариантного квазилинейного уравнения типа (1.1) с $\alpha = 0$

$$(1.10) \quad u_t + uu_x - \beta_* u_{txx} - \beta_* uu_{xxx} + (\beta_*/2) (u_x^2)_x = 0 \quad (\beta_* = \beta h_0^2/2)$$

Подчеркнем, что в (1.10) дополнительно удержаны два последних слагаемых, учитывающих нелинейность в высшем приближении.

Уравнение (1.10) моделирует одномерные нестационарные движения в слое несжимаемой невязкой жидкости при отсутствии внешних массовых сил. В частности, оно может служить для описания распространения нестационарных плоских струй идеальной невесомой жидкости в пространстве с постоянным давлением.

Следует отметить, что при выводе из уравнений Буссинеска уравнения Кортевега — де Вриза, описывающего, в частности, квазипростую волну при наличии дисперсии, рассматриваются только волны, движущиеся в одном выбранном направлении [4—6]. При этом в получающемся уравнении третьего порядка вида $u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0$ нарушается свойство инвариантности относительно изменения направления (одновременной замены x на $-x$ и u на $-u$).

Отметим, что уравнение третьего порядка, аналогичное (1.1), появляется при исследовании некоторых разностных схем второго порядка

аппроксимации как дифференциальное приближение этих схем [8, 9], если с их помощью численно интегрируется уравнение (1.2). Знание свойств таких уравнений оказывается полезным для изучения причин возникновения осцилляций численных решений в областях больших градиентов рассчитываемых функций.

Данный вопрос можно проиллюстрировать на примере численного решения простейшего квазилинейного уравнения (1.2) по разностной схеме бегущего счета второго порядка аппроксимации [10]. Соответствующее дифференциальное приближение схемы (при условии, что шаг τ интегрирования по времени существенно меньше размера шага h по пространственной координате) с точностью до $O(h^4)$ имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{8} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + \frac{h^2}{24} \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \frac{h^2}{24} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = 0$$

и с точностью до постоянных коэффициентов при старших производных совпадает с левой частью уравнения (1.1).

2. Пусть уравнение (1.1) обладает стационарными решениями в системе координат, движущейся с постоянной скоростью U относительно исходной.

Введем новую координату $X = x - Ut$ и выпишем уравнение, которое описывает стационарные решения уравнения (1.1) в системе координат (X, t) после однократного интегрирования по X

$$(2.1) \quad \beta(u - U) \frac{d^2 u}{dX^2} = \alpha \frac{du}{dX} - \varepsilon \left(\frac{du}{dX} \right)^2 - \frac{u}{2} (u - 2U) + C$$

Здесь C — произвольная постоянная интегрирования. Положим для простоты $C = 0$ и введем в (2.1) новую искомую функцию $v = u - U$. В результате получим эквивалентную систему двух уравнений первого порядка

$$(2.2) \quad \frac{dv}{dX} = p, \quad \frac{dp}{dX} = \frac{2\alpha p - 2\varepsilon p - v^2 + U^2}{2\beta v}$$

Решения уравнений (2.2) симметричны относительно вертикальной оси $v = 0$ фазовой плоскости, что обусловлено появлением в знаменателе правой части второго уравнения множителя v и является следствием свойств инвариантности исходного уравнения третьего порядка (1.1) относительно геометрической группы преобразований Пуанкаре [1]. Слагаемое v^2 в числителе правой части того же уравнения связано с наличием нелинейного члена uu_x в (1.1). При $\alpha = 0$ картина интегральных кривых симметрична также и относительно горизонтальной оси $p = 0$, что является следствием использованной в (1.1) конкретной формы записи слагаемого $\varepsilon (u_x^2)_x$; при $\alpha \neq 0$ эта симметрия нарушается.

Как следует из вида правых частей системы уравнений (2.2), эта система обладает двумя парами особых точек, координаты которых определяются условиями

$$(2.3) \quad p_{1,2} = 0, \quad v_{1,2} = \pm U$$

$$(2.4) \quad v_{3,4} = 0, \quad p_{3,4} = (\alpha \mp \sqrt{\alpha^2 + 2\varepsilon U^2}) (2\varepsilon)^{-1}$$

Особенности с координатами (2.3) обращают в нуль правые части обоих уравнений (2.2). В пространстве (v, p, X) интегральные кривые могут проходить через эти особые точки при $X \rightarrow \infty$ или при $X \rightarrow -\infty$.

