Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 1, 1981

УДК 583.70

К КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТЕПЛОВЫХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ФЛУКТУАЦИЙ В НЕОДНОРОДНОМ ГАЗЕ

Гречанный О. А., Токарчук В. В.

(Киев)

Выводятся уравнения для тепловых флуктуаций гидродинамических полей в неоднородных газовых потоках. Используется модифицированный метод Чепмена — Энскога построения нормальных решений кинетического уравнения Больцмана — Ланжевена для неравновесных флуктуаций фазовой плотности. Получены зависящие от средних значений термодинамических потоков выражения для корреляторов сторонних источников флуктуаций теплового потока и тензора напряжений, которые обобщают формулы Ландау — Лифшица и соотношения флуктуационно-диссипативной теоремы на область неравновесных устойчивых состояний.

Интерес, проявляемый в последние годы к теории тепловых шумов в гидродинамических системах, связан с возможными обобщениями ее на область неравновесных состояний. Это имеет особенно важное значение при решении проблем моделирования аномального поведения неравновесных систем вблизи порога устойчивости.

Если подходы равновесной теории формально применить к исследованию неравновесных флуктуаций, то возникают задачи определения одновременных статистических характеристик гидродинамических полей в методе Онзагера или определения статистических свойств сторонних источников флуктуаций в методе Ланжевена. Обе эти задачи по существу эквивалентны проблеме обобщения флуктуационно-диссипативной теоремы [1] на область неравновесных состояний. Они имеют полное решение [2—4] на кинетическом уровне описания эволюции газовых систем и приводят к уравнению Больцмана — Ланжевена [3] для флуктуаций неравновесной фазовой плотности.

Основные уравнения кинетической теории [2—4] представляют собой естественную основу для последующего перехода к гидродинамическому уровню описания процессов переноса и неравновесных тепловых флуктуаций в газе. Полученные ранее на этом пути результаты [5, 6] существенно ограничены условием локального термодинамического равновесия и поэтому не учитывают влияние эффектов неоднородности системы на статистические свойства сторонних источников флуктуаций в гидродинамических уравнениях, представляя собой тривиальное обобщение равновесной теории [7]. В то же время при изучении ряда явлений, в частности аномального усиления флуктуаций в области порога устойчивости и их роли в процессе зарождения турбулентности [5, 8, 9], необходим последовательный учет эффектов влияния неоднородности на статистическую структуру флуктуирующих гидродинамических полей. Исследованию этих эффектов в газовых потоках посвящена данная работа.

1. Статистическая структура сторонних источников флуктуаций в уравнениях газовой динамики. При описании кинетической стадии эволюции классического одноатомного газа с учетом крупномасштабных флуктуаций используется представление о случайном поле макроскопической плотности состояний системы $N(t, x)$ в μ-пространстве, среднее значение которого определяет нормированную на число частиц N°, одночастичную функцию распределения $F(t, x) = \langle N(t, x)\rangle$, где $x = (\mathbf{r}, \mathbf{v})$ [2—4]. В общем случае $N(t, x)$ удовлетворяет довольно сложному нелинейному стохастическому уравнению [4]. Однако в области неравновесных, но устойчивых состояний газа, где уровень интенсивности тепловых флуктуаций $\delta N = N - F$ мал, это уравнение существенно упрощается [10], распадаясь на известную систему уравнений кинетической теории флуктуаций [3]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathrm{v}\cdot\nabla\right) F(t, x) = J_v(F, F) \tag{1.1}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathrm{v}\cdot\nabla\right) \delta N(t, x) = J_v'(F)\,\delta N(t, x) + \delta I(t, x) \tag{1.2}$$

Здесь $J_v(F, F)$ и $J_v'(F)$ — больцмановские интеграл и линеаризованный оператор столкновений, $\delta I(t, x)$ — гауссово случайное поле с нулевым средним значением и корреляционной функцией

$$\begin{aligned}\langle \delta I(t_1, x_1)\,\delta I(t_2, x_2)\rangle &= \delta(t_1 - t_2)\,\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\,D[F, F; \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2] \equiv \\ &\equiv \delta(t_1 - t_2)\,\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\,\{J_{v_1v_2}(F, F) + \delta(\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2)\,J_{v_1}^{*}(F, F) - \\ &- [J_{v_1}'(F) + J_{v_2}'(F)]\,F(t_1, x_1)\,\delta(\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2)\}\end{aligned} \tag{1.3}$$

$J_{v_1v_2}(F, F)$ — «непроинтегрированный интеграл столкновений», определение которого совпадает с формулой (23.12) в [3]. Уравнения (1.1), (1.2) и формула (1.3) составляет математическую основу рассматриваемой здесь кинетической теории гидродинамических флуктуаций в неоднородных газовых потоках.

Флуктуирующий интеграл столкновений δI в (1.2) не зависит от δN и поэтому является «сторонним» источником флуктуаций в уравнении Больцмана, линеаризованным относительно малых отклонений фазовой плотности δN от среднего значения F. В силу (1.3) его статистические свойства зависят от степени неравновесности газа. В связи с последующими результатами важно обратить внимание на роль отдельных членов выражения (1.3) в формировании статистической структуры случайного поля δN. Используя уравнение (1.1), последние три члена в правой части (1.3) можно представить в форме

$$\delta(t_1 - t_2)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1,2}[\mathrm{v}_i\cdot\nabla_i - J_{v_i}'(F)]\right)\delta(x_1 - x_2)\,F(t_1, x_1) \tag{1.4}$$

с учетом которой из (1.2) следует представление для одновременного коррелятора флуктуаций

$$\langle \delta N(t, x_1)\,\delta N(t, x_2)\rangle = \delta(x_1 - x_2)\,F(t, x_1) + g(t, x_1, x_2) \tag{1.5}$$

и уравнение для пространственной корреляционной функции g

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1,2}[\mathrm{v}_i\cdot\nabla_i - J_{v_i}'(F)]\right) g(t, x_1, x_2) = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\,J_{v_1v_2}(F, F) \tag{1.6}$$

Таким образом, с членом $J_{v_1v_2}$ в (1.3) связаны эффекты, обусловленные статистическими связями между пространственно разделенными объемами неравновесного газа. В состоянии локального термодинамического равновесия $J_{v_1v_2} = 0$ и уравнение (1.6) имеет тривиальное решение, которое обеспечивает пространственную δ-коррелированность одновременных флуктуаций, связанную с последними членами в (1.3). При малых отклонениях от локального термодинамического равновесия выражение (1.3) гарантирует появление неравновесных добавок в δ-коррелированную часть равновесного выражения (1.5) с одновременным зарождением пространственных статистических связей ($g \neq 0$). Последовательный учет пространственных корреляций в гидродинамическом пределе имеет принципиальное значение при исследовании структуры газового потока вблизи порога устойчивости [8, 9] и является особенностью данной работы по сравнению с известными исследованиями [5, 6, 11] в кинетической теории гидродинамических флуктуаций.

