Прикладная математика и механика. Том 44, вып. 6, 1980

УДК 531.36

О БЫСТРОМ ВРАЩЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

В. Н. Богаевский, Л. А. Острер

(Москва)

Рассматривается быстрое вращение симметричного тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки (кинетическая энергия велика по сравнению с потенциальной), в случаях, когда в начальный момент приближенно выполняются резонансные соотношения эйлеровского движения [1,2] (считается, что за время $t \sim 1$ тело совершает $\sim 1/\varepsilon$ оборотов, ε мало). Показано, что за конечное время ($t \sim 1$) имеет место конечное отклонение от движения по инерции. Данный механический эффект аналогичен прецессии быстрого волчка, но является более «ранним» (волчок, в принятом масштабе времени, прецессирует с малой скоростью). Получены приближенные уравнения, описывающие движение в главном порядке и интегрируемые в квадратурах. Указан формальный процесс получения высших приближений. Дана геометрическая интерпретация движений.

Известное представление о движении быстро вращающегося тяжелого твердого тела ([1], стр. 38) состоит в том, что вектор момента количества движения «M совершает медленную прецессию вокруг вертикали, а тело вращается относительно M приблизительно по Пуансо». Это представление неточно: два приближенных интеграла $M^2 = A^2(p^2+q^2)+C^2r^2 \approx \text{const}$, $2T = A(p^2+q^2)+Cr^2 \approx \text{const}$ могут выродиться в один (например, при малом r они вырождаются в интеграл $p^2+q^2 \approx \text{const}$) и приближенное движение по Пуансо, вообще говоря, из них не будет следовать даже за время, в течение которого прецессией M можно пренебречь. Здесь рассматриваются случаи, когда конечное отклонение от движения по Пуансо действительно имеет место.

1. Уравнения движения и оценка точности. Будем рассматривать «быстрое» вращение, вводя малый параметр ε так, что за время $t \sim 1$ тело совершает $\sim 1/\varepsilon$ оборотов. Обозначим p/ε, q/ε, r/ε проекции абсолютной угловой скорости тела на главные оси инерции относительно неподвижной точки. Тогда уравнения движения симметричного тела можно записать в виде (см., например, [3])

$$\varepsilon\frac{dp}{dt} = \alpha qr - \varepsilon^2\zeta\gamma', \quad \varepsilon\frac{dq}{dt} = -\alpha pr + \varepsilon^2[\zeta\gamma - (1-\alpha)\xi\gamma'']$$
$$\varepsilon\frac{dr}{dt} = \varepsilon^2\xi\gamma', \quad \varepsilon\frac{d\gamma}{dt} = r\gamma' - q\gamma'', \quad \varepsilon\frac{d\gamma'}{dt} = p\gamma'' - r\gamma \tag{1.1}$$
$$\varepsilon\frac{d\gamma''}{dt} = q\gamma - p\gamma'$$

где $\gamma, \gamma', \gamma''$ — направляющие косинусы вертикали относительно этих осей; постоянная α связана с главными моментами инерции A, B, C соотношением $A = B = C/(1-\alpha)$; постоянные ξ и ζ пропорциональны отклонениям центра масс от оси симметрии и экваториальной плоскости эллипсоида инерции соответственно.

Начальные условия для (1.1) должны быть подчинены требованию $p^2+q^2+r^2\sim 1$ (это условие будет, конечно, сохраняться в силу интеграла энергии).

Задачу (1.1) назовем возмущенной, а задачу

$$\varepsilon\frac{dp}{dt}=\alpha qr,\quad \varepsilon\frac{dq}{dt}=-\alpha pr,\quad \varepsilon\frac{dr}{dt}=0 \tag{1.2}$$
$$\varepsilon\frac{d\gamma}{dt}=r\gamma'-q\gamma'',\quad \varepsilon\frac{d\gamma'}{dt}=p\gamma''-r\gamma,\quad \varepsilon\frac{d\gamma''}{dt}=q\gamma-p\gamma'$$

(с теми же начальными данными) — невозмущенной. Невозмущенная задача описывается, таким образом, уравнениями эйлеровского движения по инерции.