Особенности с координатами (2.4) возникают только во втором уравнении системы (2.2), правая же часть первого уравнения остается конечной в окрестности этих особенностей. В результате этого в пространстве (v, p, X) имеются две прямые линии, параллельные оси X , каждая точка которых является особой точкой системы уравнений (2.2). Таким образом, в пространстве (v, p, X) интегральные кривые могут проходить через особые точки (2.4) при любом конечном значении X .

Исследуем характер особых точек с координатами (2.3) и (2.4) в зависимости от значений коэффициентов α , β , ε , U , входящих в правые части уравнений (2.2). Начнем с особенностей на оси v , возникающих при выполнении условий (2.3). Для выяснения типа этих особых точек линеаризуем выражения, стоящие в правых частях уравнений (2.2) в окрестности особых точек с координатами (2.3), составим соответствующее вектовое уравнение и найдем его корни

$$(2.5) \quad \lambda_{1,2} = (\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta U^2}) (2\beta v)^{-1}$$

Значения $\lambda_{1,2}$ должны быть вычислены при $v = \pm U$ соответственно для каждой особенности. Из (2.5) следует, что при $\beta > 0$, $\alpha^2 > 4\beta U^2$ особая точка с координатами $v = +U$, $p = 0$ (в дальнейшем будем обозначать ее цифрой 1) представляет собой узел с положительными собственными направлениями ($\lambda_1 > \lambda_2 > 0$), а особая точка с координатами $v = -U$, $p = 0$ (обозначим ее цифрой 2) — узел с отрицательными собственными направлениями ($\lambda_1 < \lambda_2 < 0$); при $\alpha^2 \geq 4\beta U^2$ имеем в 1 и 2 вырожденные узлы с положительным и отрицательным собственным направлением соответственно; при $\alpha^2 < 4\beta U^2$ обе особенности типа фокуса; при $\alpha = 0$ обе особенности типа центра. При $\beta < 0$ особые точки 1 и 2 при любых α и U являются седлами, так как $\alpha < \sqrt{\alpha^2 - 4\beta U^2}$.

Из решения системы уравнений (2.2) в окрестности особенностей (2.3) следует, что когда особенности 1 и 2 — узлы, фокусы или центры, то особой точке 1 соответствует $X \rightarrow -\infty$, а особой точке 2 соответствует $X \rightarrow +\infty$. В случае, когда особенности 1 и 2 — седловые особые точки, имеются две интегральные кривые (одна с положительным, другая с отрицательным собственным направлением), которые проходят через точку 1, и две — аналогичные, проходящие через точку 2. В пространстве (v, p, X) вдоль интегральной кривой с $\lambda_1 > 0$ можно выйти из точки 1, т. е. этой интегральной кривой в точке 1 соответствует $X \rightarrow -\infty$, вдоль другой интегральной кривой можно войти в точку 1, т. е. ей соответствует $X \rightarrow +\infty$. В точке 2 имеем аналогичную ситуацию.

Исследуем характер особенностей на оси p , возникающих при выполнении условий (2.4). Обозначим точку с координатами $v = 0$, $p = p_3$ цифрой 3, а точку с координатами $v = 0$, $p = p_4$ — цифрой 4. Для анализа линеаризуем числитель и знаменатель правой части второго уравнения в окрестности особенностей 3, 4, используя для приращения v выражение $\Delta v = p \Delta X$. В результате получим уравнение

$$(2.6) \quad \frac{d\Delta p}{d\Delta X} = \frac{(2\alpha - 4\varepsilon p) \Delta p}{2\beta p \Delta X}$$

для которого выпишем вековое уравнение и найдем его корни

$$(2.7) \quad \lambda_1 = 2\beta p, \quad \lambda_2 = 2\alpha - 4\epsilon p$$

Подставляя в (2.7) значение координаты p_3 для точки 3 и p_4 для точки 4, получим, что при $\beta > 0$ обе особенности имеют характер седла, причем $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ в точке 3, $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ в точке 4; при $\beta < 0$ имеем в точке 3 особенность типа узла с $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, а в точке 4 — особенность типа узла с $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$.

При $\epsilon = 0$ на оси p остается только одна особая точка 3 с координатой $p = -U^2/(2\alpha)$, которая при $\beta > 0$ представляет собой седло с $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$, а при $\beta < 0$ — узел с $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$. Если при $\epsilon = 0$ еще и $\alpha = 0$, т. е. отсутствуют все диссипативные эффекты, то отсутствуют и особые точки (2.4) на оси p .

Заметим также, что при $\alpha = 0$ уравнения (2.2) интегрируются в квадратурах. Общий интеграл (2.2) можно записать в виде (при $\epsilon \neq -\beta$ и $v \neq 0$)

$$(2.8) \quad 2\epsilon p^2 = U^2 + Cv^{-2\epsilon/\beta} - v^2\epsilon / (\epsilon + \beta)$$

Здесь C — произвольная постоянная интегрирования.

