

УДК 532.72

О ПОЛЕ КОНЦЕНТРАЦИИ В УПОРЯДОЧЕННОЙ СИСТЕМЕ РЕАГИРУЮЩИХ ПЛАСТИН, РАСПОЛОЖЕННЫХ ВДОЛЬ ПОТОКА

Полянин А. Д., Сергеев Ю. А.

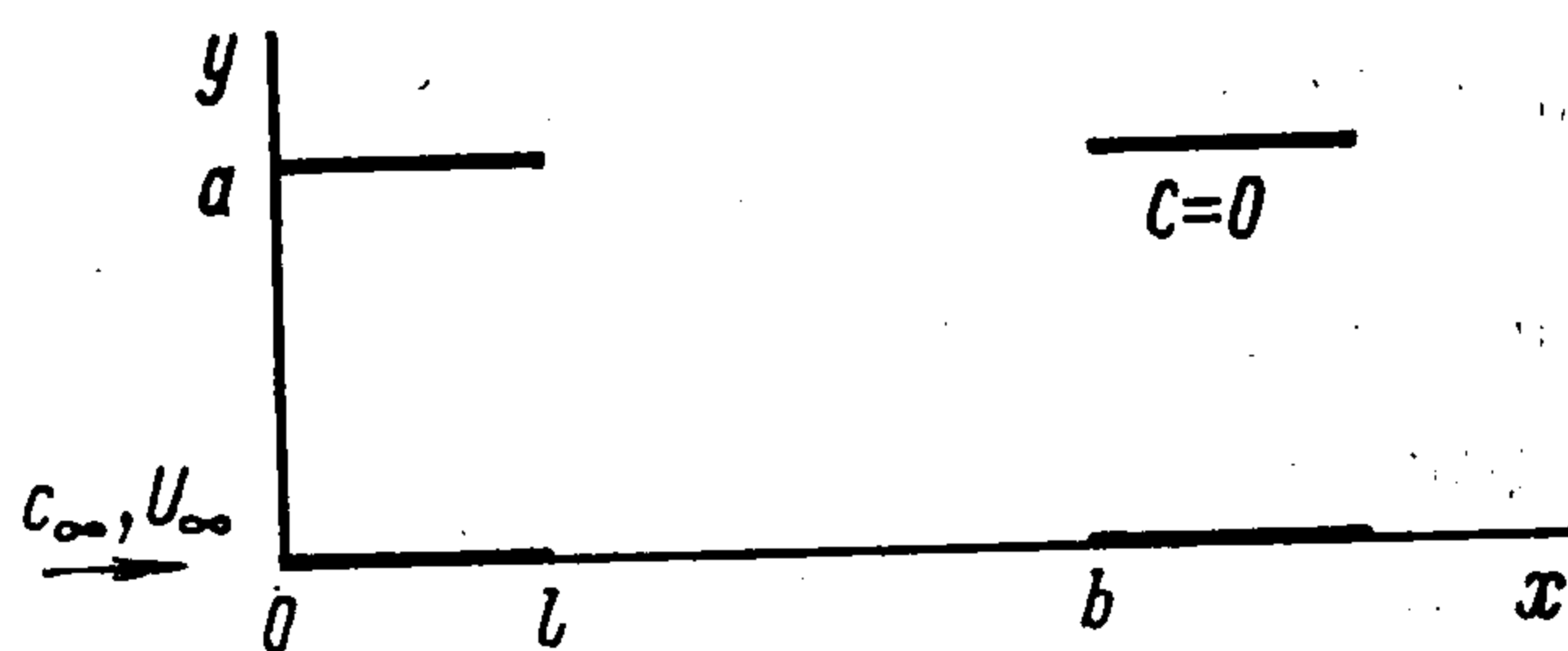
(Москва)

Рассматривается плоская задача о конвективной диффузии в полубесконечной упорядоченной системе пластин, продольно обтекаемых идеальной жидкостью. Число Пекле, определенное по длине пластины, считается большим, поэтому изменение поля концентрации обусловлено главным образом взаимодействием диффузионных следов и погранслоев пластин, расположенных одна за другой вдоль потока [1—4]. Основное внимание уделяется получению и исследованию уравнений, описывающих распределение концентрации на внешней границе погранслоя каждой пластины. Показано, что в рассматриваемой системе распределение концентрации в ядре потока описывается интегральным уравнением типа Вольтерра с интегрируемой особенностью. В случае одиночной цепочки пластин получено точное решение уравнения, а в случае периодической системы цепочек, расположенных параллельно одна другой, получена асимптотика решения вдали от входа в систему. Предлагается метод последовательных приближений, позволяющий в некоторых случаях определить асимптотику для поля концентраций вдали от входа в систему. Исследование асимптотики точного решения для одиночной цепочки пластин показывает, что в этом случае метод последовательных приближений дает точный результат для главного члена асимптотического разложения.