Будем рассматривать задачу (1.1), руководствуясь общим соображением теории возмущений, состоящим в попытке выбрать замену переменных, близкую к тождественной (т. е. положить

$$p_*=p+\varepsilon f_1(p,\ldots,\gamma,\ldots)+\ldots+\varepsilon^k f_k(p,\ldots;\gamma,\ldots),\ldots) \tag{1.3}$$

так, чтобы уравнения (1.1) в новых переменных $p_*,\ldots,\gamma_*,\ldots$ имели возможно более простой вид — с точностью $\sim\varepsilon^{k+1}$.

Оценки точности в данной работе опираются на следующий простой факт.

Теорема. Пусть относительно возмущенной системы специального вида

$$\varepsilon\frac{d\varphi_\nu}{dt}=i\lambda_\nu\varphi_\nu+\varepsilon^m F_\nu(\lambda,\varphi,\varepsilon),\quad \varepsilon\frac{d\lambda_\mu}{dt}=\varepsilon^m G_\mu(\lambda,\varphi,\varepsilon) \tag{1.4}$$
$$\nu=1,\ldots,l,\ i^2=-1,\ \mu=1,\ldots,l,\ldots,n$$

известно, что ее решение $\varphi_\nu(t,\varepsilon)$, $\lambda_\mu(t,\varepsilon)$ при некоторых начальных данных удовлетворяет условиям: 1) λ_ν действительны, 2) $\varphi_\nu(t,\varepsilon)$, $F_\nu(\lambda(t,\varepsilon),\ \varphi(t,\varepsilon),\ \varepsilon)=f_\nu(t,\varepsilon)$, $G_\mu(\lambda(t,\varepsilon),\ \varphi(t,\varepsilon),\varepsilon)=g_\mu(t,\varepsilon)$ при $0\leqslant t\leqslant C(\varepsilon)=O(1)$, (т. е. $t\lesssim 1$) ограничены постоянными, не зависящими от ε, и интегрируемы по t.

Пусть еще $\Phi_\nu(t,\varepsilon)$, $\Lambda_\mu=\text{const}$ — решение невозмущенной системы

$$\varepsilon\frac{d\Phi_\nu}{dt}=i\Lambda_\nu\Phi_\nu,\quad \varepsilon\frac{d\Lambda_\mu}{dt}=0 \tag{1.5}$$

при тех же начальных данных, что и для φ_ν, λ_μ.

Тогда при $\varepsilon\to 0$

$$|\lambda_\mu-\Lambda_\mu|=O(\varepsilon^{m-1}),\quad |\varphi_\nu-\Phi_\nu|=O(\varepsilon^{m-2})$$

Доказательство следует из проверяемых подстановкой в (1.5) формул

$$\Lambda_\mu=\lambda_\mu(t,\varepsilon)-\varepsilon^{m-1}\int_0^t g_\mu(\tau,\varepsilon)\,d\tau,\quad \Phi_\nu(t,\varepsilon)=\varphi_\nu(t,\varepsilon)- \tag{1.6}$$
$$-\varepsilon^{m-2}\exp\left(\frac{i\Lambda_\nu t}{\varepsilon}\right)\int_0^t\left[i\varphi_\nu(\tau,\varepsilon)\int_0^\tau g_\nu(\xi,\varepsilon)\,d\xi+\varepsilon f_\nu(\tau,\varepsilon)\right]\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{i\Lambda_\nu\tau}{\varepsilon}\right)d\tau$$

Замечание 1.1. Для больших $t\lesssim 1/\varepsilon^k$ оценку можно получить аналогично. В данной работе всюду ограничиваемся временем $0\leqslant t\lesssim 1$.

Формулы (1.6) показывают, что общая погрешность приближения $\varphi_\nu = \Phi_\nu$, $\lambda_\mu = \Lambda_\mu$ — величина порядка ε^{m-2}; она мала, вообще говоря, только если $m > 2$. Конечно, если $G_\nu = O(\varepsilon)$, то погрешность мала и при $m = 2$. Отметим, что при $m = 2$ первые интегралы невозмущенной системы представляют собой приближенные интегралы возмущенной системы.

