

УДК 62—50

## ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ОБЛАСТИ ДОСТИЖИМОСТИ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ

Черноусько Ф. Л.

(Москва)

Для линейной управляемой системы построена (в некотором смысле наилучшая) внутренняя эллипсоидальная оценка области достижимости.

1. Постановка задачи. Рассмотрим линейную управляемую систему

$$(1.1) \quad dx/dt = C(t)x + K(t)u + f(t)$$

где  $t$  — время,  $x$  —  $n$ -мерный вектор фазовых координат,  $u$  —  $m$ -мерный вектор управляющих функций,  $C(t)$  и  $K(t)$  — матрицы размеров  $n \times n$  и  $n \times m$  соответственно,  $f(t)$  —  $n$ -мерный вектор. Функции  $C(t)$ ,  $K(t)$ ,  $f(t)$  непрерывны при  $t \geq t_0$ . Запись

$$(1.2) \quad x \in E(a, Q)$$

будет означать, что вектор  $x$  принадлежит эллипсоиду

$$(1.3) \quad (Q^{-1}(x - a), x - a) \leq 1$$

Здесь  $a$  —  $n$ -мерный вектор центра эллипсоида,  $Q$  — симметрическая положительно-определенная матрица размера  $n \times n$ , скобки означают скалярное произведение. При  $Q \rightarrow 0$  эллипсоид (1.2), (1.3) стягивается в точку  $x = a$ .

Предполагаем, что начальные данные и управляющие функции для системы (1.1) заключены в эллипсоидах

$$(1.4) \quad x(t_0) \in E(a_0, Q_0), u(t) \in E(0, G(t)), t \geq t_0$$

Здесь  $a_0$  — заданный  $n$ -мерный вектор,  $Q_0$  и  $G$  — симметрические положительно-определенные матрицы размеров  $n \times n$  и  $m \times m$  соответственно.

Областью достижимости  $M(t)$  для системы (1.1), (1.4) называется множество возможных значений решений  $x(t)$  системы (1.1) в момент  $t$  при каких-либо  $x(t_0)$  и  $u(t)$ , удовлетворяющих ограничениям (1.4). Известно, что  $M(t)$  — выпуклое ограниченное множество. Область достижимости является важной характеристикой управляемой системы [1—3] и используется при решении задач теории управления и дифференциальных игр. Эффективное построение множества  $M(t)$  при достаточно больших  $n$  вызывает значительные трудности и требует большого объема вычислений. Поэтому представляет интерес получение простых оценок мно-

жества  $M(t)$  как внешних, так и внутренних. В данной работе рассматриваются эллипсоидальные оценки вида

$$(1.5) \quad E(a_-(t), Q_-(t)) \subset M(t) \subset E(a_+(t), Q_+(t))$$

где  $a_-$ ,  $a_+$  — центры,  $Q_-$ ,  $Q_+$  — матрицы эллипсоидов, индекс минус относится к внутренним, плюс — к внешним аппроксимациям.

Некоторые внешние эллипсоидальные оценки области достижимости построены в работах [4—6]. В [7] дана внешняя эллипсоидальная оценка, локально оптимальная в следующем смысле. В каждый момент времени строится эллипсоид наименьшего объема, описанный около области достижимости, порождаемой эллипсоидальной аппроксимацией этой области в близкий предшествующий момент времени. Эта оценка основана на оптимальной внешней аппроксимации суммы двух эллипсоидов (построен эллипсоид наименьшего объема, содержащий сумму двух эллипсоидов).

Функции  $a_+$ ,  $Q_+$  для указанной внешней оценки удовлетворяют системам уравнений и начальным условиям [7]

$$(1.6) \quad \begin{aligned} da_+ / dt &= C(t)a_+ + f(t) \\ dQ_+ / dt &= C(t)Q_+ + Q_+C'(t) + qQ_+ + q^{-1}R(t) \\ R(t) &= K(t)G(t)K'(t) \\ q &= \{n^{-1} \text{Tr} [Q^{-1}R(t)]\}^{1/2} \\ a_+(t_0) &= a_0, \quad Q_+(t_0) = Q_0 \end{aligned}$$

Штрих означает транспонирование,  $\text{Tr}$  — след матрицы. Интегрируя систему (1.6), получим внешнюю оценку (1.5).

В данной работе построена локально-оптимальная внутренняя оценка области достижимости, т. е. получены уравнения для  $a_-(t)$ ,  $Q_-(t)$  в (1.5). Для этого предварительно решена вспомогательная задача об оптимальной внутренней аппроксимации суммы двух эллипсоидов: построен эллипсоид наибольшего объема, содержащийся в сумме двух эллипсоидов.