Перейдем к гидродинамическому описанию процессов переноса и флуктуаций в неравновесном газе. Из (1.1) следует известная [12] система уравнений переноса для средних значений гидродинамических полей. Далее будет использована сокращенная запись этой системы

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{\Phi}_\alpha(t, \mathbf{r}) + \Theta_\alpha(\overline{\Phi}; \mathbf{r}) = H_\alpha(\overline{\Phi}; \mathbf{r}), \qquad \alpha = 0, 1, 2, 3, 4 \tag{1.7}$$

и обозначения $\Theta_{\alpha\beta}'$ и $H_{\alpha\beta}'$ для линеаризованных операторов

$$\Theta_{\alpha\beta}'(\overline{\Phi}; \mathbf{r})\, z(\mathbf{r}) = (z, \partial_{\overline{\Phi}_\beta})\, \Theta_\alpha(\overline{\Phi}; \mathbf{r}), \quad H_{\alpha\beta}'(\overline{\Phi}; \mathbf{r})\, z(\mathbf{r}) = (z, \partial_{\overline{\Phi}_\beta})\, H_\alpha(\overline{\Phi}; \mathbf{r})$$

Здесь

$$(z, \partial_{\overline{\Phi}_\beta}) = \int d\mathbf{r}' z(\mathbf{r}')\, \delta/\delta\overline{\Phi}_\beta(\mathbf{r}')$$

$$H_0 = 0, \; H_k = -(m\bar{n})^{-1}\nabla_l \overline{P}_{lk}, \quad k = 1, 2, 3$$

$$H_4 = -n^{-1}(\nabla_l \bar{q}_l + \overline{P}_k{:}\nabla_k \bar{u}{:})$$

$\delta/\delta\overline{\Phi}_\beta(\mathbf{r})$ — функциональная производная, $\overline{\Phi} = (\overline{\Phi}_0, \overline{\Phi}_1, \overline{\Phi}_2, \overline{\Phi}_3, \overline{\Phi}_4) = (\bar{n}, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{e})$ — средние значения плотности n, гидродинамической скорости u_k ($k = 1, 2, 3$) и тепловой энергии $e = 3kT/2$, $\Theta_\alpha(\overline{\Phi})$ — нелинейный оператор Эйлера, $\bar{q}_l$, $\overline{P}_{kl}$ — средние значения теплового потока и девиатора вязких напряжений. По повторяющимся латинским индексам здесь и ниже проводится суммирование от 1 до 3, по греческим — от 0 до 4.

С помощью системы аддитивных инвариантов столкновений

$$\psi_0 = 1, \quad \psi_k = \bar{n}^{-1} c_k \quad (k = 1, 2, 3), \quad \psi_4 = \bar{n}^{-1}(mc^2 - \bar{e})$$

$$c_k = v_k - \bar{u}_k$$

флуктуации гидродинамических полей $\delta\Phi_0 = \delta n$, $\delta\Phi_k = \delta u_k$, $\delta\Phi_4 = \delta e$ представим в виде

$$\delta\Phi_\alpha(t, \mathbf{r}) = \int d\mathbf{v}\psi_\alpha \delta N(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad \alpha = 0, 1, 2, 3, 4 \tag{1.8}$$

Из формулы (1.3) следует, что реализации случайного поля $\delta I(t, x)$ принадлежат подпространству фазовых функций, ортогональному к подпространству, натянутому на инварианты столкновений, т. е.

$$\int d\mathbf{v}\psi_\alpha \delta I(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = 0, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3, 4 \tag{1.9}$$

поэтому вычисление моментов уравнения (1.2) с учетом (1.8) дает систему уравнений переноса для гидродинамических флуктуаций

(1.10) $$\frac{\partial}{\partial t}\delta n+\Theta'_{0\beta}(\overline{\Phi})\delta\Phi_\beta=0,\quad \frac{\partial}{\partial t}\delta u_k+\Theta'_{k\beta}(\overline{\Phi})\delta\Phi_\beta= =-\delta\left[\frac{1}{m\bar n}\nabla_l P_{lk}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta e+\Theta'_{4\beta}(\overline{\Phi})\delta\Phi_\beta=\frac{1}{\bar n}\nabla_k(\bar p\delta_{kl}+\bar P_{kl})\delta u_l- -\delta\left[\frac{1}{\bar n}\nabla_k q_k+\frac{1}{n}P_{kl}\nabla_l u_k\right]$$

Здесь символ δ означает линейную вариацию величин, заключенных в квадратные скобки, например $\delta[n^{-1}P_{kl}\nabla_k u_l]=-\bar n^2\delta n\bar P_{kl}\nabla_l u_k+ +\bar n^{-1}\delta P_{kl}\nabla_l u_k+\bar n^{-1}\bar P_{kl}\nabla_l\delta u_k$; средние значения теплового потока $\bar q_k$, тензора напряжений $\bar P_{kl}$ и их флуктуации δq_k, δP_{kl} определяются выражениями

(1.11) $$\bar q_k(t,\mathbf r)=\frac{m}{2}\int d\mathbf v c_k c^2 F(t,x),\quad \bar P_{kl}(t,\mathbf r)=m\int d\mathbf v\,(c_k c_l)_s\,F(t,x)$$
$$\delta q_k(t,\mathbf r)=\frac{m}{2}\int d\mathbf v c_k c^2\delta N(t,x),\quad \delta P_{kl}(t,\mathbf r)=m\int d\mathbf v\,(c_k c_l)_s\,\delta N(t,x)$$

где $(c_k c_l)_s=2^{-1}(c_k c_l+c_l c_k)-3^{-1}\delta_{kl}c^2$.