Предложенный метод распространяется на нелинейные задачи и позволяет формулировать соответствующие уравнения и краевые условия. В качестве примера рассмотрено обтекание периодической системы пластин вязкой жидкостью при больших числах Рейнольдса.

Ранее анализировался процесс конвективной диффузии в разреженной [1] и концентрированной [2] решетках реагирующих сфер, рассматривалась [3, 4] диффузия к цепочкам твердых реагирующих частиц.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему периодически расположенных пластин длины l , продольно обтекаемых однородным потоком идеальной несжимаемой жидкости. Система имеет периоды a и b вдоль осей y и x , соответственно (фиг. 1). Считаем, что на поверхностях пластин происходит реакция с полным поглощением растворенного в жидкости вещества, концентрация которого в набегающем потоке вдали от входа в систему постоянна.



Фиг. 1

Указанная модель может описывать процессы диффузии или теплопроводности в случае системы пластин (например, вставок в химическом реакторе), помещенных в неподвижный или взвешенный слой частиц, сквозь который фильтруется поток жидкости. В этом случае поле течения можно считать потенциальным. Другим примером является процесс конвективного теплопереноса к стенкам реактора с неподвижным

или взвешенным слоем при периодическом размещении на стенках нагревательных или охлаждающих элементов. Такая постановка задачи может моделировать также тепловые и массообменные системы при наличии участков коррозии на рабочей поверхности [5].

При больших числах Пекле, когда существен лишь поперечный перенос вещества в диффузионных погранслоях и следах пластин, распределение концентрации в потоке определяется решением следующей краевой задачи:

$$(1.1) \quad Lc = 0, \quad L = \partial/\partial x - \partial^2/\partial y^2$$

$$(1.2) \quad x = 0, \quad c = 1$$

$$(1.3) \quad c(y+a) = c(y)$$

$$(1.4) \quad y = ma, \quad x = kb + l\tau, \quad c = 0$$

$$y = ma, \quad x = kb + l + (b-l)\tau, \quad \partial c/\partial x = 0$$

$$k = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad \tau \in [0, 1]$$

Здесь координата x отсчитывается от начала первой пластинки, k — номер пластинки; скорость потока жидкости и коэффициент диффузии полагаются равными единице (что всегда может быть сделано за счет изменения масштаба по переменной y). Уравнение (1.1) определяет главный член соответствующего асимптотического разложения для концентрации (по большому числу Пекле) и пригодно во всей области течения, так как в плоском случае для пластин, ориентированных вдоль потока, уравнения диффузионного следа и пограничного слоя совпадают (это показывается аналогично [6]).

В случае одиночной цепочки пластин условие периодичности (1.3) заменяется на условие однородности концентрации

$$(1.5) \quad y \rightarrow \infty, \quad c \rightarrow 1$$

а граничное условие (1.4) берется лишь при одном значении $m = 0$ ($y = 0$).

В дальнейшем считаем, что продольный период решетки удовлетворяет условию $T = lb^{-1} \ll 1$.

Для достаточно протяженной системы пластин ($k \gg 1$) диффузия в пограничных слоях отдельных пластин может привести к существенному изменению концентрации вне пограничных слоев по сравнению с концентрацией $c = 1$ на входе в систему. При переходе от одной пластины к другой на внешней границе слоя концентрация меняется на величину $\sqrt{T} \ll 1$. Однако, даже малые изменения концентрации на участке порядка периода решетки b приводят к существенному изменению концентрации вдали от входа в систему ($k \gg 1$).