Обращаясь к уравнениям (1.1), (1.2), положим

$$\begin{aligned}(1.7)\qquad & \varkappa = p\gamma + q\gamma' + (1-\alpha)\, r\gamma'', \quad \varphi_{1,2} = q \pm ip\\ & \varphi_{3,4} = -k^2\gamma'' + (1-\alpha)\, r\varkappa \pm ik\,(q\gamma - p\gamma'), \quad k^2 = p^2 + \\ & + q^2 + (1-\alpha)^2 r^2\end{aligned}$$

и при условии

$$(1.8)\qquad \omega^2 = p^2 + q^2 \sim 1$$

($\omega = 0$ — особая точка для замены (1.7)) перейдем к новым переменным αr, $\varkappa$, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4. Эйлеровская задача (1.2) примет вид

$$\begin{aligned}(1.9)\qquad & \varepsilon\frac{d\alpha r}{dt} = 0, \quad \varepsilon\frac{d\varkappa}{dt} = 0, \quad \varepsilon\frac{d\varphi_1}{dt} = i\alpha r\varphi_1, \quad \varepsilon\frac{d\varphi_2}{dt} = -i\alpha r\varphi_2\\ & \varepsilon\frac{d\varphi_3}{dt} = ik\varphi_3, \quad \varepsilon\frac{d\varphi_4}{dt} = -ik\varphi_4, \quad \varepsilon\frac{dk}{dt} = 0\end{aligned}$$

(k — дополнительная, вспомогательная переменная), т. е. вид (1.5), а возмущенная система (1.1) примет соответственно вид (1.4), причем $m = 2$.

Продолжая рассматривать случай (1.8) и руководствуясь приведенной выше оценкой, можно сделать два вывода: 1) за время $t \lesssim 1$ близость к начальному эйлеровскому движению (т. е. к движению за время $t \lesssim \varepsilon$), вообще говоря, не может быть гарантирована; 2) если найдется замена (1.3), такая, что в новых переменных $m \geqslant 3$, или хотя бы в уравнениях для $\lambda_{1,2} = \pm\alpha r$, $\lambda_{3,4} = \pm k$, возмущение будет $\leqslant \varepsilon^3$, то движение останется близким к эйлеровскому движению по инерции при $t \lesssim 1$. Условие (1.8) будет выполняться, если оно выполнено в начальный момент, ибо $\omega = \mathrm{const}$ — интеграл эйлеровского движения (напомним, что $A = B$ и $d\omega/dt = 0$ в силу (1.2)).

Прежде всего выясним, когда такая замена существует, и сосредоточим затем внимание на случаях, когда такая замена невозможна (0 случае, когда величина ω^2 мала, см. замечание 5.2).

Предварительно изложим формализм теории возмущений, которым будем пользоваться.

2. Формализм теории возмущений. Используем модификацию формализма работы [4], который основан на преобразованиях Ли. Отличие его от процедуры Деприи — Хори состоит в применении формулы Хаусдорфа, что, по мнению авторов, упрощает вычисления. Ограничиваемся чисто формальным изложением, имея в виду, во-первых, что все разложения по малому параметру предполагаются доведенными лишь до фиксированного порядка, и, во-вторых, что близость решения получаемой приближенной системы уравнений к точному решению должна устанавливаться после ее исследования.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$(2.1)\qquad \varepsilon\frac{dx_j}{dt}=f_{j0}(x)+\varepsilon f_{j1}(x)+\ldots\quad (j=1,\ldots,n;\quad x=\{x_1,\ldots,x_n\})$$

и эквивалентное ей уравнение первого порядка с частными производными

$$(2.2)\qquad \varepsilon\frac{\partial F(t,x)}{\partial t}=LF\equiv(L_0+\varepsilon L_1+\varepsilon^2L_2+\ldots)F(t,x)$$

$$L_i=\sum_{j=1}^{n}f_{ji}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\quad (i=0,1,\ldots)$$

где L_i — линейные дифференциальные операторы первого порядка (так что для L система (2.1) характеристическая).