Для замыкания уравнений переноса (1.10) и (1.7) необходимо найти функциональную зависимость $\bar q_k$ и $\bar P_{kl}$ от $\overline{\Phi}$, а δq_k и δP_{kl} от $\overline{\Phi}$ и $\delta\Phi$ Как известно [12], первая из этих задач решается с помощью построения нормальных решений уравнения (1.1). Метод Чепмена — Энскога с точностью до членов порядка K (число Кнудсена) дает $\bar q_k=-\bar\lambda\nabla_k\bar T$, $\bar P_{kl}= =-2\bar\eta(\nabla_k\bar u_l)_s$ — законы Фурье и Ньютона, где $\bar\lambda=\lambda(\bar T)$ и $\bar\eta=\eta(\bar T)$ — коэффициенты теплопроводности и вязкости. Чтобы можно было использовать этот результат в уравнениях (1.10), необходимо модифицировать метод Чепмена — Энскога применительно к стохастическому кинетическому уравнению (1.2), построить его нормальное решение с той же (порядка K) степенью точности и в этом приближении вычислить флуктуации термодинамических потоков по формулам (1.11). Реализация этой программы представлена ниже. Основной ее результат состоит в получении формул

(1.12) $$\delta q_k(t,\ \mathbf r)=(\bar p\delta_{kl}+\bar P_{kl})\,\delta u_l-\delta\,[\lambda\,(T)\nabla_k T]+\delta Q_k(t,\ \mathbf r)$$
$$\delta P_{kl}(t,\ \mathbf r)=-\delta\,[2\eta\,(T)\,(\nabla_k u_l)_s]+\delta\Pi_{kl}(t,\ \mathbf r)$$

Здесь δQ_k и $\delta\Pi_{kl}$ — сторонние источники флуктуаций теплового потока и тензора напряжений, представляющие собой случайные гауссовские поля с нулевым средним значением и корреляционными функциями

(1.13) $$\langle\delta Q_k(1)\,\delta Q_l(2)\rangle=2k\bar T^2\bar\lambda\delta(1-2)\left[\delta_{kl}+\frac{9}{20}\frac{\bar P_{kl}}{\bar p}\right]$$
$$\langle\delta\Pi_{kl}(1)\,\delta\Pi_{sp}(2)\rangle=4k\bar T\bar\eta\delta(1-2)\,E^{kl}_{in}E^{sp}_{nt}\left[\delta_{it}+\frac{\bar P_{it}}{\bar p}\right]$$
$$\langle\delta Q_s(1)\,\delta\Pi_{kl}(2)\rangle=\frac{27}{5\bar n}\bar\eta\delta(1-2)\,E^{kl}_{sp}\bar q_p$$

где аргументы 1 и 2 в функциях означают совокупности $(t_1,\ \mathbf r_1)$ и $(t_2,\ \mathbf r_2)$,

$\bar{p}$ — гидростатическое давление

$$E^{kl}_{sp} = \frac{1}{2}(\delta_{pk}\delta_{sl} + \delta_{pl}\delta_{sk}) - \frac{1}{3}\delta_{kl}\delta_{sp}$$

С учетом формул (1.12) и законов Фурье и Ньютона для $\bar{q}_k$ и $\bar{P}_{kl}$ уравнения (1.10) преобразуются в линеаризованные уравнения Навье — Стокса — Фурье

$$(1.14)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\delta\Phi_\alpha(t, \mathbf{r}) = [H'_{\alpha\beta} - \Theta'_{\alpha\beta}]\,\delta\Phi_\beta(t, \mathbf{r}) + \delta G_\alpha(t, \mathbf{r}),\qquad \alpha = 0, 1, 2, 3, 4$$

со случайными сторонними источниками δG

$$\delta G_0 = 0,\quad \delta G_k = -\bar{n}^{-1}\nabla_l\delta\Pi_{lk},\quad k = 1,\ 2,\ 3$$

$$\delta G_4 = -\bar{n}^{-1}\nabla_k\delta Q_k - \bar{n}^{-1}\delta\Pi_{kl}\nabla_l\bar{u}_k$$

В случае однородного газа ($\bar{q} = 0$, $\bar{P} = 0$) формулы (1.13) превращаются в известные выражения флуктуационно-диссипативной теоремы для корреляторов равновесных флуктуаций термодинамических потоков, которые впервые были получены феноменологическим путем [7], а также в рамках кинетической теории для состояния термодинамического равновесия [13] и для локально равновесного состояния [5].

Новый результат данной работы состоит в получении неравновесных добавок $\bar{P}_{kl}/\bar{p}$ в первых двух формулах (1.13) и последней формулы (1.13). Эти формулы представляют собой обобщенные флуктуационно-диссипативные соотношения для гидродинамической стадии эволюции неоднородного газа. Заметим, что они не содержат отличных от $\bar{\lambda}$ и $\bar{\eta}$ физических параметров.

Из уравнений (1.14) и формул (1.13) можно получить представление для одновременного двухточечного момента флуктуаций гидродинамических полей $\langle\delta\Phi_\alpha(t,\ \mathbf{r}_1)\,\delta\Phi_\beta(t,\ \mathbf{r}_2)\rangle$ в виде суммы δ-коррелированного слагаемого $b_{\alpha\beta}^{(0)}(t,\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2)$ и пространственного коррелятора $b_{\alpha\beta}^{(1)}(t,\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2)$, которые в согласии с (1.5) определяются формулами

$$(1.15)\qquad b^{(0)}_{\alpha\beta} = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\int d\mathbf{v}_1\psi_\alpha(\mathbf{v}_1)\,\psi_\beta(\mathbf{v}_1)\,F\,(t, x_1)$$

$$b^{(1)}_{\alpha\beta} = \int d\mathbf{v}_1\,d\mathbf{v}_2\psi_\alpha(\mathbf{v}_1)\,\psi_\beta(\mathbf{v}_2)\,g$$

(F и g — нормальные решения уравнений (1.1) и (1.6) соответственно), а также вывести замкнутую систему гидродинамических уравнений для $b_{\alpha\beta}^{(1)}$. Вывод этих уравнений довольно громоздкий и не является целью работы. Важно отметить лишь, что неравновесные вклады в $b_{\alpha\beta}^{(0)}$ в виде добавки F_1 к F_0 — локально-равновесному распределению в (1.15) оказываются величинами такого же порядка, как и неравновесный пространственный коррелятор $b_{\alpha\beta}^{(1)}$ (для однородного газа $b_{\alpha\beta}^{(1)} = 0$). Таким образом, при обобщении онзагеровского метода расчета гидродинамических флуктуаций на неравновесную область начальные условия к линеаризованным уравнениям Навье — Стокса — Фурье для двухвременных моментов случайных полей $\delta\Phi_\alpha(t,\ \mathbf{r})$ следует задавать в виде суммы $b_{\alpha\beta}^{(0)} + b_{\alpha\beta}^{(1)}$, где для пространственных корреляторов $b_{\alpha\beta}^{(1)}$ используются выражения, предварительно найденные в результате решения соответствующих неоднородных уравнений.