2. Вспомогательная задача. Пусть  $n$ -мерные векторы  $x_1, x_2$  принадлежат эллипсоидам

$$(2.1) \quad x_i \in E(a_i, Q_i), \quad i = 1, 2$$

где  $a_i$  — векторы центров,  $Q_i$  — симметрические положительно-определенные матрицы. Если  $x_1, x_2$  принимают значения из (2.1), то их сумма лежит в выпуклой замкнутой области  $S$  — сумме эллипсоидов

$$(2.2) \quad x = x_1 + x_2 \in S = E(a_1, Q_1) + E(a_2, Q_2)$$

Построим эллипсоид наибольшего объема, вписанный в  $S$ . Сначала сделаем линейное преобразование векторов  $x_1, x_2$ , приводящее оба эллипсоида (2.1) к каноническому виду

$$(2.3) \quad \begin{aligned} y_i &= A(x_i - a_i), \quad y_i \in E(0, D_i) \\ D_i &= \text{diag}(d_i^1, \dots, d_i^n), \quad d_i^j > 0; \quad i = 1, 2; \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Верхний индекс  $j$  — номер элементов.

Отметим, что при линейном преобразовании вектора  $x$  параметры эллипсоида (1.2), (1.3) преобразуются следующим образом [7]:

$$(2.4) \quad Ax + b \in E(Aa + b, AQA')$$

где  $A$  — матрица,  $b$  — вектор. Формулу (2.4) нетрудно проверить непосредственно. Согласно (2.4), для преобразования (2.3) имеем

$$(2.5) \quad A Q_i A' = D_i, \quad i = 1, 2$$

Матрица преобразования  $A$ , приводящая эллипсоиды (2.1) к каноническому виду, неединственная. Ее можно найти, решая задачу на собственные значения [8]

$$(2.6) \quad \begin{aligned} Q_1 x &= \lambda Q_2 x, \quad \det(Q_1 - \lambda Q_2) = 0 \\ Q_1 z_j &= \lambda_j Q_2 z_j, \quad \lambda_j > 0, \quad A' = \{z_1, \dots, z_n\} \quad (j = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

Здесь собственные числа  $\lambda_j$  — корни характеристического уравнения,  $z_j$  — соответствующие собственные векторы, которые служат столбцами транспонированной матрицы  $A'$ . Среди корней  $\lambda_j$  могут быть кратные, но всегда имеется  $n$  линейно-независимых векторов  $z_j$ . Отметим, что элементы матриц (2.3) выражаются через собственные числа  $\lambda_j$  равенствами  $d_1^j = \lambda_j$ ,  $d_2^j = 1$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Разрешим равенства (2.3) относительно  $x_i$  и представим сумму (2.2) в виде

$$(2.7) \quad x = a_1 + a_2 + A^{-1}y, \quad y = y_1 + y_2 \in S_y = E(0, D_1) + E(0, D_2)$$

Полуоси эллипсоидов  $E(0, D_i)$  равны  $(d_i^j)^{1/2}$ . Выпуклая область  $S_y$  из (2.7) содержится в параллелепипеде

$$(2.8) \quad P: |y^j| \leq (d_1^j)^{1/2} + (d_2^j)^{1/2}, \quad j = 1, \dots, n$$

Докажем, что эллипсоид, полуоси которого равны суммам соответствующих полуосей эллипсоидов  $E(0, D_i)$ , содержится в  $S_y$ , т. е.

$$(2.9) \quad \begin{aligned} E(0, D) \subset S_y \subset P, \quad D = \text{diag}(d^1, \dots, d^n) \\ d^j = [(d_1^j)^{1/2} + (d_2^j)^{1/2}]^2, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Для доказательства возьмем любую точку  $y \in E(0, D)$  и положим  $y = y_1 + y_2$ , где

$$(2.10) \quad y_i^j = (d_i^j/d^j)^{1/2} y^j, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, \dots, n$$

Индекс  $j$  номер компонент вектора. Из включения  $y \in E(0, D)$ , т. е. из неравенства

$$\sum_{j=1}^n (d^j)^{-1} (y^j)^2 \leq 1$$

в силу соотношений (2.9), (2.10), следует

$$\sum_{j=1}^n (d_i^j)^{-1} (y_i^j)^2 \leq 1, \quad i = 1, 2$$

Таким образом, любой вектор  $y \in E(0, D)$  представляется в виде суммы  $y_1 + y_2$ , где  $y_i \in E(0, D_i)$ . Тем самым доказано включение  $E(0, D) \subset S_y$ .