Все входящие в рассмотрение функции предполагаются ограниченными и достаточно гладкими в некоторой области D изменения переменных x. Введем новые переменные x_* по формуле

$$(2.3)\qquad x_*=e^Mx,\quad M=\sum_{j=1}^{n}\mu_j(x,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial x_j}$$

где M — некоторый оператор первого порядка. Можно показать (см. [4]), что в новых переменных уравнение (2.2) запишется в виде

$$(2.4)\qquad \varepsilon\frac{\partial F(t,x)}{\partial t}=XF(t,x)\equiv e^{-M}Le^MF(t,x)$$

Здесь и далее звездочки при x для краткости опущены. В связи с этим следует помнить, что для возврата к старым переменным нужно применить обратное преобразование e^{-M}.

Пусть замена переменных близка к тождественной

$$(2.5)\qquad M=\varepsilon M_1+\varepsilon^2M_2+\ldots$$

где M_i не зависит от ε.

Пользуясь формулой Хаусдорфа

$$e^{-M}Le^M=L+[LM]+\frac{1}{2!}[[LM]M]+\ldots$$

где $[AB]=AB-BA$ — коммутатор, получим уравнение (2.4) в виде, аналогичном (2.2)

$$(2.6)\qquad \varepsilon\frac{\partial F(t,x)}{\partial t}=XF(t,x)=(X_0+\varepsilon X_1+\varepsilon^2X_2+\ldots)F(t,x)$$

$$X_0=L_0,\quad X_1=[L_0M_1]+L_1,\quad X_2=[L_0M_2]+[L_1M_1]+ +{}^1/_2\,[[L_0M_1]M_1]+L_2$$

Формулы для X_i имеют рекуррентный характер

$$(2.7)\qquad X_i=[L_0M_i]+N_i$$

где N_i — известный оператор, если заданы $M_1,\ldots,M_{i-1}$.

Выбором (2.5), т. е. выбором M_i, можно попытаться упростить уравнение (2.6) по сравнению с (2.2).

Возникает вопрос о возможно более простых свойствах X_i.

Ответ подсказывает следующая алгебраическая аналогия. Пусть L, M — квадратные матрицы. Если L_0 — диагональная (или приводимая к диагональной) матрица, то простая выкладка показывает, что выбором M_i (при произвольной, наперед заданной матрице N_i) можно добиться лишь свойства $[L_0 X_i] = 0$. В общем случае (L_0 — жорданова или приводимая к жордановой матрица) можно получить $[L_0[L_0[L_0 \ldots [L_0 X_i]]]] = 0$, где степень коммутации зависит от максимального размера жордановой клетки в L_0.

Введем оператор l_0, действующий на операторы первого порядка (N) по формуле $l_0 N = [L_0 N]$, и, руководствуясь приведенной аналогией, будем считать по определению, что самое простое свойство, которое можно требовать от X_i, есть

(2.8) $$l_0^\nu X_i \equiv [L_0[L_0 \ldots [L_0 X_i]]] = 0$$

Укажем здесь только достаточное условие, при котором можно удовлетворить (2.8). Пусть оператор N_i таков, что

(2.9) $$\omega_\nu(x)\, l_0^\nu N_i + \omega_{\nu+1}(x)\, l_0^{\nu+1} N_i + \ldots + \omega_k(x)\, l_0^k N_i = 0$$

где $\nu \geqslant 0$, функции $\omega_s(x)$ $(s = \nu, \ldots, k)$ — инварианты оператора L_0: $L_0\omega_s = 0$ и $\omega_\nu(x)$ не обращаются в нуль ни в одной точке области D. Тогда (2.8) можно удовлетворить

(2.10) $$M_i = \sum_{j=1}^{k-\nu} \frac{\omega_{\nu+j}}{\omega_\nu} l_0^{j-1} N_i, \quad X_i = \sum_{j=0}^{k-\nu} \frac{\omega_{\nu+j}}{\omega_\nu} l_0^j N_i$$

В частности, при $\nu = 0$ получим $X_i = 0$. Равенство (2.9) будем называть коммутационным соотношением для N_i.