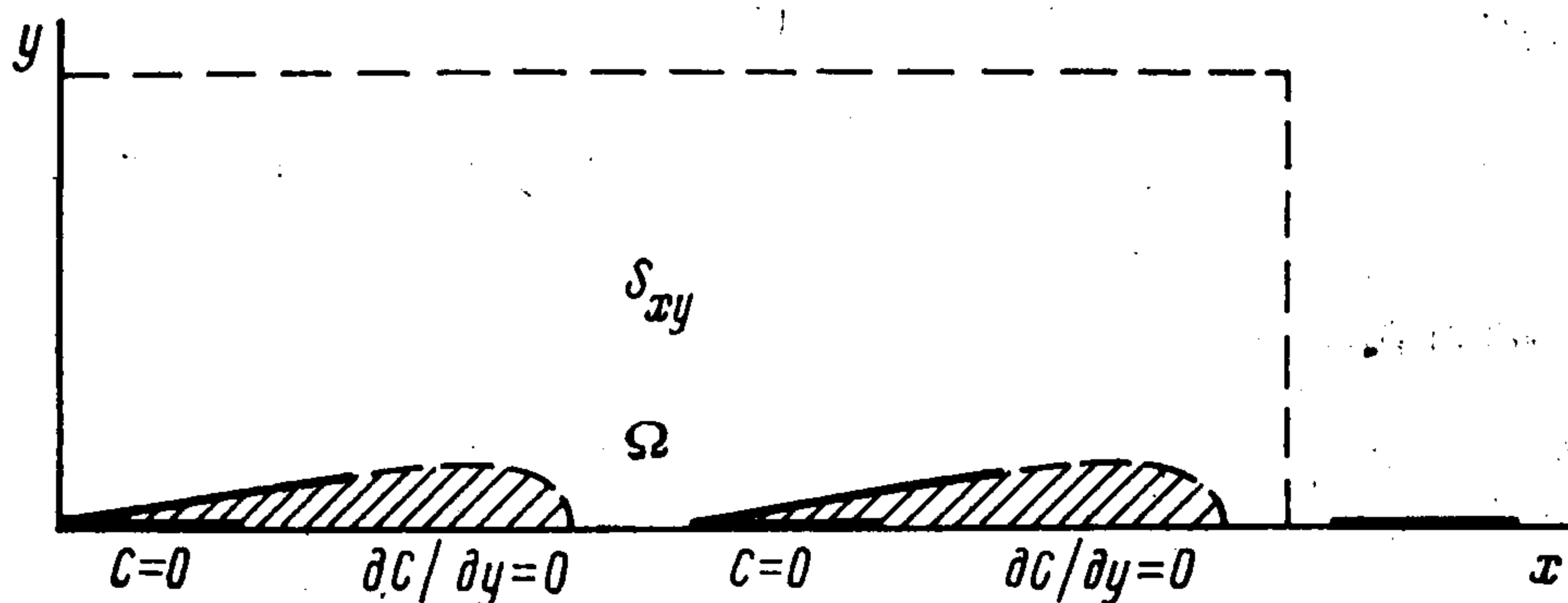
Основная цель данной работы — получение и исследование уравнений, описывающих распределение концентрации на внешней границе пограничного слоя каждой пластинки в случае, когда на характерном продольном масштабе длины расположено много пластинок ($k \gg 1$).

2. Диффузия к одиночной цепочке и периодической системе пластин. Аналогично анализу продольного обтекания пластины вязкой несжимаемой жидкостью при больших числах Рейнольдса [6], можно показать, что

максимальная толщина диффузионного пограничного слоя первой пластины $\delta_1 = lO(P^{-1/2})$, а толщина ее диффузионного следа около второй пластины цепочки $\delta_1^* = T^{-1/2}\delta_1 \gg \delta_1$. Отсюда и из распределения концентрации в диффузионном следе одиночной пластины следует, что при $T \ll 1$ концентрация $c(x, y)$ в окрестности второй пластины, вне ее диффузионного пограничного слоя, меняется медленно; это свойство будет иметь место и для произвольной пластины цепочки.

Уравнение для распределения концентрации вне диффузионных слоев пластин может быть получено суммированием точечных источников, задающих распределение концентрации в диффузионных следах пластин (при $T \ll 1$) и расположенных в их центрах, аналогично тому как это делалось для случая решетки сфер [1]. В данной работе предлагается иной, более общий подход, основанный на использовании исходного уравнения (1.1) и выводе дополнительного интегрального краевого условия («условия сохранения» реагирующего вещества в объеме) для концентрации. Хотя конечные результаты для распределения концентрации, полученные предлагаемым здесь методом, могут быть получены путем использования процедуры [1], данный подход в отличие от [1] естественным образом распространяется на нелинейные задачи (см., например, обтекание периодической системы пластин вязкой жидкостью при больших числах Рейнольдса, п. 3) и позволяет легко формулировать соответствующие уравнения и краевые условия (для компонент скоростей) в общем случае.

В дальнейшем для удобства рассуждений условно выделим внешнюю область Ω , в которой имеют место большие градиенты концентрации c . При этом Ω получается исключением из полуплоскости $x \geq 0$ областей диффузионного пограничного слоя и части областей диффузионных следов (протяженности $O(1)$) расположенных непосредственно за пластинками, в которых происходит резкое изменение концентрации (фиг. 2). Фактиче-



Фиг. 2

ски, Ω совпадает с областью применимости представления точечными источниками для распределения концентрации в системе пластин [1]. Концентрацию в области Ω обозначаем $C(x, y)$. При $T \ll 1$ внешняя концентрация мало меняется на периоде решетки $C(x + b, y) - C(x, y) = O(\sqrt{T})$, а основное изменение концентрации обусловлено поглощением вещества на реагирующих пластинках и происходит из-за наличия за ними диффузионных следов, которые уменьшают концентрацию на внешней границе пограничных слоев последующих пластинок.