Докажем теперь, что эллипсоид  $E(0, D)$  обладает наибольшим объемом среди всех эллипсоидов, вписанных в  $S_y$ . В силу включения  $S_y \subset P$  (см.

(2.9)) достаточно доказать, что  $E(0, D)$  обладает наибольшим объемом среди всех эллипсоидов, вписанных в  $P$ . Растяжением по координатным осям параллелепипед (2.8) преобразуем в  $n$ -мерный куб  $P_n^*$ :  $|y^j| \leq 1$ ,  $j = 1, \dots, n$ , при этом эллипсоид (2.9) перейдет в единичный шар  $|y| \leq 1$ . Достаточно доказать, что единичный шар имеет наибольший объем среди всех эллипсоидов, вписанных в куб  $P_n^*$ . Это утверждение эквивалентно следующему: среди всех параллелепипедов, описанных около единичного шара, куб  $P_n^*$  имеет наименьший объем.

Последнее утверждение доказывается индукцией по размерности пространства  $n$ . При  $n = 1$  утверждение тривиально. При  $n = 2$  оно очевидно и означает, что объем квадрата, описанного около круга, меньше объема любого описанного параллелограмма. Пусть утверждение верно для некоторого  $n$ . Рассмотрим произвольный  $n + 1$ -мерный параллелепипед  $P_{n+1}$ , содержащий  $n + 1$ -мерный единичный шар. Объем  $P_{n+1}$  равен произведению его высоты (она не менее диаметра шара) на объем  $n$ -мерного параллелепипеда  $P_n$ , лежащего в основании  $P_{n+1}$ . Параллелепипед  $P_n$  содержит проекцию  $(n + 1)$ -мерного шара; следовательно,  $P_n$  содержит  $n$ -мерный единичный шар. По предположению о справедливости утверждения для  $n$  объем  $P_n$  не меньше объема куба  $P_n^*$ . Отсюда следует, что объем  $P_{n+1}$  не менее объема куба  $P_{n+1}^*$ . Утверждение доказано.

Таким образом,  $E(0, D)$  из (2.9) есть эллипсоид наибольшего объема, вписанный в  $S_y$ . Возвращаясь к переменной  $x$  согласно соотношениям (2.7), (2.4), получим искомым эллипсоид наибольшего объема, вписанный в область  $S_x$  из (2.2), в виде

$$(2.11) \quad E(a, Q) \subset S, \quad a = a_1 + a_2, \quad Q = A^{-1}D(A^{-1})'; \\ D^{1/2} = D_1^{1/2} + D_2^{1/2}, \quad D_i = AQ_iA', \quad i = 1, 2$$

Для построения эллипсоида (2.11) требуется найти матрицу  $A$  преобразования, приводящего обе матрицы  $Q_1, Q_2$  к диагональному виду. Для этого достаточно решить задачу на собственные значения (2.6).

3. Примеры. 1°. Пусть эллипсоиды (2.1) подобны и одинаково ориентированы:  $Q_1 = \nu Q_2$ , где  $\nu > 0$  — скаляр. Тогда имеем согласно (2.11)

$$(3.1) \quad D_1 = AQ_1A' = \nu AQ_2A' = \nu D_2 \quad (Q_1 = \nu Q_2) \\ D = (\nu^{1/2} + 1)^2 D_2, \quad Q = (\nu^{1/2} + 1)^2 Q_2'$$

В этом (и только в этом) случае область  $S$  — эллипсоид и ее аппроксимация эллипсоидом (2.11), (3.1) является точной. В частности, аппроксимация точна в одномерном случае ( $n = 1$ ), а также когда эллипсоиды (2.1) — шары.

2°. Рассмотрим вырожденный случай, когда один из эллипсоидов  $E(a_1, Q_1)$  — отрезок оси  $x^1$ , а другой — единичный шар;

$$(3.2) \quad Q_1 = \text{diag}(r^2, 0, \dots, 0), \quad Q_2 = I$$

Здесь  $r > 0$  — половина длины отрезка.