Необходимо отметить отличие сформулированных выше результатов от результатов работ [5, 6, 11], также посвященных кинетической теории неравновесных гидродинамических флуктуаций. Так, в [5, 6] получены только равновесные члены в формулах (1.13) (формулы Ландау — Лифшица). Причины ошибочных выводов в этих работах различны. В [5] при расчете коррелятора $\langle\delta I\delta I\rangle$ не был получен член $J_{v_1v_2}$ в формуле (1.3), без которого она противоречит законам сохранения. Поэтому автор [5] вынужден был ограничиться рассмотрением выражения (1.5) при $F = F_0$, т. е. пренебречь по существу всеми эффектами неравновесности. В [6] при выводе гидродинамических уравнений использован проекционный метод, применимость которого, по-видимому, ограничена областью малых отклонений от равновесия. В работе [11] при распространении метода Онзагера на область неравновесных состояний фактически постулируется δ-коррелированность одновременных двухточечных моментов флуктуаций гидродинамических полей. Вследствие того, что не были учтены пространственные статистические связи ($b^{(1)}_{\alpha\beta} = 0$), в [11] был сделан вывод о нормальном уровне интенсивности флуктуаций вблизи порога гидродинамической устойчивости, противоречащий экспериментальным фактам и результатам [5]. В действительности в области порога устойчивости аномальным оказывается поведение пространственных корреляторов $b^{(1)}_{\alpha\beta}$.

2. Решение стохастического уравнения (1.2) методом Чепмена — Энскога. Класс нормальных решений газокинетического уравнения Больцмана (1.1) методом Чепмена — Энскога [12] является асимптотическим в области малых значений числа Кнудсена $K = l/L$, где l — длина свободного пробега, L — характерный макроскопический масштаб длины. Для применения этого метода к решению стохастического кинетического уравнения (1.2) необходим предварительный анализ порядков величин отдельных его членов в пространственно-временных масштабах, характерных для гидродинамической стадии эволюции газа. При этом принципиальное значение имеет оценка величины флуктуаций фазовой плотности δN по сравнению со средним значением. В рамках линейной теории δN предполагается малой по сравнению с F. Более строгая оценка следует из (1.5) для состояния термодинамического равновесия ($g = 0$): $\delta N \sim \sqrt{v^\circ/L^3}F_0$ ($v^\circ = V/N^\circ$, V — объем системы). Нет физических оснований полагать существенное различие в интенсивности флуктуаций для различных состояний на непрерывной термодинамической ветви. Поэтому соотношение $\delta N \sim \sqrt{v^\circ/L^3}F$ будет использовано далее и для неравновесных, но устойчивых состояний; оно нарушается только в узкой области вблизи порога устойчивости.

Введение безразмерных переменных $t' = t/\tau$, $\mathbf{r}' = \mathbf{r}/L$, $\mathbf{v}' = \mathbf{v}/w$ (w — тепловая скорость, $\tau = L/w$) и безразмерных функций $F' = v^\circ w^3 F$, $\delta N' = w^3\sqrt{L^3 v^\circ}\delta N$ приводит к появлению в (1.2) параметра K; при этом необходимо учесть оценку $\delta I' = w^3\tau\sqrt{L^3v^\circ}\delta I \sim K^{-1/2}$, следующую непосредственно из (1.3). Если в соответствии с безразмерными переменными формально ввести параметр K в уравнения (1.1), (1.2) для фиксации порядков величин отдельных членов, то следует записать

$$K\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\right)F = J_v(F, F) \tag{2.1}$$

$$K\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\right)\delta N = J_v'(F)\,\delta N + K^{1/2}\delta I\,(t, x; K) \tag{2.2}$$

где зависимость δI от K определяется в силу (1.3), соответствующей зависимостью F от K. При этом в окончательных формулах K следует положить равным единице.

Асимптотическое разложение $F = F_0 + KF_1 + K^2F_2 + \ldots$ решений уравнения (2.1) приводит к соответствующему разложению оператора столкновений $J_v'(F) = J_v'(F_0) + KJ_v'(F_1) + \ldots$ и флуктуирующего интеграла столкновений $\delta I = \delta I_0 + K^{1/2}\delta I_1 + K\delta I_2 + \ldots$, где $\delta I_0, \delta I_1, \ldots$ — статистически независимые гауссовские поля с нулевым средним значением и корреляционными функциями, определяемыми соответственно первым, вторым и т. д. членами в разложении выражения (1.3) в ряд по целым степеням K. При этом асимптотическое при $K \ll 1$ поведение решений уравнения (2.2) согласовано с формальным разложением вида

$$\delta N = \delta N_0 + K^{1/2}\delta N_1 + K\delta N_2 + K^{3/2}\delta N_3 + \ldots \tag{2.3}$$

Далее для определения коэффициентов ряда (2.3) можно использовать стандартную схему метода Чепмена — Энскога [12], в соответствии с которой формальное разложение (2.3) порождает разложение оператора $\partial/\partial t = \partial_0/\partial t + K^{1/2}\partial_1/\partial t + K\partial_2/\partial t + \ldots$ Методика определения $\partial_n/\partial t$ основана на использовании условия неразложимости $\delta\Phi_\alpha$

$$\int \partial \mathbf{v} \psi_\alpha \delta N_n = \delta_{0n}\delta\Phi_\alpha, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3, 4 \tag{2.4}$$

При определении первых M членов ряда (2.3) результат метода составляют выражения

$$q_k = \sum_{n=0}^{M} \delta q_k^{(n)} \equiv \sum_{n=0}^{M} \frac{m}{2}\int d\mathbf{v} c_k c^2 \delta N_n \tag{2.5}$$

$$\delta P_{kl} = \sum_{n=0}^{M} \delta P_{kl}^{(n)} \equiv \sum_{n=0}^{M} m \int d\mathbf{v}\,(c_k c_l)_s\, \delta N_n$$

для входящих в уравнения (1.10) флуктуаций термодинамических потоков.