Так как во внешней области концентрация c совпадает с концентрацией C , то в области Ω внешняя концентрация $C(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1.1) и граничным условиям (1.2), (1.5). Для завершения формулировки задачи для концентрации C требуется добавить еще одно краевое условие

типа «закона сохранения», которое содержит в себе информацию о граничных условиях (1.4) и которые теперь уже не выполняются для C . Необходимое (дополнительное) краевое условие может быть получено при помощи рассуждений типа [1], где оно неявно использовалось для вывода интегрального уравнения для концентрации при определении неизвестных коэффициентов, входящих множителями в автомоделльные решения, соответствующие точечным источникам в центрах сфер.

Следуя [1], для получения последнего краевого условия проинтегрируем уравнение (1.1) по контрольному объему $S_{xy} = \{[0, x]; y \in [0, +\infty)\}$ (фиг. 2)

$$(2.1) \quad \int_0^x \int_0^{\infty} Lc \, dy \, dx = - \int_0^{\infty} [1 - c(x, y)] \, dy + \int_0^x \left[\frac{\partial c}{\partial y} \right]_{y=0} \, dx = 0$$

Интегральное тождество (2.1) является законом сохранения массы диффундирующего вещества в объеме S_{xy} . Пусть на расстоянии x от входа в систему расположено k пластинок, т. е. $(k-1)b < x < kb$. Тогда в силу граничных условий (1.4) имеет место равенство

$$(2.2) \quad \int_0^x \left[\frac{\partial c}{\partial y} \right]_{y=0} \, dx = \sum_{n=0}^{k-1} I_{n+1}, \quad I_{n+1} = \int_{nb}^{nb+l} \left[\frac{\partial c}{\partial y} \right]_{y=0} \, dx$$

Здесь I_n — полный диффузионный поток на n -ю пластинку.

Так как концентрация $C(x, y)$ мало меняется на расстоянии b в окрестности пластин, то распределение концентрации в пограничном слое n -й пластины может быть записано в виде [6]

$$(2.3) \quad c_n(x, y) = C_n(x, 0) \operatorname{erf} \left(\frac{y}{2\sqrt{x_n'}} \right)$$

Здесь $x_n' = x - nb$ — координата, отсчитываемая от начала n -й пластины.

Вычисляя интеграл (2.2), с учетом (2.3) получим

$$(2.4) \quad \int_0^x \left[\frac{\partial c}{\partial y} \right]_{y=0} \, dx = \sum_{n=0}^{k-1} C_n(x, 0) \cdot 2\sqrt{\frac{l}{\pi}} \approx 2\sqrt{\frac{l}{\pi}} \frac{1}{b} \int_0^x C(\tau, 0) \, d\tau$$

Здесь сумма заменена интегралом, так как концентрация мало меняется на расстоянии порядка периода решетки b , т. е. $C_n - C_{n-1} = o(1)$. Учитывая малость толщины диффузионного погранслоя и принимая во внимание соотношение (1.6), из (2.1) получаем

$$(2.5) \quad \int_0^{\infty} [1 - C(x, y)] \, dy - \lambda \int_0^x C(\tau, 0) \, d\tau = 0$$

$$\lambda = 2\pi^{-1/2} l^{1/2} b^{-1}$$

Следовательно, концентрация $C(x, y)$ во внешней области Ω удовлетворяет краевой задаче

$$(2.6) \quad LC = 0; \quad x = 0, \quad C = 1; \quad y \rightarrow \infty, \quad C \rightarrow 1$$

$$(2.7) \quad - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} C(x, y) \, dy = \lambda C(x, 0)$$

Последнее краевое условие получено дифференцированием соотношения (2.5). Правая часть этого условия представляет собой диффузионный поток на пластины в единице длины системы.

Решение задачи (2.6), (2.7) ищем в виде

$$(2.8) \quad C(x, y) = 1 - \int_0^x \frac{A(x')}{\sqrt{x-x'}} \exp\left[-\frac{y^2}{4(x-x')}\right] dx'$$

Функция (2.8) удовлетворяет уравнению и двум граничным условиям (2.6) для любого гладкого ядра $A(x)$ [7]. Подставляя выражение (2.8) в последнее граничное условие (2.7), после интегрирования по y получаем связь

$$(2.9) \quad \lambda C(x, 0) = \sqrt{\pi} A(x)$$

Подставляя это равенство в (2.8) и полагая в нем $y = 0$, получим уравнение для концентрации $C(x, 0) \equiv C(x)$ на внутренней границе внешней области Ω

$$(2.10) \quad C(x) = 1 - \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \int_0^x C(x') \frac{dx'}{\sqrt{x-x'}}$$

Следует отметить, что уравнение (2.10) также может быть получено суммированием точечных источников, расположенных в центрах пластин и задающих распределение концентрации в дальней области диффузионных следов за ними, с последующей заменой такой суммы интегралом аналогично тому, как это делалось в [1].