Оба эллипсоида (2.1) имеют канонический вид, и можно принять  $A = I$ . Согласно (2.11) получим

$$(3.3) \quad a = a_1 + a_2, \quad Q = \text{diag}((r + 1)^2, 1, \dots, 1)$$

Объем эллипсоида с параметрами (3.3) равен

$$(3.4) \quad V_E = (r + 1) \pi^{n/2} [\Gamma(n/2 + 1)]^{-1}$$

где  $\Gamma$  — гамма-функция Эйлера [9]. Для сравнения приведем объем области  $S$ , представляющей объединение всех единичных шаров с центрами в отрезке  $a_1 + a_2 + e^1 x^1$ , где  $e^1$  — орт оси  $x^1$ ,  $|x^1| \leq r$ . Область  $S$  состоит из цилиндра высоты  $2r$  с основанием в виде  $(n-1)$ -мерного единичного шара и из двух  $n$ -мерных единичных полушар с центрами в концах отрезка. Объем области  $S$  равен

$$(3.5) \quad V_S = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)} + \frac{2r\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma[(n+1)/2]}$$

Составим отношение объемов (3.4), (3.5), характеризующее точность аппроксимации

$$(3.6) \quad \zeta(r, n) = \frac{V_E}{V_S} = (r+1) \left\{ 1 + \frac{2r\Gamma(n/2 + 1)}{\pi^{1/2} \Gamma[(n+1)/2]} \right\}^{-1}$$

В частных случаях, используя формулы для гамма-функции [9], получим из (3.6)

$$\zeta(r, n) = 1 - r \left[ \frac{2\Gamma(n/2 + 1)}{\pi^{1/2} \Gamma[(n+1)/2]} - 1 \right], \quad r \rightarrow 0$$

$$\zeta(\infty, n) = \frac{\pi^{1/2} \Gamma[(n+1)/2]}{2\Gamma(n/2 + 1)}, \quad \zeta(\infty, 2) = \pi/4$$

$$\zeta(\infty, 3) = 2/3, \quad \zeta(r, n) = (1+r^{-1}) \pi^{1/2} (2n)^{-1/2} \quad (n \rightarrow \infty)$$

Зависимости (3.6) даны на фиг. 1.

**4. Оценка области достижимости.** Перейдем к выводу уравнений для  $a_-(t)$ ,  $Q_-(t)$  из оценки (1.5). Зададимся достаточно малым приращением  $h$  и запишем конечно-разностную аппроксимацию системы (1.1)

$$(4.1) \quad \begin{aligned} x(t+h) &= x_1 + x_2 \\ x_1 &= (I + hC)x + hf \\ x_2 &= hKu \end{aligned}$$

Здесь аргумент  $t$  опущен. Пусть в момент  $t$  имеет место левое включение (1.5). Тогда из ограничения на управление (1.4) и (4.1), (2.4) получим

$$(4.2) \quad \begin{aligned} x_1 &\in M_1 \\ M_1 &\supset E(a_- + h(Ca_- + f)) \\ &(I + hC)Q_-(I + hC)' \\ x_2 &\in E(0, h^2R), \quad R = KGK' \end{aligned}$$