Для F_0 и F_1 можно использовать известные [12] выражения

$$F_0 = \bar{n}\,(3m/4\,\pi\bar{e})^{3/2} \exp\left[-3\,mc^2/(4\bar{e})\right], \quad F_1 = F_0 h \equiv$$
$$\equiv -F_0 \bar{n}^{-1}\left[A_k \nabla_k \ln \bar{T} + B_{kl}\nabla_l \bar{u}_k\right]$$

где функции A_k (c) и B_{kl} (c) определяются уравнениями

$$\bar{n} L_v A_k = F_0\left[mc^2/(2k\bar{T}) - {}^5/_2\right] c_k, \quad \bar{n} L_v B_{kl} = F_0 m\,(c_k c_l)_s / (k\bar{T})$$
$$L_v = -\bar{n}^{-2} F_0 J_v'(F_0)$$

С учетом этих выражений уравнения для первых трех членов ряда (2.3) имеют вид

$$J_v'(F_0)\,\delta N_0 = 0, \quad J_v'(F_0)\,\delta N_1 = -\delta I_0 \tag{2.6}$$
$$J_v'(F_0)\,\delta N_2 = (\partial_0/\partial t + \mathbf{v}\cdot\nabla)\,\delta N_0 - J_v'(F_1)\,\delta N_0 - \delta I_1$$

$$\langle \delta I_0 \rangle = \langle \delta I_1 \rangle = \langle \delta I_0 \delta I_1 \rangle = 0 \tag{2.7}$$

$$\langle \delta I_0(1, \mathbf{v}_1)\, \delta I_0(2, \mathbf{v}_2) \rangle = -\delta(1-2)\left[J_{v_1}'(F_0) + \right. \tag{2.8}$$
$$\left. + J_{v_2}'(F_0)\right] F_0 \delta(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \quad \langle \delta I_1(1, \mathbf{v}_1)\, \delta I_1(2, \mathbf{v}_2) \rangle =$$
$$= \delta(1-2)\,\{\delta(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)\, J_{v_1}'(F_0)\, F_1 + J_{v_1 v_2}(F_0, F_1) +$$
$$+ J_{v_1 v_2}(F_1, F_0) - [J_{v_1}'(F_0) + J_{v_2}'(F_0)]\, F_1 \delta(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) +$$
$$+ [J_{v_1}'(F_1) + J_{v_2}'(F_1)]\, F_0\, \delta(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)\}$$

Используя формулы (2.8), можно убедиться, что случайные поля δI_0 и δI_1 обладают свойствами (1.9).

Решение первых двух уравнений в (2.6) с учетом (2.4) дает

$$(2.9)\qquad \delta N_0 = F_0 \sum_{\alpha=0}^{4} \gamma_\alpha^{-1}\psi_\alpha \delta\Phi_\alpha = \partial\,(\delta\Phi)\,F_0(\overline{\Phi}),\quad \gamma_\alpha = \int d\mathbf{v}\psi_\alpha^2 F_0$$

$$(2.10)\qquad \delta N_1 = \bar{n}^{-2}\,F_0 L_v^{-1}\,\delta I_0\,(t,\,x)$$

Явный вид оператора $\partial = \partial\,(\delta\Phi)$ дается формулой $\partial = (\delta\,\Phi,\,\partial_{\overline{\Phi}_\alpha})$; его действие на произведение средних значений гидродинамических полей аналогично действию введенного выше оператора линейной вариации δ на произведение случайных гидродинамических полей.

Прежде чем приступать к решению третьего уравнения (2.6), необходимо определить оператор $\partial_0/\partial t$ из уравнений

$$(2.11)\qquad \int d\mathbf{v}\psi_\alpha\,[\partial_0/\partial t + \mathbf{v}\cdot\nabla]\,\partial\,(\delta\Phi)\,F_0\,(\overline{\Phi};\,\mathbf{v}) = 0,\quad \alpha = 0, 1, 2, 3, 4$$

следующих с учетом (2.4), (2.9) и (1.9) из уравнения (2.6) для δN_2.

Подынтегральное выражение в (2.11) может быть преобразовано к виду

$$(2.12)\qquad [\partial_0/\partial t + \mathbf{v}\cdot\nabla]\,\delta N_0 = \partial\,(\delta\Phi)\,J_v'\,(F_0)\,F_1 + \\ + (\partial_0/\partial t\,\delta\Phi_\alpha + \Theta'_{\alpha\beta}\delta\Phi_\beta)\,F_0\gamma_\alpha^{-1}\psi_\alpha$$

(см. приложение). Видно, что при подстановке этого выражения в (2.11) первый член в правой его части аннулируется в силу ортогональности $J_v'\,(F_0)\,F_1$ подпространству, натянутому на столкновительные инварианты, а оставшиеся члены приводят к соотношению $\partial_0\delta\Phi_\alpha/\partial t = -\Theta'_{\alpha\beta}\delta\Phi_\beta$.

Используя свойства линеаризованного оператора столкновений $J_v'\,(F)\,G_1 = J_v'\,(G)\,F$ с учетом полученного выражения для $\partial_0\delta\Phi_\alpha/\partial t$, запишем

$$[\partial_0/\partial t + \mathbf{v}\cdot\nabla]\,\delta N_0 = \partial\,(\delta\Phi) J_v'\,(F_0)\,F_1 = J_v'\,(F_1)\,\delta N_0 + \\ + J_v'\,(F_0)\,\partial\,(\delta\Phi)\,F_1$$

После подстановки этого соотношения в правую часть уравнения (2.6) для δN_2 оно принимает вид

$$J_v'\,(F_0)\,[\delta N_2 - \partial\,(\delta\Phi)\,F_1] = -\,\delta I_1$$

и имеет очевидное решение

$$(2.13)\qquad \delta N_2\,(t,\;x) = \partial\,(\delta\Phi)\,F_1\,(t,\,x) + \bar{n}^{-2}\,F_0\,L_v^{-1}\delta I_1\,(t,\;x)$$