Уравнение (2.10) имеет точное решение [8]

$$(2.11) \quad C(x) = 1 + \int_0^x g(x', \lambda) dx', \quad \lambda = 2\pi^{-1/2} l^{1/2} b^{-1}$$

$$g(x, \lambda) = -\frac{\lambda}{\sqrt{\pi x}} + \frac{\lambda^2}{\sqrt{\pi}} \exp(\lambda^2 x) \Gamma\left(\frac{1}{2}, \lambda^2 x\right)$$

Здесь $\Gamma(1/2, x)$ — неполная гамма-функция.

Из формулы (2.11) следует, что асимптотика функции $C(x)$ при больших значениях x имеет вид

$$(2.12) \quad x \rightarrow \infty, \quad C(x, 0) \rightarrow 1/2 b l^{-1/2} x^{-1/2}$$

Из выражения (2.12) видно, что вдали от начала цепочки концентрация на внешней границе диффузионного погранслоя пластины стремится к нулю пропорционально $x^{-1/2}$ (обратно пропорционально \sqrt{k} , $k \rightarrow \infty$).

Рассмотрим теперь конвективную диффузию в периодической системе пластин. Постановка задачи приведена в п. 1 и задается уравнением (1.1) с граничными условиями (1.2) — (1.4).

Вводя область Ω (фиг. 2), рассмотрим задачу об определении поля внешней концентрации $C(x, y)$ (концентрация вне диффузионного погранслоя).

В этом случае, как и для одиночной цепочки пластин, внешняя концентрация удовлетворяет уравнению (1.1) и граничным условиям (1.2), (1.3); для получения последнего граничного условия проинтегрируем уравнение

(1.1) (учитывая все граничные условия) по контуру $S_{xy} = \{[0, x], y \in [0, a/2]\}$.

При интегрировании учитываем, что в силу симметрии задачи относительно прямой $y = a/2$ выполняется равенство $[\partial c / \partial y]_{y=a/2} = 0$.

Считая, что в интервал $[0, x]$ попадает k пластин, в результате получаем закон сохранения массы диффундирующего вещества в виде (2.1), (2.2), где верхним пределом интегрирования будет $a/2$ вместо ∞ .

Учитывая что концентрация в области Ω мало меняется на расстоянии b между соседними пластинами, получаем, что распределение концентрации в пограничном слое n -й пластины имеет вид (2.3). Вычисляя теперь последний интеграл в (2.1) при $k \gg 1$ с учетом (2.3), приходим к приближенному равенству (2.4). С учетом (2.1) и (2.4) для концентрации $C(x, y)$ во внешней области Ω получаем равенство (2.5), где верхний предел интегрирования по поперечной координате будет $a/2$.

Окончательно получаем, что концентрация во внешней области $C(x, y)$ в первом квадранте $x \geq 0, y \geq 0$ ($C(x, y) = C(x, -y)$) определяется краевой задачей

$$(2.13) \quad \text{LC} = 0; \quad x = 0, \quad C = 1; \quad C(y + a) = C(y)$$

$$(2.14) \quad -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{a/2} C(x, y) dy = \lambda C(x, 0)$$

Здесь коэффициент λ определен в выражении (2.5).

Решение задачи (2.13) ищем в виде

$$(2.15) \quad C(x, y) = 1 - \int_0^x \frac{A(x')}{\sqrt{x-x'}} \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{(y-ma)^2}{4(x-x')} \right\} \right) dx'$$

Функция (2.15) периодична по координате y с периодом a и для любого ядра $A(x)$ удовлетворяет уравнению и первому граничному условию (2.14). Подстановка выражения (2.15) в граничное условие (2.14) с последующим интегрированием по y задает связь между ядром $A(x)$ и концентрацией на оси $C(x, 0)$ и приводит к соотношению (2.9).

С учетом этого, устремляя y к нулю в выражении (2.15), получаем интегральное уравнение для концентрации на внешней границе диффузионных погранслоев пластин (на внутренней границе области Ω)

$$(2.16) \quad C(x) = 1 - \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{C(x')}{\sqrt{x-x'}} \Theta_3 \left(\frac{a^2}{4\pi(x-x')} \right) dx'$$

$$\Theta_3(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi m^2 x), \quad C(x) \equiv C(x, 0)$$

Здесь $\Theta_3(x)$ — тэта-функция [9].

При $a \rightarrow \infty$ уравнение (2.16) переходит в уравнение (2.10) для одиночной цепочки пластин.