Обратим внимание на тот факт, что анализ характера особых точек (2.4) проведен в плоскости (p, X) . В проекции на плоскость (v, p) тип особых точек сохраняется, а собственные направления оказываются параллельными оси p и оси v .

Наличие особых точек (2.4) в рассматриваемой системе уравнений связано с тем, что уравнение (1.1) имеет одну действительную характеристическую скорость, которая в движущейся системе координат равна $v = u - U$. Там, где эта характеристическая скорость обращается в нуль, стационарные решения уравнения имеют особые точки, аналогичные возникающим в гиперболических системах уравнений и уравнениях с параболическим вырождением. Детальное исследование таких особенностей для общего вида гиперболических систем и для ряда конкретных задач проведено в [11—13].

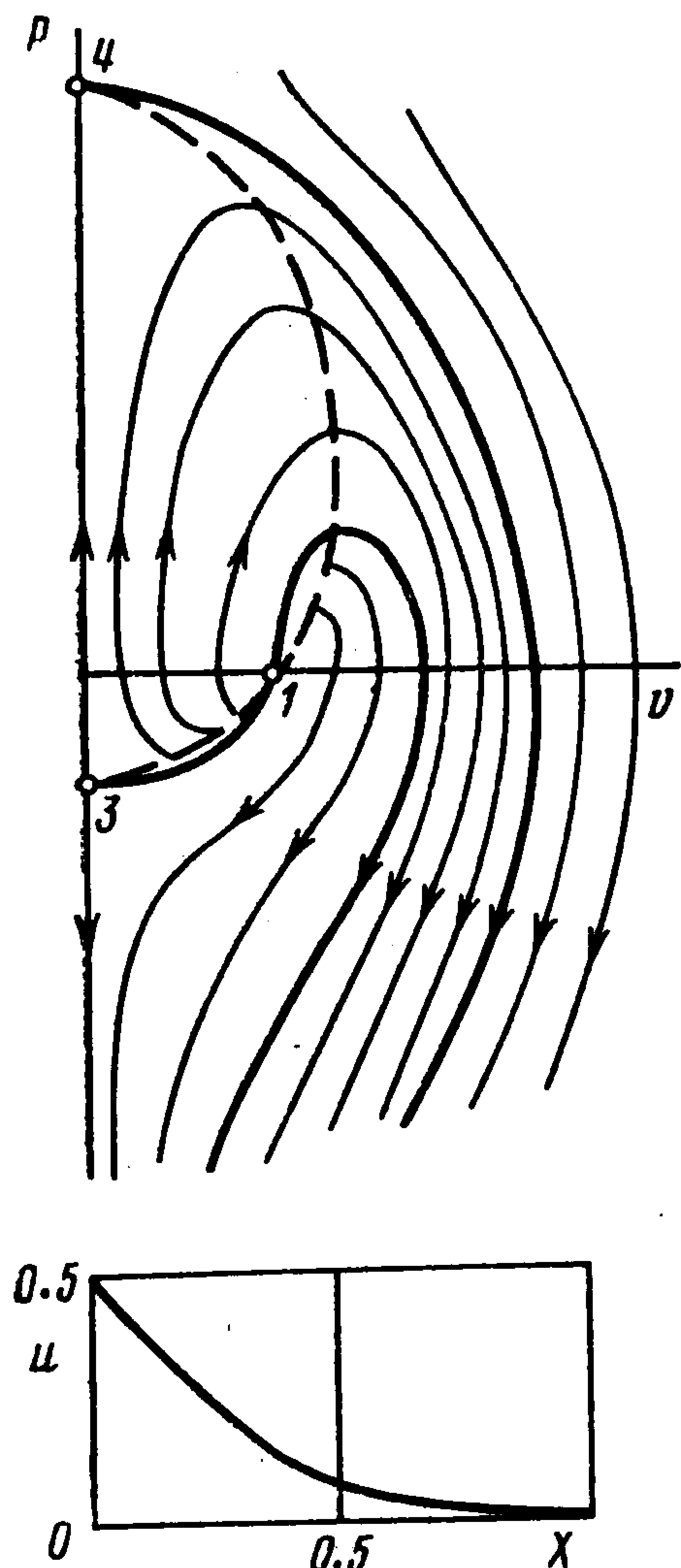
3. Приведем качественные картины поведения интегральных кривых в фазовой плоскости для различных рассмотренных выше характерных случаев. Соответствующие численные стационарные решения уравнения (1.1) получены с использованием неявной дивергентной разностной схемы, в которой аппроксимация производных по x на каждом временном слое проведена с помощью симметричных разностей на пяти-точечном шаблоне [1].