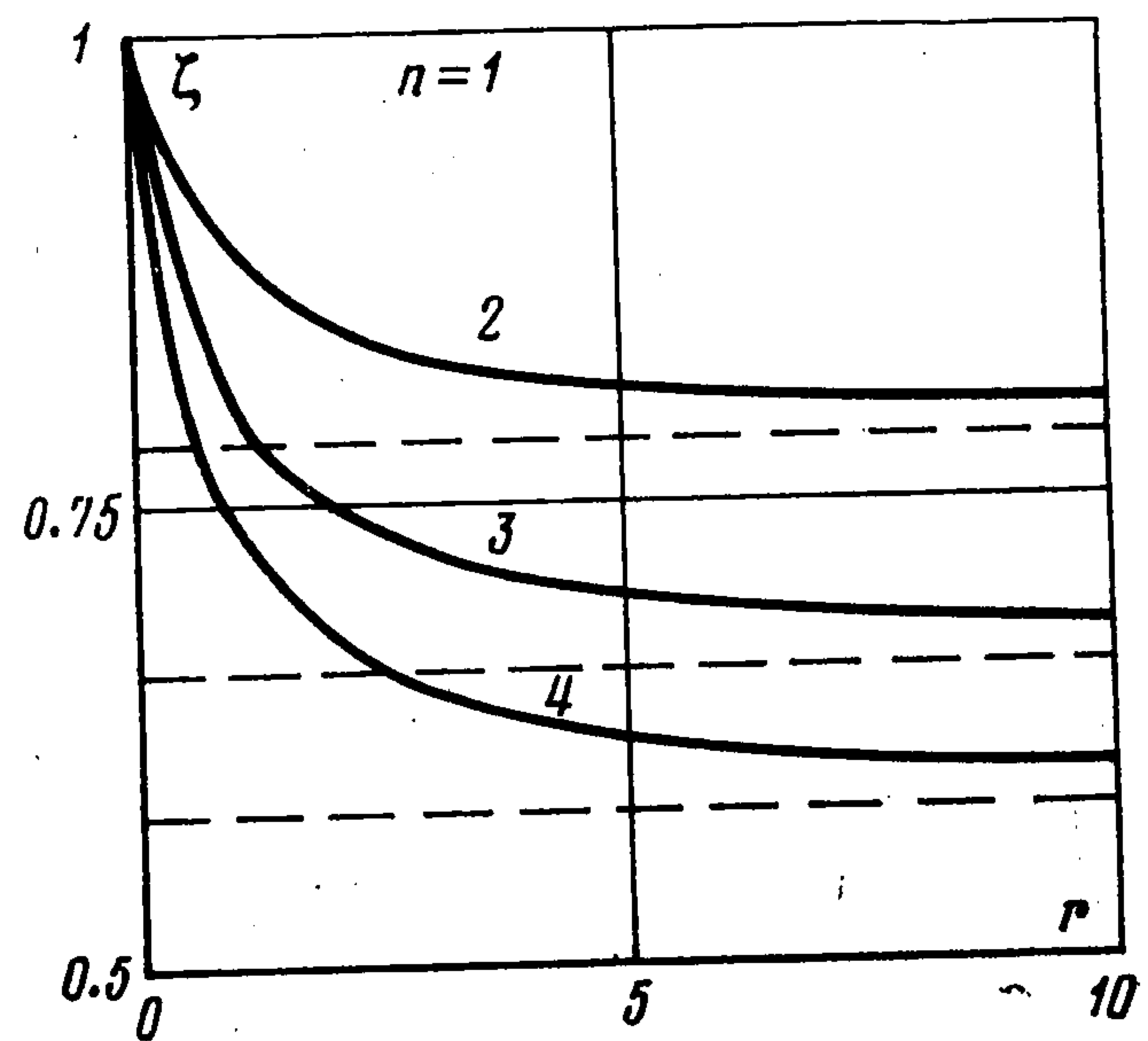
где  $M_1$  — множество, содержащее эллипсоид (4.2).

Определим неособенную матрицу  $A$  соотношениями

$$(4.3) \quad AQ_-A' = D_1, \quad ARA' = D_2, \quad R = KGK'$$

где  $D_1, D_2$  — какие-либо диагональные матрицы. Равенства (4.3) означают, что преобразование с матрицей  $A$  приводит (с точностью до членов высшего порядка по  $h$ ) оба эллипсоида (4.2) к каноническому виду. Чтобы получить  $a_-(t+h)$ ,  $Q_-(t+h)$ , применим к эллипсоидам (4.2) формулы (2.11), определяющие эллипсоид, вписанный в область  $S$ . Получим

$$(4.4) \quad \begin{aligned} a_-(t+h) &= a_- + h(Ca_- + f) \\ Q_-(t+h) &= A^{-1} \{ [A(I + hC)Q_-(I + hC)'A']^{1/2} + h(ARA')^{1/2} \}^2 (A^{-1})' \end{aligned}$$



Фиг. 1

Преобразуем формулу (4.4) для  $Q_-(t+h)$ , разлагая ее в ряд по  $h$  и отбрасывая члены  $o(h)$

$$(4.5) \quad Q_-(t+h) = A^{-1} \{ [AQ_-A' + h(CQ_- + Q_-C')]^{1/2} + \\ + h(ARA')^{1/2} \}^2 (A^{-1})' = A^{-1} \{ AQ_-A' + h[CQ_- + Q_-C' + \\ + 2(AQ_-A')^{1/2}(ARA')^{1/2}] \} (A^{-1})'$$

Разделив равенства (4.4) для  $a_-(t+h)$  и (4.5) для  $Q_-(t+h)$  на  $h$  и переходя к пределу при  $h \rightarrow 0$ , получим системы дифференциальных уравнений:

$$(4.6) \quad \begin{aligned} da_- / dt &= C(t)a_- + f(t) \\ dQ_- / dt &= C(t)Q_- + Q_-C'(t) + \\ &+ 2A^{-1}(AQ_-A')^{1/2}(AR(t)A')^{1/2}(A^{-1})' \\ R(t) &= K(t)G(t)K'(t) \end{aligned}$$