Подстановка полученных решений (2.9), (2.10) и (2.13) в формулы (2.5) приводит, после вычисления интегралов по пространству скоростей, к следующим выражениям:

$$(2.14)\qquad \delta q_k^{(0)} = \bar{p}\delta u_k,\quad \delta P_{kl}^{(0)} = 0,\quad \delta q_k^{(1)} = \delta Q_k^{(0)},\quad \delta P_{kl}^{(1)} = \delta\Pi_{kl}^{(0)}$$
$$\delta q_k^{(2)} = \partial\,(\delta\Phi)\,\bar{q}_k\,(\overline{\Phi}) + \bar{P}_{kl}\delta u_l + \delta Q_k^{(1)}$$
$$\delta P_{kl}^{(2)} = \partial\,(\delta\Phi)\;\bar{P}_{kl}\,(\overline{\Phi}) + \delta\Pi_{kl}^{(1)}$$

$$(2.15)\qquad \delta Q_k^{(i)} = \frac{m}{2\bar{n}^2}\int d\mathbf{v} c_k c^2 F_0 L_v^{-1}\delta I_i = \frac{k\bar{T}}{\bar{n}}\int d\mathbf{v} A_k \delta I_i$$
$$\delta\Pi_{kl}^{(i)} = \frac{m}{\bar{n}^2}\int d\mathbf{v}\,(c_k c_l)_s\,F_0 L_v^{-1}\delta I_i = \frac{k\bar{T}}{\bar{n}}\int d\mathbf{v} B_{kl}\delta I_i,\quad i = 0, 1$$

В (2.15) учтена самосопряженность оператора L_v и использовано данное ранее определение функций A_k (c) и B_{kl} (c). При введении обозначений $\delta Q_k = \delta Q_k^{(0)} + \delta Q_k^{(1)}$ и $\delta \Pi_{kl} = \delta \Pi_{kl}^{(0)} + \delta \Pi_{kl}^{(1)}$ из формул (2.5) при $M = 2$ с учетом (2.14) следуют выражения (1.12), а из статистических свойств случайных полей δI_0, δI_1 и формул (2.15) — гауссовские свойства и пространственно-временная δ-коррелированность сторонних источников флуктуаций термодинамических потоков δQ_k и $\delta \Pi_{kl}$.

Таким образом, в нулевом по K приближении гидродинамические уравнения (1.10) для флуктуаций представляют собой линеаризованные уравнения Эйлера; выражение $\delta \mathbf{q} = \bar{p} \delta \mathbf{u}$ для флуктуации теплового потока сокращается с соответствующим членом в уравнении (1.10) для δe. Если средние значения термодинамических потоков учтены в (1.10) в первом порядке по K, то и их флуктуации необходимо учитывать с той же степенью точности: $\delta \mathbf{q} = \delta \mathbf{q}^{(0)} + \delta \mathbf{q}^{(1)} + \delta \mathbf{q}^{(2)}$, $\delta \mathbf{P} = \delta \mathbf{P}^{(0)} + \delta \mathbf{P}^{(1)} + \delta \mathbf{P}^{(2)}$. При этом члены $\delta \mathbf{q}^{(1)}$ и $\delta \mathbf{P}^{(1)}$ порядка $K^{1/2}$ чисто стохастические. Они, в силу (2.15), не зависят от $\bar{\mathbf{q}}$ и $\bar{\mathbf{P}}$ и, как показано ниже, определяют источники флуктуаций в локально-равновесном состоянии. Члены же $\delta \mathbf{q}^{(2)}$ и $\delta \mathbf{P}^{(2)}$, как и следовало ожидать, учитывают затухание флуктуаций за счет вязкости и теплопроводности, а также их одновременное производство неравновесными сторонними источниками $\delta Q^{(1)}$ и $\delta \Pi^{(1)}$.

Заметим, что в работах [3, 7] оба члена в правой части уравнения (1.2) полагались величинами одного порядка K^{-1}, что, как нетрудно проверить, соответствует ошибочной оценке $\delta N \sim F$ и приводит к разложению δN по целым степеням K. Однако в состоянии термодинамического равновесия гидродинамические уравнения для флуктуаций не чувствительны к этой ошибке. Она проявляется для неоднородных состояний в том, что в первом приближении по K неравновесные источники флуктуаций $\delta \mathbf{Q}^{(1)}$ и $\delta \mathbf{\Pi}^{(1)}$ остаются неучтенными.

3. Расчет корреляторов флуктуирующих термодинамических потоков. Введем сокращенные обозначения: $\mathbf{C}_1 = \mathbf{A}$, $\delta \mathbf{S}_1^{(i)} = \delta \mathbf{Q}^{(i)}$, $\mathbf{C}_2 = \mathbf{B}$, $\delta \mathbf{S}_2^{(i)} = \delta \mathbf{\Pi}^{(i)}$, $i = 0, 1$, где $\mathbf{C}_1$ и $\delta \mathbf{S}_1^{(i)}$ — векторные функции, $\mathbf{C}_2$ и $\delta \mathbf{S}_2^{(i)}$ — тензоры второго ранга. Пространственно-временные корреляторы случайных полей $\delta \mathbf{Q}^{(i)}$ и $\delta \mathbf{\Pi}^{(i)}$, $i = 0,1$ с помощью формул (2.15) выражаются через корреляторы флуктуирующих интегралов столкновений δI_0 и δI_1

$$\langle \delta \mathbf{S}_a^{(i)}(1)\, \delta \mathbf{S}_b^{(j)}(2) \rangle = \left(\frac{kT}{\bar{n}}\right)^2 \int d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 \mathbf{C}_a(1, \mathbf{v}_1) \mathbf{C}_b(2, \mathbf{v}_2) \langle \delta I_i(1, \mathbf{v}_1)\, \delta I_j(2, \mathbf{v}_2) \rangle, \quad i, j = 0,1; \; a, b = 1,2 \tag{3.1}$$

Далее в формулы (3.1) следут подставить выражения (2.8) и вычислить интегралы по пространству скоростей. На этом пути возникает ряд технических трудностей, связанных, в частности, с весьма громоздкими преобразованиями подынтегральных выражений, особенно при $i = 1$. Другой, более короткий путь позволяет выразить корреляторы (3.1) непосредственно через стандартные интегральные скобки (или Ω — интегралы). Для этого выражение (1.3) для функции $D\,[F, F;\ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ следует представить в форме