Исследуем уравнение (2.16). Для лапласовского образа $C(p)$ концентрации $C(x) = C(x, 0)$ (ниже оригиналы и изображения будем различать

лишь аргументами x и p соответственно), согласно теореме о свертке, имеем уравнение

$$C(p) = \frac{1}{p} - \lambda C(p) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{p}} \exp(-a|m|\sqrt{p})$$

Выполняя суммирование, для образа концентрации на оси получим

$$(2.17) \quad C(p) = \left[p + \lambda \sqrt{p} \operatorname{cth} \left(\frac{1}{2} a \sqrt{p} \right) \right]^{-1}$$

Выражение (2.17) позволяет получить асимптотики распределения концентрации $C(x)$ на оси при больших x . При больших расстояниях a между цепочками пластин неравенство $a^{-2} \ll p \ll 1$ для лапласовской переменной p соответствует промежуточной асимптотике при $1 \ll x \ll a^2$. Оставляя в знаменателе (2.17) главные члены разложения по $p^{1/2}$, получим промежуточную асимптотику в виде (2.12), совпадающую с асимптотическим выражением для концентрации на оси в одиночной цепочке. В этом случае при получении промежуточной асимптотики существен лишь член $\lambda \sqrt{p} (\operatorname{cth} (1/2 a \sqrt{p}) \approx 1)$ в знаменателе выражения (2.17), что соответствует пренебрежению левой частью исходного уравнения (2.16).

Заметим, что физически промежуточная асимптотика соответствует области, достаточно удаленной от входа в систему, в которой еще не сказывается влияние соседних цепочек пластин.

При $x \gg a^2$ ($p \ll a^{-2}$) учитывая, что $\operatorname{cth} (a\sqrt{p}/2) = 2a^{-2}p^{-1/2} (1 + a^2p/12 + O(p^2))$, из соотношения (2.17) получим асимптотическое выражение (здесь величина a произвольна)

$$(2.18) \quad C(x) = q \exp[-2\lambda q a^{-1}x] \quad (x \rightarrow \infty)$$

$$q = (1 + 1/6 a \lambda)^{-1}$$

Выражение (2.18) означает, что влияние соседних цепочек приводит к существенно более сильному убыванию концентрации на оси. Заметим, что при получении «дальней» асимптотики (2.18) существенными оказываются оба слагаемых знаменателя (2.17), т. е. обе части уравнения (2.16) имеют один и тот же порядок малости.

Используемый метод легко распространяется на нелинейные задачи и позволяет формулировать соответствующие уравнения и граничные условия. В качестве такого примера рассмотрим обтекание периодической системы пластин вязкой жидкостью при больших числах Рейнольдса.

3. Обтекание периодической системы пластинок вязкой несжимаемой жидкостью при больших числах Рейнольдса. Рассмотрим обтекание описанной в п. 1 системы пластин однородным на бесконечности потоком вязкой несжимаемой жидкости. Числа Рейнольдса обтекания отдельной пластины предполагаются большими.

Поле течения определяется из решения краевой задачи для уравнения пограничного слоя (и в этом случае уравнения пограничного слоя и сле-

да совпадают) (фиг. 1)

$$(3.1) \quad G(u) = (u \nabla) u_1 - \nu \partial^2 u_1 / \partial y^2 = 0$$

$$\operatorname{div} u = 0; \quad u = \{u_1, u_2\}$$

$$(3.2) \quad x = 0, \quad u_1 = U, \quad u_2 = 0$$

$$(3.3) \quad u(x, y+a) = u(x, y)$$

$$(3.4) \quad y = ma, \quad \begin{cases} x = kb + \tau l, & u_1 = 0, \quad u_2 = 0 \\ x = kb + l + (b-l)\tau, & \partial u_1 / \partial x = 0, \quad u_2 = 0 \end{cases}$$

Здесь u_1 и u_2 — продольная и поперечная составляющие скорости соответственно; ν — кинематическая вязкость жидкости, U — скорость потока на бесконечности.

Чтобы получить распределение скоростей v_1 и v_2 во внешней области, следует, как и в п. 2, использовать интегральный закон сохранения импульса, получаемый интегрированием уравнения движения (3.1) с учетом уравнения неразрывности по контрольному объему S_{xy} . При этом следует воспользоваться формулой для распределения продольной компоненты скорости в пограничном слое k -й пластины [6] (v_{ik} — компоненты скоростей в области Ω)

$$(3.5) \quad u_{1k} = \alpha y v_{1k}^{3/2} (\nu x)^{-1/2}, \quad \alpha = 0,332 \quad (y \rightarrow 0)$$

Процедура получения уравнений во внешней области Ω идентична п. 2 и приводит к следующей краевой задаче:

$$(3.6) \quad G(v) = 0, \quad \operatorname{div} v = 0; \quad v = \{v_1, v_2\}$$

$$x = 0, \quad v_1 = U, \quad v_2 = 0; \quad v(y+a) = v(y)$$

$$(3.7) \quad -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{a/2} v_1^2(x, y) dy = \sigma v_1^{3/2}(x, 0)$$

$$y = 0, \quad v_2 = 0; \quad \sigma = 2\alpha \nu^{-1/2} l^{1/2} b^{-1}$$

В случае одиночной цепочки пластин условие периодичности по поперечной координате заменяется условием однородности

$$(3.8) \quad y \rightarrow \infty, \quad v_1 = U, \quad v_2 = 0$$

при этом параметр a , стоящий на верхнем пределе в граничном условии (3.7), для v_1 полагается равным бесконечности.