Рассмотрим задачу об эволюции фронта, когда в качестве начальных данных задано распределение

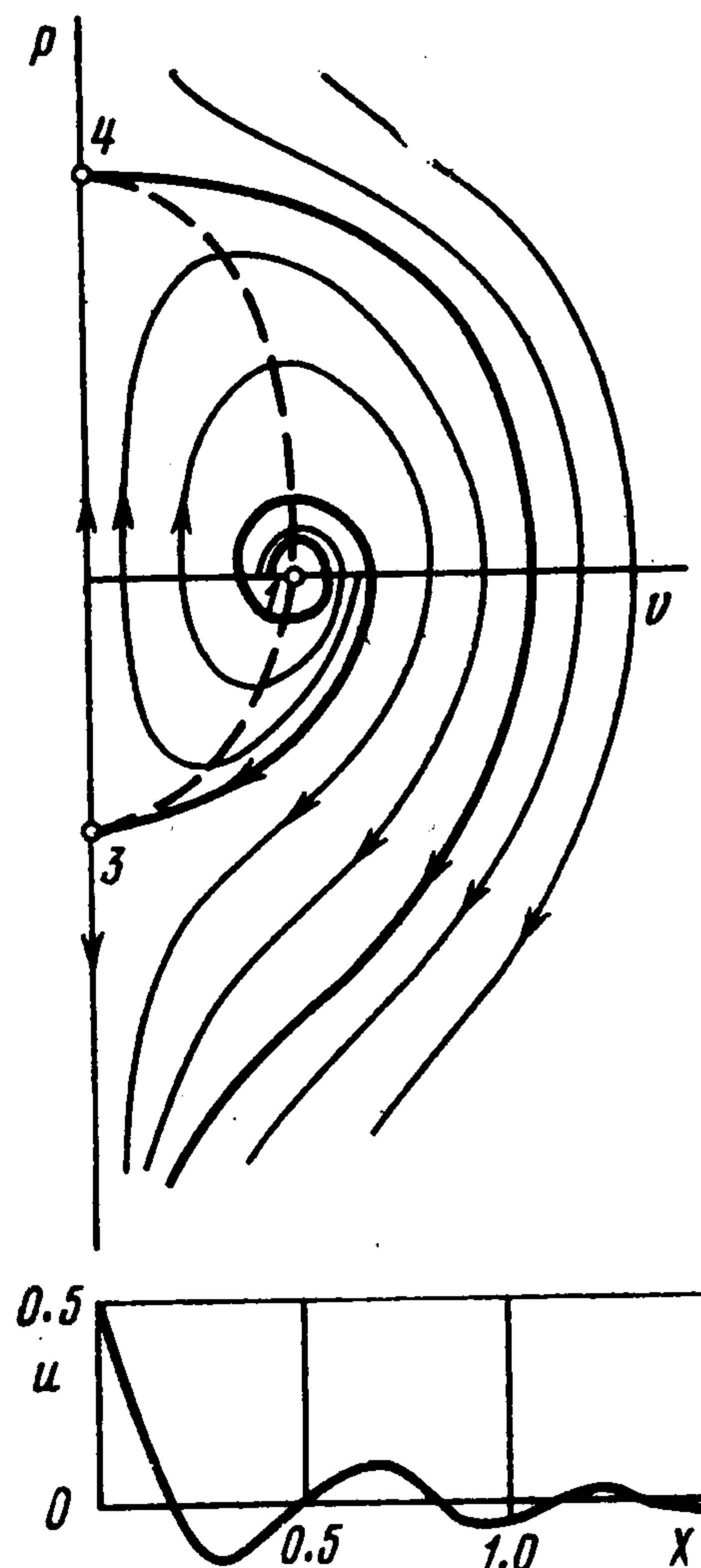
$$(3.1) \quad u(x, 0) = [1 - \text{th}(kx)] / 2$$

где $k = \text{const}$ определяет начальную крутизну фронта. Решение квазилинейного уравнения первого порядка (1.2) с начальными данными (3.1) с течением времени выходит на стационарный разрывный профиль, представляющий собой скачок функции u от 0 до 1, движущийся со скоростью $U = 0,5$ в направлении возрастания x . Для уравнения Бюргерса (1.3) решение при начальных данных (3.1) также выходит на стационарный профиль, который является монотонной функцией, причем в фазовой плоскости переменных $v = u - U$ и $p = dv/dX$ этому решению отвечает участок параболы $p = (v^2 - U^2)/(2\alpha)$ при $p \leq 0$.