Начальные условия для систем (4.6) получим из (1.4)

$$(4.7) \quad a_-(t_0) = a_0, \quad Q_-(t_0) = Q_0$$

Определение искомого параметра эллипсоида  $E(a_-(t), Q_-(t))$  свелось к решению задач Коши (4.6), (4.7). Вектор  $a_-(t)$  центра эллипсоида удовлетворяет линейной, а симметрическая положительно-определенная матрица  $Q_-(t)$  — нелинейной матричной системе (4.6). Входящая в эту систему матрица  $A$  зависит от  $t$  и  $Q_-(t)$  и должна удовлетворять равенствам (4.3); ее определение сводится при каждом  $t$  к решению задачи на собственные значения типа (2.6). Матрицы  $(AQ_-A')^{1/2}$ ,  $(ARA')^{1/2}$  в (4.6) диагональны согласно (4.3) и потому перестановочны. Системы (4.6) для  $a_-$ ,  $Q_-$  независимы и могут интегрироваться отдельно. Система (4.6) и начальные условия (4.7) для  $a_-(t)$  совпадают с (1.6) для  $a_+(t)$ , и  $a_-(t) \equiv a_+(t)$ . Системы (4.6), (1.6) для  $Q_-$ ,  $Q_+$  сходны по структуре, см. [7, 10]. Решая задачи Коши (4.6), (4.7), получим искомую внутреннюю эллипсоидальную оценку области достижимости (1.5).

Отметим, что эллипсоид  $E(a_-, Q_-)$  не будет эллипсоидом наибольшего объема, содержащимся в области достижимости  $M$ ; при построении этого эллипсоида максимизация объема имела место лишь локально, «в малом». Оценки (1.5), (4.6), (4.7) можно использовать и тогда, когда ограничения (1.4) неэллипсоидальные. В этом случае следует сначала построить эллипсоиды, содержащиеся в множествах начальных данных и ограничений на управление, а затем применить полученные результаты. Оценки (1.5) можно использовать для оценивания областей достижимости управляемых систем, для оценивания возмущений (если  $u(t)$  — возмущение), для получения гарантированных оценок в дифференциальных играх на основе правила экстремального прицеливания [1, 2]. Так, если внутренняя оценка области достижимости преследователя поглощает внешнюю оценку области достижимости преследуемого, то заведомо имеет место поглощение для областей достижимости, что при определенных условиях гарантирует поимку.

Оценки (1.5) позволяют также получать двусторонние оценки экстремума функционала в задачах оптимального управления. Для терминаль-

ного функционала вида  $J = F(x(T))$ , где  $F(x)$  — заданная скалярная функция,  $T > t_0$  — фиксированный момент окончания процесса, имеем очевидные двусторонние оценки

$$\min_{x \in E_+} F(x) \leq \min J = \min_{x \in M(T)} F(x) \leq \min_{x \in E_-} F(x)$$

$$E_- = E(a_-(T), Q_-(T)), E_+ = E(a_+(T), Q_+(T))$$

5. В качестве примера рассмотрим управляемую систему второго порядка (нижние индексы обозначают компоненты векторов  $x, a_-$ )

$$(5.1) \quad dx_1/dt = x_2, \quad dx_2/dt = u$$

$$|u| \leq 1, \quad n = 2, \quad m = 1$$

Матрицы и векторы в (1.1), (4.6) для системы (5.1) равны

$$(5.2) \quad C = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad K = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad f = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad G = 1, \quad R = KGK' = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Матрицу  $A$  возьмем в виде ( $Q_{ij}$  — элементы матрицы  $Q_-$ )

$$(5.3) \quad A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -Q_{12} & Q_{11} \end{vmatrix}$$

Можно проверить, что матрица (5.3) удовлетворяет условиям (4.3), если  $R$  дано формулой (5.2). Подставляя в систему (4.6) равенства (5.2), (5.3), получим

$$(5.4) \quad da_1/dt = a_2, \quad da_2/dt = 0$$

$$dQ_{11}/dt = 2Q_{12}, \quad dQ_{12}/dt = Q_{22}$$

$$dQ_{22}/dt = 2(Q_{11}Q_{22} - Q_{12}^2)^{1/2}Q_{11}^{-1/2}$$

Примем для простоты, что начальный эллипсоид (1.4) есть точка — начало координат, так что начальные условия (4.7) имеют вид

$$(5.5) \quad a_i(0) = Q_{ij}(0) = 0, \quad i, j = 1, 2$$

Решение системы (5.4) для  $a(t)$  с начальными условиями (5.5) есть  $a(t) \equiv 0$ . Решение задачи Коши (5.4), (5.5) для  $Q_-(t)$  ищем в виде