(3.2) $$D[F, F; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] = = \frac{1}{2}\int d\xi_1 d\xi_2 d\xi_1' d\xi_2' \sigma(\xi_1\xi_2 \to \xi_1'\xi_2') F(\xi_1) F(\xi_2) \varkappa(\xi_1\xi_2\xi_1'\xi_2'; \mathbf{v}_1) \times \times \varkappa(\xi_1\xi_2\xi_1'\xi_2'; \mathbf{v}_2)$$

и обратить внимание на то, что стандартное определение [12] интегральной скобки $[W; G]$ для двух произвольных функций $W(\mathbf{v})$ и $G(\mathbf{v})$ с помощью (3.2) преобразуется в

(3.3) $$[W; G] = = \int d\mathbf{v} W(\mathbf{v}) L_v G(\mathbf{v}) = (2\bar{n}^2)^{-1} \int d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 W(\mathbf{v}_1) G(\mathbf{v}_2) D[F_0, F_0; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$$
$$\varkappa(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_1'\mathbf{v}_2'; \mathbf{v}) = \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_1') + \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_2') - \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_1) - \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_2)$$

Здесь $\sigma(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 \to \mathbf{v}_1'\mathbf{v}_2')$ — сечение рассеяния. Доказательство тождественности формул (1.3) и (3.2) можно найти в [3] (формулы на стр. 125); справедливость формулы (3.3) проверяется непосредственно.

С учетом представления (3.2) для D формулы (2.8) можно представить в виде

(3.4) $$\langle \delta I_i(1, \mathbf{v}_1)\, \delta I_j(2, \mathbf{v}_2)\rangle = \delta_{ij}\, \delta(1-2)\, D^{(i)}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2),\quad i, j = 0,1$$
$$D^{(0)}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = D[F_0, F_0; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2],\quad D^{(1)}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \frac{1}{2} D[F_0, F_1; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$$

Подстановка этого выражения в (3.1) при использовании определения (3.3) интегральной скобки позволяет записать

(3.5) $$\langle \delta S_a^{(i)}(1)\, \delta S_b^{(j)} \bar{T}(2)\rangle = 2(k\bar{T})^2 \delta_{ij} \delta(1-2)\, \Lambda^{(i)}(\mathbf{C}_a, \mathbf{C}_b)$$

(3.6) $$\Lambda^{(0)}(\mathbf{C}_a, \mathbf{C}_b) = [\mathbf{C}_a; \mathbf{C}_b]$$

(3.7) $$2\Lambda^{(1)}(\mathbf{C}_a, \mathbf{C}_b) = [\mathbf{C}_a; h\mathbf{C}_b] + [\mathbf{C}_b; h\mathbf{C}_a] - [h; \mathbf{C}_a\mathbf{C}_b] + [\mathbf{C}_a; h\mathbf{C}_b]^* + + [\mathbf{C}_b; h\mathbf{C}_a]^* - [h; \mathbf{C}_a\mathbf{C}_b]^*,\quad i, j = 0, 1,\quad a, b = 1,2$$

Здесь $[\cdot\,; \cdot]^*$ — модифицированная интегральная скобка, определяемая для трех произвольных функций $R(\mathbf{v})$, $H(\mathbf{v})$ и $G(\mathbf{v})$ формулой

(3.8) $$[R; HG]^* = \frac{1}{\bar{n}^2}\int d\mathbf{v} R(\mathbf{v}) [J_v(F_0 H, F_0 G) + J_v(F_0 G, F_0 H)]$$

Формула (3.6) следует непосредственно из (3.1) и определения (3.3) стандартной интегральной скобки. Формулу (3.7) получим, если в (3.1) подставим (3.4), (3.2) и проинтегрируем по $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$. Затем из получившегося интегрального выражения с учетом симметрии σ выделим члены, группирующиеся в стандартные интегральные скобки, тогда оставшиеся члены соберутся в модифицированные интегральные скобки. Формулы (3.5) — (3.7) позволяют далее использовать известные результаты вычисления интегральных скобок [12].

Интегральные скобки в (3.6) определяют по существу коэффициенты переноса [12]

$$k[A_k; A_l] = \bar{\lambda}\delta_{kl},\quad k\bar{T}[B_{kl}; B_{st}] = 2\bar{\eta}E_{st}^{kl},\quad [A_k; B_{st}] = 0$$

При этом выражения (3.5) для корреляторов случайных полей $\delta\mathbf{Q}^{(0)}$ и $\delta\Pi^{(0)}$ сводятся к формулам Ландау — Лифшица [9] и соответствуют первым членам в формулах (1.14), (1.15). Корреляторы (3.5) случайных полей $\delta\mathbf{Q}^{(1)}$, $\delta\mathbf{\Pi}^{(1)}$ зависят, в силу (3.7), от средних значений величин термодинамических потоков и поэтому дают неравновесные добавки к корреляционным формулам Ландау — Лифшица. Интегральные скобки, составляющие выражение (3.7) для $\Lambda^{(1)}$, появляются в барнеттовском приближении метода Чепмена — Энскога.

Интересуясь в первую очередь качественными аспектами влияния неоднородности газа на гидродинамические флуктуации, расчет $\Lambda^{(1)}$ проведем для максвелловских молекул. В этом случае все модифицированные интегральные скобки в (3.7) равны нулю; $[h;\ \mathbf{BB}] = [\ \mathbf{B};\ h\mathbf{B}]$, $2\ [h;\ \mathbf{AA}] = 3[\mathbf{A};\ h\mathbf{A}]$, $[h;\ \mathbf{AB}] = [\mathbf{B};\ hA]$; нетривиальный вклад в (3.7) дают скобки

$$[B_{kl};\ hB_{st}] = \frac{4}{\bar{n}}(k\bar{T})^{-2}\bar{\eta}\bar{P}_{ij}E_{in}^{kl}E_{nj}^{st}$$

$$(3.9)\qquad [A_k;\ hA_l] = \frac{9}{5\bar{n}k}(k\bar{T})^{-1}\bar{\lambda}\bar{P}_{kl}$$

$$[B_{kl};\ hA_s] = \frac{27}{5\bar{n}}(k\bar{T})^{-2}\overline{\eta}\bar{q}_p E_{ps}^{kl}$$

Подстановка этих выражений в (3.7) приводит в (3.5) при $i = j = 1$ к формулам, совпадающим со вторыми членами первых двух выражений (1.13) и третьей формуле (1.13). Поскольку выражения (3.9) билинейны относительно коэффициентов переноса, то соответствующие им члены в (1.13) представляют собой квадратичный отклик системы на термические возмущения в неоднородных устойчивых состояниях газа.