На фиг. 1 показана качественная картина поведения интегральных кривых в фазовой плоскости (v, p) для квазилинейного уравнения третьего порядка (1.1) при $\beta > 0$ и $\alpha^2 > 4\beta U^2$. Сепаратрисы, проходящие через седловые особые точки, приведены на фигуре жирными линиями. Штриховой линией показана изоклина нулевых углов наклона интегральных кривых, определяемая уравнением эллипса $v^2 + 2\epsilon p^2 - 2\alpha p = U^2$. В рассматриваемом случае существует монотонное стационарное решение в виде фронта перехода от $u = 1$ до $u = 0$, который движется со скоростью $U = 0,5$, совпадающей со скоростью соответствующего разрывного решения уравнения (1.2). Это-



Фиг. 1



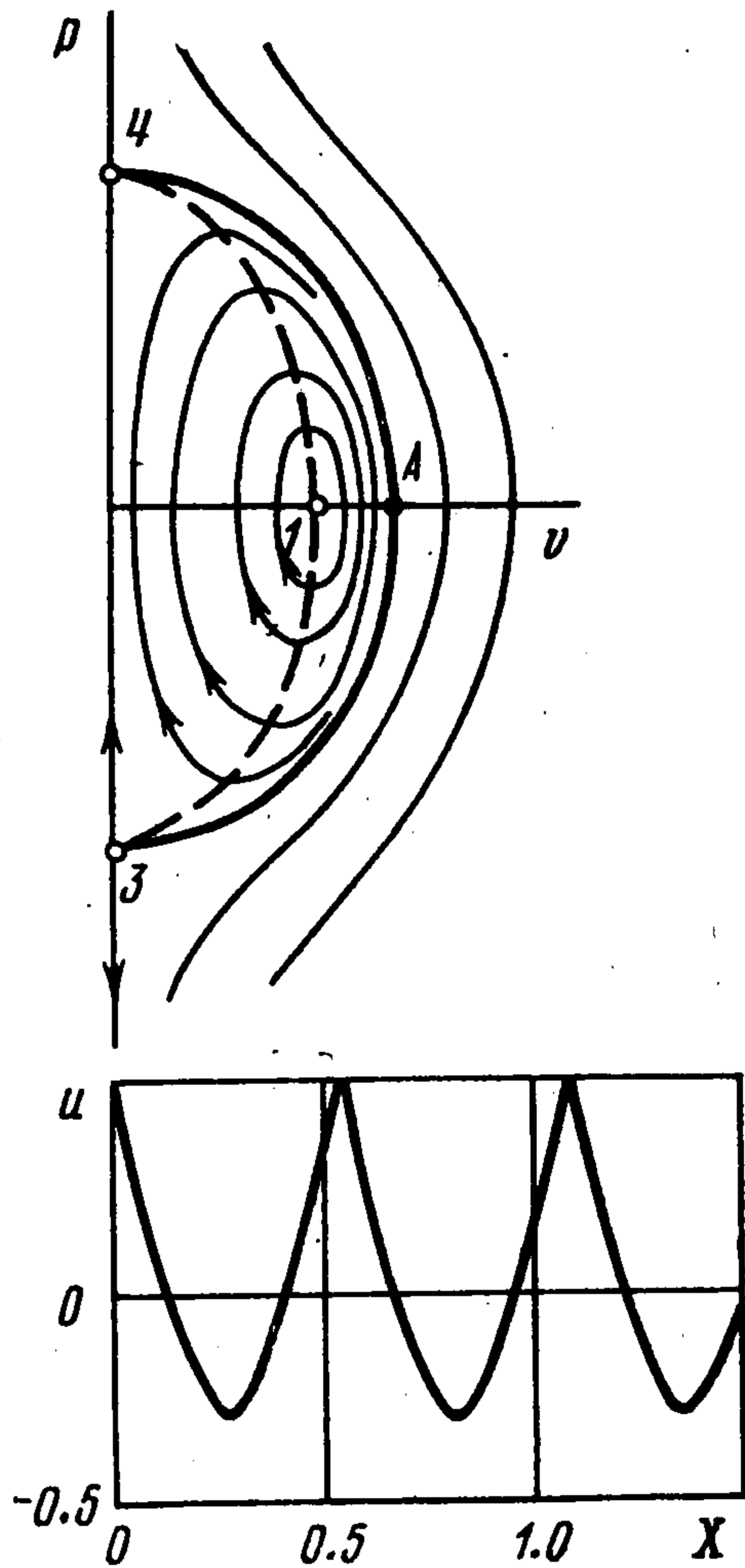
Фиг. 2

му решению в фазовой плоскости отвечает участок сепаратрисы седла 3, соединяющий узловые особые точки 1 и 2. Вследствие симметрии интегральных кривых относительно оси ординат фазовой плоскости на фиг. 1 и последующих показана лишь область $v \geq 0$. На фиг. 1 приведено также стационарное распределение u в зависимости от координаты X , полученное численным интегрированием (1.1) при значениях коэффициентов $\beta = \epsilon = 0,01$ и $\alpha = 0,1$ для начальных данных (3.1). Здесь и далее функция $u = u(X)$ построена только для $X \geq 0$.