4. Метод последовательных приближений. Здесь будет показано, как в некоторых случаях с помощью метода последовательных приближений можно получить асимптотику для распределения концентрации (или продольной компоненты скорости) на внешней границе диффузионного (гидродинамического) пограничного слоя пластины $C(x, 0)$ при $x \rightarrow \infty$ непосредственно из краевых задач (2.6), (2.7); (2.13), (2.14) (или (2.16)) без использования уравнений (2.10) и (2.16).

Рассмотрим краевую задачу для неизвестной функции w в области $x \geq 0, 0 \leq y \leq a$ (где a — любое, в частности, $a = \infty$)

$$(4.1) \quad \Delta w = 0$$

$$(4.2) \quad w(\Gamma_i) = w_i, \quad i = 1, 2$$

$$(4.3) \quad w(x, 0) = F(w)$$

Здесь Λ — некоторый (нелинейный) параболический оператор, а (4.2), (4.3) — краевые условия для уравнения (4.1). Например, $\Lambda = L$ может быть задан в виде (1.1), граничные условия (4.2) будут определяться (1.2), (1.3) или (1.2), (1.5); условие (4.3) является сложным краевым условием вида (2.7) или (2.14). Последнее условие (4.3) может иметь и более сложную структуру, в частности быть нелинейным, как, например, в (3.7).

Пусть относительно задачи (4.1) — (4.3) известно, что

$$(4.4) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} w(x, 0) = 0$$

(например, следует из физической постановки задачи) и требуется определить первый член асимптотического разложения $w(x, 0)$ при $x \rightarrow \infty$.

Для этого рассмотрим вспомогательную задачу для функции w_*

$$(4.5) \quad \Lambda w_* = 0; \quad w_*(\Gamma_i) = w_i; \quad w_*(x, 0) = 0$$

Вспомогательная задача (4.5) отличается от исходной задачи (4.1) — (4.3) заменой сложного граничного условия (4.3) простейшим асимптотическим граничным условием (4.4).

Решение задачи (4.5) обычно устроено значительно проще, чем решение задачи (4.1) — (4.3) и во многих случаях может быть получено в явном аналитическом виде. Главный член асимптотического разложения для $w(x, 0)$ при $x \rightarrow \infty$ получается в результате подстановки вспомогательного решения задачи (4.5) в правую часть последнего граничного условия (4.3)

$$(4.6) \quad x \rightarrow \infty, \quad w(x, 0) = F(w_*(x, y))$$

Указанная процедура получения главного члена асимптотики задачи (4.1) — (4.3) при $x \rightarrow \infty$ в некоторых случаях может быть полностью обоснована.

В частности, из формулировки задачи о диффузии к цепочке реагирующих пластин (2.6), (2.7), а также из способа получения уравнений для концентрации на внешней границе диффузионных погранслоев пластин (2.10) следует, что определение асимптотики для концентрации $C(x)$ с помощью формулы (4.6) в точности соответствует определению асимптотики решений укороченных интегральных уравнений (2.10) (в левой части которых полагается $C(x) = 0$). С другой стороны, для многих типов интегральных уравнений укороченное уравнение при $x \rightarrow \infty$ дает правильный результат для асимптотики исходного уравнения.

В частности, для решения $w(x) = w(x, \omega)$ интегрального уравнения вида

$$(4.7) \quad \omega w(x) = 1 - \lambda_* \int_0^x \frac{W^\nu(x') dx'}{(x - x')^\beta}$$

$$(\lambda_* > 0, \nu > 0; 0 < \beta < 1)$$

следуя процедуре [10], где рассматривался случай $\nu \geq 1$, $\beta = 1/2$, можно показать, что имеет место следующее предельное равенство:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} w(x, 1) w^{-1}(x, 0) = 1$$

Полагая в уравнении (4.7) $\omega = 1$, $\nu = 1$, $\lambda_* = \lambda \pi^{-1/2}$, $\beta = 1/2$, приходим к уравнению (2.10). Прямая подстановка асимптотики для $C(x, 0)$ при $x \rightarrow \infty$, определенной в соотношении (2.12), показывает, что она является точным решением укороченного уравнения (2.10) (и соответствует нулевому значению параметра ω в (4.7)).