$$(5.6) \quad Q_{11} = b_1 t^4, \quad Q_{12} = b_2 t^3, \quad Q_{22} = b_3 t^2$$

где  $b_1, b_2, b_3$  — неопределенные коэффициенты. Подставляя (5.6) в систему (5.4), находим единственное нетривиальное решение

$$(5.7) \quad b_1 = 1/18, \quad b_2 = 1/9, \quad b_3 = 1/3$$

Введем переменные

$$(5.8) \quad \xi_1 = x_1 t^{-2}, \quad \xi_2 = x_2 t^{-1}$$

В переменных (5.8) эллипсоид (1.3) с центром  $a(t) = 0$  и с матрицей (5.6), (5.7) приводится к виду

$$(5.9) \quad E(a_-, Q_-): 54 \xi_1^2 - 36 \xi_1 \xi_2 + 9 \xi_2^2 \leq 1$$

Полуоси  $c_{1,2}$  эллипса (5.9) и угол наклона  $\alpha$  его большей полуоси к оси  $x_1$  равны

$$c_{1,2} = [7 \pm (41)^{1/2}]^{1/2}/6, \quad c_1 = 0,6102$$

$$c_2 = 0,1288, \quad \alpha = \arctg \{[(41)^{1/2} + 5]/4\} = 70^\circ, 67'$$

На фиг. 2 в переменных (5.8) изображены (показана лишь область  $\xi_2 \geq 0$ ) эллипс  $E(a_-, Q_-)$ , точная область достижимости  $M$  системы (5.1) (она ограничена двумя дугами парабол), а также эллипс  $E(a_+, Q_+)$ , построенный путем интегрирования системы (1.6). Его уравнение в переменных (5.8) (см. [10])

$$E(a_+, Q_+): (135/16) \xi_1^2 - (45/4) \xi_1 \xi_2 + (9/2) \xi_2^2 \leq 1$$

Площади указанных трех областей соответственно равны

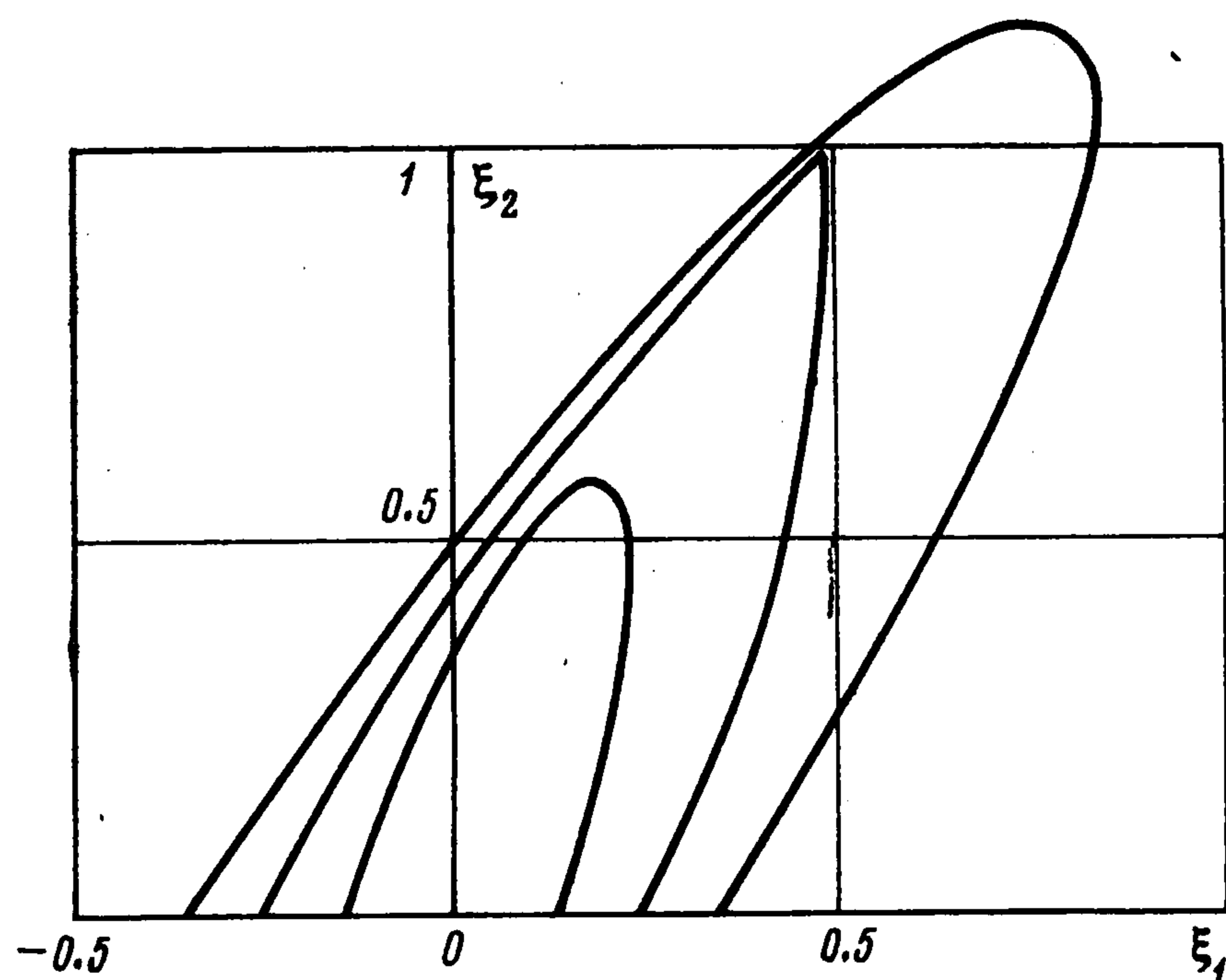
$$V_- = \pi / (9 \cdot 2^{1/2}) = 0,2468, \quad V_M = 2/3$$