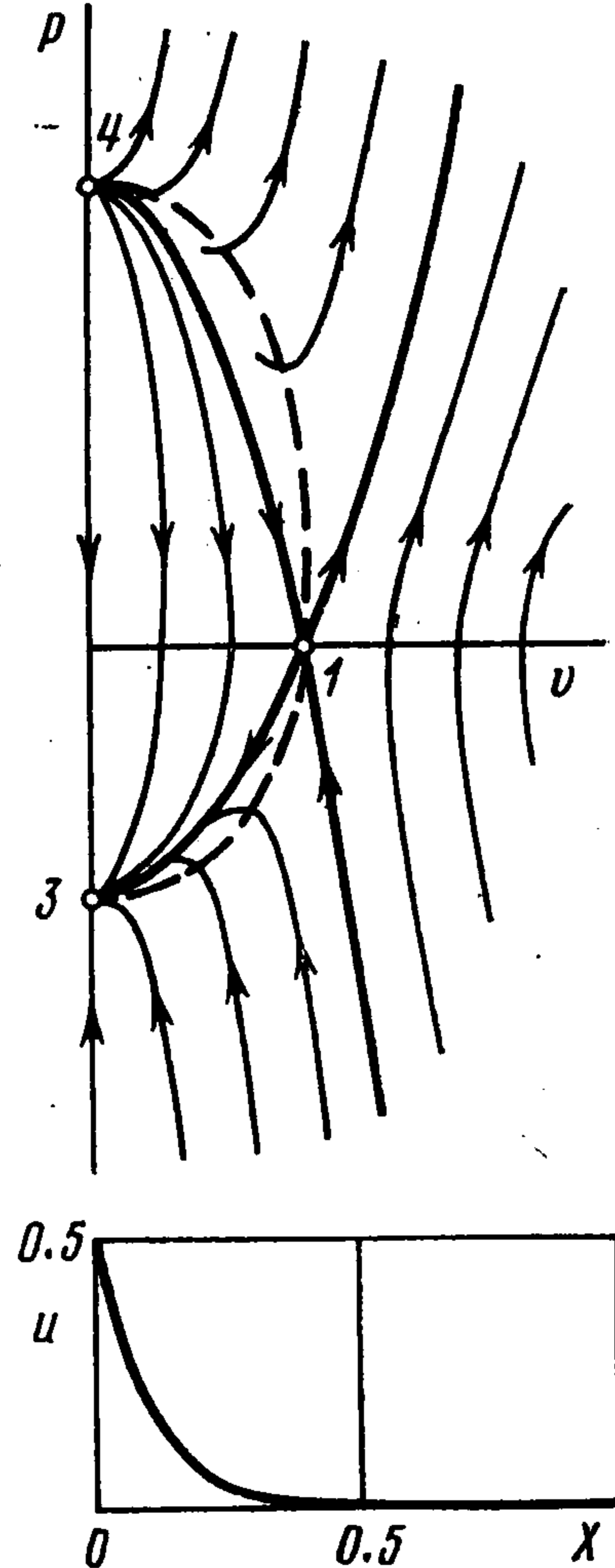
Картина интегральных кривых для случая $\beta > 0$ и $\alpha < 4\beta U^2$ показана на фиг. 2. Все обозначения на данной фигуре и последующих аналогичны использованным на фиг. 1. В этом случае стационарное решение в переходной зоне ударной волны не является монотонным, а содержит симметричные затухающие при удалении от основного фронта осцилляции. Интегральная кривая, реализующая переход от $u = 1$ до $u = 0$, является сепаратрисой, проходящей через особую точку 3. Соответствующее стационарное численное решение уравнения (1.1) при $\beta = \epsilon = 0,01$ и $\alpha = 0,01$ также приведено на фиг. 2.