Формулы (3.5) — (3.7) для корреляторов сторонних источников флуктуаций термодинамических потоков являются наиболее общими и справедливы для любых потенциалов межмолекулярного взаимодействия в простом газе, совместимых с условием существования интеграла столкновений. Выражения же (1.13) представляют собой оценку для (3.5), соответствующую первому приближению в разложении интегральных скобок в (3.7) по полиномам Сонина (максвелловский газ). Заметим, что общая структура зависимости корреляторов сторонних источников гидродинамических флуктуаций от средних значений термодинамических потоков, заданная формулами (1.13), сохраняется и во всех последующих приближениях. Поэтому оценка (1.13) для (3.5) является, по-видимому, достаточно точной.

Приложение. Громоздкие вычисления, связанные с прямым доказательством соотношения (2.12) удается обойти, если воспользоваться выражением $\partial_0/\partial t = (\partial_0\bar{\Phi}_\alpha/\partial t,\ \partial_{\bar{\Phi}_\alpha}) + (\partial_0\delta\Phi_\alpha/\partial t,\ \partial_{\delta\Phi_\alpha})$, следующим непосредственно из определения оператора $\partial_0/\partial t$:

$$\left[\frac{\partial_0}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\right]\delta N_0 = (\partial_0\bar{\Phi}_\alpha/\partial t,\ \partial_{\bar{\Phi}_\alpha})\,\delta N_0 + \mathbf{v}\cdot\nabla\delta N_0 + (\partial_0\delta\Phi_\alpha/\partial t,\ \partial_{\delta\Phi_\alpha})\,\delta N_0$$

Принимая во внимание (2.9), во втором и третьем слагаемых выполним дифференцирование

$$\mathbf{v}\cdot\nabla\delta N_0 = \partial\,(\delta\Phi)\,\mathbf{v}\cdot\nabla F_0$$

$$(\partial_0\delta\Phi_\alpha/\partial t,\ \partial_{\delta\Phi_\alpha})\,\delta N_0 = (\partial_0\delta\Phi_\alpha/\partial t,\ \partial_{\bar{\Phi}_\alpha})\,F_0$$

Используя соотношения

$$\partial(\delta\Phi)(\partial_0\overline{\Phi}_\alpha/\partial t, \partial_{\overline{\Phi}_\alpha})F_0 = -\partial(\delta\Phi)(\Theta_\alpha, \partial_{\overline{\Phi}_\alpha})F_0 = -(\Theta'_{\alpha\beta}\delta\Phi_\beta, \partial_{\overline{\Phi}_\alpha})F_0 -$$

$$-(\Theta_\alpha, \partial_{\overline{\Phi}_\alpha})\ \partial(\delta\Phi)F_0 = -(\Theta'_{\alpha\beta}\delta\Phi_\beta, \partial_{\overline{\Phi}_\alpha})F_0 + (\partial_0\overline{\Phi}_\alpha/\partial t, \partial_{\overline{\Phi}_\alpha})\,\delta N_0$$

в которых учтены равенства $\partial_0\overline{\Phi}_\alpha/\partial t = -\Theta_\alpha[\Phi]$ и $\partial(\delta\Phi)\ \Theta_\alpha[\overline{\Phi}] = \Theta'_{\alpha\beta}\delta\Phi_\beta$, преобразуем первое слагаемое к виду

$$(\partial_0\overline{\Phi}_\alpha/\partial t, \partial_{\overline{\Phi}_\alpha})\,\delta N_0 = \partial(\delta\Phi)\frac{\partial_0}{\partial t}F_0 + (\Theta'_{\alpha\beta}\delta\Phi_\beta, \partial_{\overline{\Phi}_\alpha})F_0$$

При этом

$$\left[\frac{\partial_0}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\right]\delta N_0 = \partial(\delta\Phi)\left[\frac{\partial_0}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\right]F_0 + \left(\left[\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial_0}{\partial t}\delta\Phi_\beta + \Theta'_{\alpha\beta}\delta\Phi_\beta\right], \partial_{\overline{\Phi}_\alpha}\right)F_0$$

Используя здесь уравнение $[\partial_0/\partial t + \mathbf{v}\cdot\nabla]\,F_0 = J_v'(F_0)\,F_1$, представляющее собой первое приближение уравнения Больцмана по параметру Кнудсена, получим соотношение (2.12).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гроот С. Де, Мазур П.* Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964.
2. *Толубинский Е. В.* Теория процессов переноса. Киев: Наукова думка, 1969.
3. *Климонтович Ю. Л.* Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы. М.: Наука, 1975.
4. *Гречанный О. А.* Стохастический подход и функциональные модели в кинетической теории газов.— Теорет. и матем. физ., 1978, т. 36, № 2.
5. *Hinton F. L.* Nonequilibrium theory of fluid fluctuations.— Phys. Fluid, 1970, v. 13, No. 4.
6. *Mashiyama Kazuko T., Mori Hazime.* Origin of the Landau — Lifshitz hydrodynamic fluctuations in nonequilibrium systems and new method for reducing the Boltzmann Equation.— J. Statist. Phys., 1978, v. 18, No. 4.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* О гидродинамических флуктуациях.— ЖЭТФ, 1957, т. 32, вып. 3.
8. *Зайцев В. М., Шлиомис М. И.* Гидродинамические флуктуации вблизи порога конвекции.— ЖЭТФ, 1970, т. 59, вып. 5.
9. *Хонькин А. Д.* О влиянии неравновесных флуктуаций на возникновение турбулентности.— В кн.: Турбулентные течения. М.: Наука, 1974.
10. *Гречанный О. А.* К теории малых флуктуаций в неравновесном газе.— В сб.: Теплофизика и теплотехника. Вып. 36. Киев: Наукова думка, 1979.
11. *Фишер И. З., Лесников В. П.* Неравновесные тепловые гидродинамические флуктуации.— В сб.: Физика жидкого состояния. Вып. 4. Киев: Вища школа, 1976.
12. *Чепмен С., Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
13. *Fox R. F., Uhlenbeck G. E.* Contributions to nonequilibrium thermodynamics. II. Fluctuation theory for the Boltzmann Equation.— Phys. Fluid, 1970, v. 13, No. 12.

Поступила в редакцию
20.VIII.1979