Введение вспомогательной функции и получение асимптотики исходной задачи с помощью формулы (4.6) можно трактовать как некоторую модификацию метода последовательных приближений, на первом этапе которого строится решение w_* более простой, чем исходная, задачи (4.6) с последующей его подстановкой в правую часть исходного сложного краевого условия (4.3) и выделения из $F(w_*)$ главного члена асимптотического разложения при $x \rightarrow \infty$.

Использование формулы (4.6) проиллюстрируем на задачах (2.6), (2.7); (3.6) — (3.8).

1°. В первом случае решение вспомогательной задачи для концентрации в силу последнего упрощенного краевого условия (4.5)

$$(4.8) \quad c_*(x, 0) = 0$$

показывает, что вспомогательная функция $c_*(x, y)$ является автомодельным решением задачи о диффузии к полубесконечной пластине при условии полного поглощения на ее поверхности. Поэтому для c_* имеем

$$(4.9) \quad c_*(x, y) = \operatorname{erf}(y/2\sqrt{x})$$

Подстановка этого выражения в формулу (4.6) с учетом явного вида функционала F (2.7) приводит к равенству

$$C(x, \infty) = -\frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} c_*(x, y) dy = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{1}{\pi x}} \quad (x \rightarrow \infty)$$

где параметр λ определен в соотношении (2.5). Эта формула в точности совпадает с асимптотикой (2.12), полученной из точного решения задачи (2.11).

Замечание. Вычисление интеграла входящего в выражения (2.7), (4.6) может быть проведено значительно проще без учета явного вида вспомогательной функции (4.9), если воспользоваться равенством

$$\left[\frac{\partial c_*}{\partial y} \right]_{y=0} = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} c_*(x, y) dy$$

которое следует из закона сохранения вещества для c_* получаемого, например, из интегрального тождества (2.1) заменой c на c_* . Используя исходное интегральное тождество (типа (2.1)) аналогичным образом следует вычислять правую часть (4.6) и в общем случае.

2°. Во втором случае решение вспомогательной задачи для поля течения в системе пластин, в силу условия (4.5) $u_{1*}(x, 0) = 0$ показывает, что вспомогательная функция $u_{1*}(x, y)$ является автомодельным решением погранслоистой задачи об обтекании полубесконечной пластины вязкой несжимаемой жидкостью [6]. Поэтому для u_{1*} имеем

$$(4.10) \quad y \rightarrow 0, u_{1*}(x, y) = \alpha y U^{3/2} (\nu x)^{-1/2}$$

Аналогично 1° можно показать, что интеграл, стоящий в правой части краевого условия (3.7), определяется величиной $[\partial u_{1*}/\partial y]_{y=0}$, которая с учетом (4.10) приводит к следующему асимптотическому закону затухания продольной компоненты скорости вдали от входа в систему:

$$(4.11) \quad x \rightarrow \infty, v_1(x, 0) \rightarrow 2^{-2/3} U l^{-1/3} b^{2/3} x^{-1/3}$$

Видно, что для цепочки пластин затухание скорости при $x \rightarrow \infty$ происходит медленнее соответствующего падения концентрации (2.12).

Безусловно, к формуле (4.11) следует относиться достаточно осторожно, так как ее прямое доказательство не может быть проведено соответствующей проверкой, аналогично тому как это делалось в случае конвективной диффузии к цепочке пластин.

Авторы благодарят Ю. П. Гупало, Ю. С. Рязанцева за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вовкьян А. Б., Головин А. М., Толмачев В. В. Конвективная диффузия в системе периодически расположенных сфер при малых числах Рейнольдса. — ПМТФ, 1966, № 5.

2. Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С., Сергеев Ю. А. О конвективном массообмене в системе периодически расположенных сфер.— ПМТФ, 1979, № 4.
3. Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С. О массообмене частиц, расположенных на оси потока, при больших числах Пекле.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 2.
4. Полянин А. Д. О диффузионном взаимодействии твердых частиц при больших числах Пекле.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 2.
5. Flytzani-Stephanopoulos M., Schmidt L. D. Evaporation rates and surface profiles on heterogenous surfaces with mass transfer and surface reaction.— Chem. Engng Sci., 1979, v. 34, No. 3, p. 365.
6. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
7. Sutton W. G. L. On the equation of diffusion in a turbulent medium.— Proc. Roy. Soc., A, 1943, v. 182, No. 988.
8. Brakhage H., Nickel K., Rieder P. Auflösung der Abelschen Integralgleichung 2. Art.— Z. angew. Math. und Phys., 1965, v. 16, No. 2, p. 295.
9. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. И. Курс современного анализа. Ч. 2. М.: Физматгиз, 1963.
10. Olmstead W. E., Handelsman R. A. Asymptotic solution to a class of nonlinear Volterra integral equations. II.— SIAM. J. Appl. Math., 1976, v. 30, No. 1, p. 180.

Поступила в редакцию
29.I.1980