На фиг. 3 показаны интегральные кривые и численное решение для $\beta = \epsilon = 0,01$ и $\alpha = 0$, когда особые точки на горизонтальной оси становятся центрами. В этом случае стационарное решение содержит незатухающие осцилляции, распространяющиеся

по X в отрицательном и положительном направлениях до бесконечности. При $X = 0$ имеется переходный фронт, предусмотренный начальными условиями. В фазовой плоскости (v, p) этому фронту отвечает движение по сепаратрисе седла 3 от точки A до симметрично расположенной относительно начала координат точки B и далее при



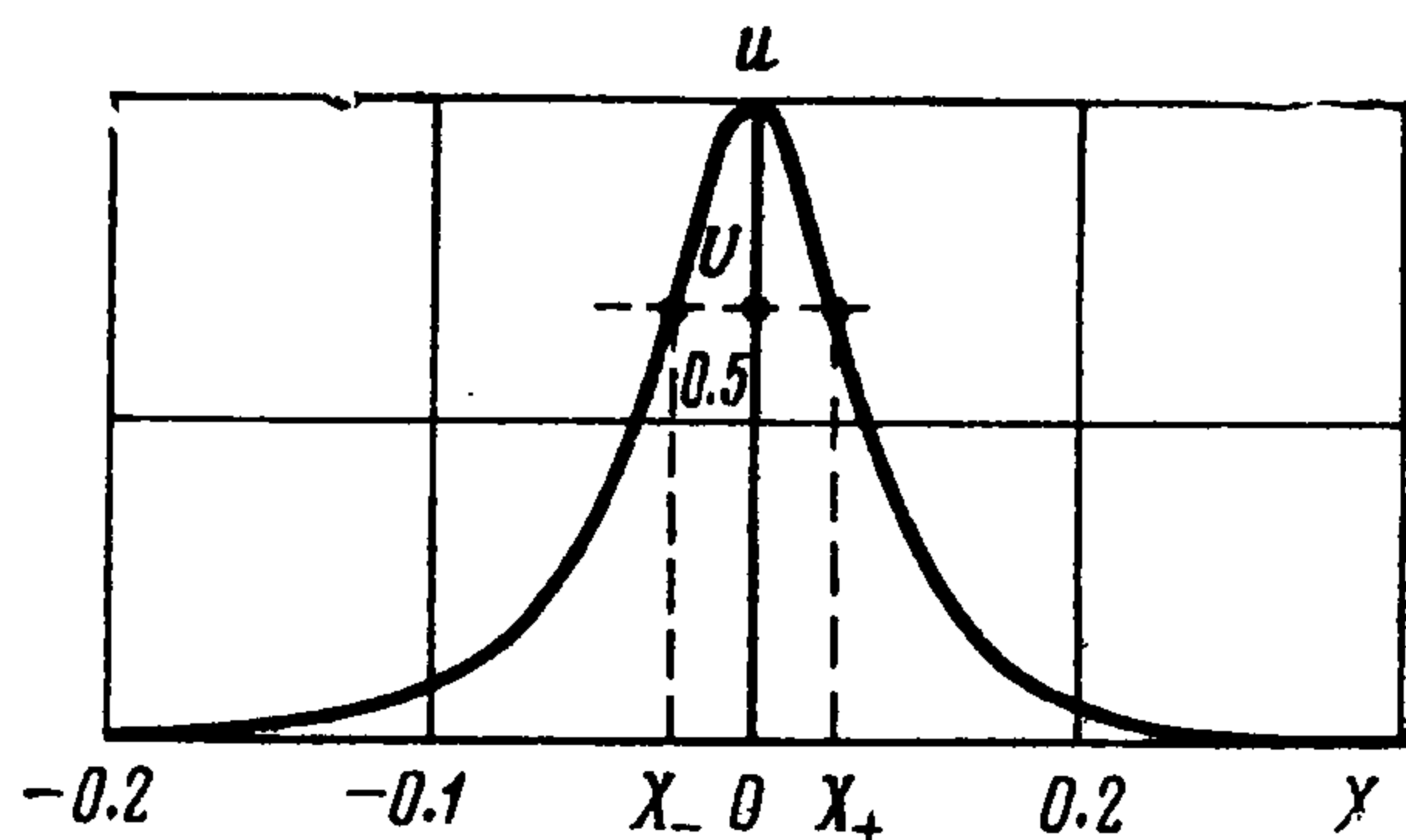
Фиг. 3



Фиг. 4

$X \rightarrow +\infty$ периодическое движение от точки B до точки 4, из точки 4 по другой сепаратрисе $v = 0$ до точки 3, от точки 3 до 4 через точку B и т. д. При $X \rightarrow -\infty$ движение происходит по симметричной относительно оси p интегральной кривой.