$$V_+ = 8\pi / (9 \cdot 5^{1/2}) = 1,2489$$

**6. Нелинейные системы.** Результаты, полученные выше для линейных систем (1.1), распространяются на следующий класс нелинейных систем:

$$(6.1) \quad dx/dt = C(t)x + v(x, u, t)$$

Здесь  $v$  — заданная нелинейная вектор-функция своих аргументов; остальные обозначения — те же, что и в (1.1). Относительно функции  $v(x, u, t)$  предположим, что множество  $W(x, t)$  ее значений (при любых



Фиг. 2

фиксированных  $x$ ,  $t \geq t_0$  и всевозможных допустимых управлениях  $u$ ) удовлетворяет соотношениям

$$(6.2) \quad E(f_-(t), G_-(t)) \subset W(x, t) \subset E(f_+(t), G_+(t))$$

Здесь  $f_-, f_+$  —  $n$ -мерные векторы,  $G_-$  и  $G_+$  — симметричные матрицы размера  $n \times n$ . Эти векторы и матрицы заданы как функции времени при  $t \geq t_0$  и определяют эллипсоиды (6.2). Сопоставляя соотношения (1.1), (1.4) и (6.1), (6.2), приходим к следующему выводу.

Все приведенные выше оценки справедливы также и для нелинейных систем (6.1), если в этих оценках всюду положить  $K(t) = I$  и, кроме того, заменить  $f, G$  на  $f_-, G_-$  (для внутренних оценок в формулах (4.1) — (4.7)) или на  $f_+, G_+$  (для внешних оценок, в формулах (1.6)). Полученные таким образом оценки применимы для довольно широкого класса нелинейных систем (6.1), (6.2), правые части которых представляются в виде суммы линейной части, не содержащей управления, и нелинейных ограниченных слагаемых. Эти оценки могут быть улучшены, если ограничиться более узким классом нелинейностей, конкретизируя вид функции  $v$ .

Автор благодарит А. И. Овсеевича за полезные обсуждения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
2. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
3. Формальский А. М. Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. М.: Наука, 1974. 368 с.
4. Schweppe F. C. Recursive state estimation: unknown but bounded errors and system inputs.— IEEE Trans. Automat. Control, 1968, AC-13, No. 1, p. 22.
5. Schlaepfer F. M., Schweppe F. C. Continuous-time state estimation under disturbances bounded by convex sets.— IEEE Trans. Automat. Control, 1972, AC-17, No. 2, p. 197.
6. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
7. Черноусько Ф. Л. Гарантированные оценки неопределенных величин при помощи эллипсоидов.— Докл. АН СССР, 1980, т. 251, № 1, с. 51.
8. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с.
9. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
10. Черноусько Ф. Л. Оптимальные гарантированные оценки неопределенностей с помощью эллипсоидов. I, II, III.— Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1980, № 3, с. 3; № 4, с. 3; № 5, с. 5.

Поступила в редакцию  
20.III.1980