Рассмотрим теперь случай $\beta < 0$, которому соответствует поле интегральных кривых на фиг. 4. В этом случае решение с начальными данными (3.1) описывается интегральной кривой, выходящей из седла 1 и входящей в седло 2 через узел 3. Соответствующее численное решение, являющееся монотонной функцией и описывающее фронт перехода от $u = 1$ к $u = 0$, представлено на фиг. 4 при $\beta = -0,01$, $\varepsilon = |\beta|/2$ и $\alpha = 0,01$.



Фиг. 5

При $\varepsilon \rightarrow 0$ две особые точки на оси p уходят соответственно в $\mp \infty$, а протяженность фронта перехода вдоль оси X уменьшается (возрастает крутизна фронта). При одновременном стремлении коэффициентов α и β к нулю рассмотренные решения уравнения (1.1) переходят в соответствующее разрывное решение уравнения (1.2). Если при этом остается выполненным условие $\alpha^2 \geq 4\beta U^2$, то получающаяся последовательность решений описывается монотонными функциями, в противном случае имеем последовательность решений с симметрично затухающими осцилляциями.

Помимо стационарных решений типа переходной зоны ударной волны уравнение (1.1) при $\beta < 0$ обладает стационарными решениями в виде солитонов — уединенных волн [1]. На фиг. 5 представлено такое стационарное решение с амплитудой, равной

единице, и скоростью распространения $U = 0,67$, рассчитанное при значениях $\alpha = 0$, $\beta = 2\varepsilon = 0,001$. Этому решению в фазовой плоскости на фиг. 4 соответствуют следующие участки интегральных линий: сепаратриса седла 2, соединяющая седло 2 и узел 4, далее — одна из интегральных кривых, соединяющих узлы 4 и 3 при $0 < v < U$, и, наконец, сепаратриса седла 2, проходящая через узел 3 и седло 2. Этим трем участкам интегральных кривых отвечают значения X : $-\infty < X \leq X_-$, $X_- \leq X \leq X_+$, $X_+ \leq X < \infty$ (фиг. 5). Благодаря наличию в фазовой плоскости узловых особых точек 3 и 4 уравнение (1.1) при $\beta < 0$ имеет бесконечное число всевозможных солитонных решений, движущихся с одной скоростью U .

В заключение отметим, что стационарные решения уравнений, исследованных в данной работе, существенно отличаются от решений уравнения Кортевега — де Вриза — Бюргера [14, 15], а также регуляризованного уравнения для длинных волн [3], структура стационарных решений которого аналогична решениям уравнения Кортевега — де Вриза.

Авторы признательны А. Г. Куликовскому за полезные советы и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов М. Я. О некоторых инвариантных квазилинейных уравнениях третьего порядка. — Числ. мет. механ. спл. среды, 1980, т. 11, № 7.
2. Korteweg D. J., de Vries G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. — Philos. Mag., 1895, v. 39, p. 422.
3. Benjamin T. B., Bona J. L., Mahony J. J. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems. — Philos. Trans. Roy. Soc., London A, 1972, v. 272, p. 47.
4. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973.
5. Узем! Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
6. Нелинейные волны. Под ред. С. Лейбовича и А. Сибасса. М.: Мир, 1977.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954.
8. Шокин Ю. И. Метод дифференциального приближения. Новосибирск: Наука, 1979.
9. Иванов М. Я., Корецкий В. В., Курочкина Н. Я. Исследование свойств разностных схем сквозного счета второго порядка аппроксимации. — Числ. мет. мех. спл. среды, 1980, т. 11, № 2, с. 41.
10. Ландау Л. Д., Мейман Н. Н., Халатников И. М. Численные методы интегрирования уравнения в частных производных методом сеток. Тр. 3 Всес. матем. съезда. Москва, 1956, Т. 3. М.: Изд-во АН СССР, 1958. с. 92.
11. Слободкина Ф. А. Качественное исследование уравнений квазиодномерного магнитогидродинамического течения в каналах. — ПМТФ, 1966, № 3, с. 26.
12. Слободкина Ф. А. Устойчивость квазиодномерных магнитогидродинамических течений. — ПММ, 1967, т. 31, вып. 2, с. 406.
13. Куликовский А. Г., Слободкина Ф. А. Об устойчивости произвольных стационарных течений в окрестности точек непрерывного перехода через скорость звука. — ПММ, 1967, т. 31, вып. 4, с. 593.
14. Grad H., Hu P. N. Unified shock profile in a plasma. — Phys. Fluids, 1967, v. 10, No. 12, p. 2596.
15. Johnson R. S. A nonlinear equation incorporating damping and dispersion. — J. Fluid Mech., 1970, v. 42, part 1, p. 49.

Поступила в редакцию
22.II.1980