Пользуясь тождеством Якоби $l_0[AB] = [l_0 A, B] + [A, l_0 B]$, можно доказать следующую простую теорему. Если каждый из операторов L_i удовлетворяет некоторому коммутационному соотношению с постоянными коэффициентами, то коммутационное соотношение найдется и для каждого из операторов

$$N_1 = L_1, \ N_2 = [L_1 M_1] + {}^1/_2[[L_0 M_1]\, M_1] + L_2, \ \ldots$$

входящих в (2.7), и, следовательно, задача (2.8) разрешима в любом порядке.

3. Случай произвольных начальных условий. Для системы (1.1) имеем

(3.1) $$L_0 = \alpha r\left(q\frac{\partial}{\partial p} - p\frac{\partial}{\partial q}\right) + (r\gamma' - q\gamma'')\frac{\partial}{\partial \gamma} + (p\gamma'' - r\gamma)\frac{\partial}{\partial \gamma'} + (q\gamma - p\gamma')\frac{\partial}{\partial \gamma''}$$

$$L_1 = 0, \quad L_2 = \xi\left\{-(1-\alpha)\gamma''\frac{\partial}{\partial q} + \gamma'\frac{\partial}{\partial r}\right\} + \zeta\left(-\gamma'\frac{\partial}{\partial p} + \gamma\frac{\partial}{\partial q}\right)$$

Положим $M_1 = 0$, получим $X_1 = 0$, $X_2 = [L_0 M_2] + L_2$.

Если найдется такой оператор M_2, при котором $X_2 = 0$, то система (1.1) будет приведена к эйлеровской с точностью $\sim\varepsilon^3$ и, согласно оценке, приведенной в п. 1, движение останется близким к начальному эйлеровскому за время $t \lesssim 1$. Напомним, однако, что для этого достаточно, чтобы было только $\varepsilon d\lambda_\nu^*/dt = O(\varepsilon^3)$. Следовательно, движение останется близким к невозмущенному, если можно получить $X_2 r = 0$, $X_2 k = 0$ (так как в рассматриваемой задаче $\lambda_{1,2} = \pm\alpha r$, $\lambda_{3,4} = \pm k$, см. (1.9)).

В силу (3.1) имеем

$$X_2 r = L_0 M_2 r + \xi\gamma', \quad X_2 \frac{k^2}{2} = L_0 M_2 \frac{k^2}{2} + L_0\{(1-\alpha)\xi\gamma + \zeta\gamma''\} - $$
$$-\alpha(1-\alpha)\xi r\gamma'$$

Если величина γ' представима в виде $L_0 f$, выбором $M_2 r$, $M_2 k^2/2$ добьемся равенств $X_2 r = 0$, $X_2 k = 0$. Легко вычислить

$$L_0^2\gamma' = -2\alpha r L_0\gamma - (k^2 - \alpha^2 r^2)\gamma' + \frac{\varkappa}{\alpha r} L_0 p$$

Отсюда видно, что при $\alpha r \neq 0$, $k^2 - \alpha^2 r^2 \neq 0$ величина γ' представима в виде $L_0 f$.

Исключая из рассмотрения случай полной кинетической симметрии $\alpha = 0$, приходим к выводу, что за время $t \leqslant 1$ движение тела остается близким к начальному эйлеровскому движению при всех начальных данных ($\omega \neq 0$), кроме, может быть, двух случаев, а именно: 1) когда в начальный момент величина r мала, и 2) когда величина $k^2 - \alpha^2 r^2$ мала при $t = 0$.

Это случаи резонансов в эйлеровском движении (1.9) (см., например, [1, 2]).

4. Первый случай. Пусть величина r в начальный момент мала (так что $\omega^2 = p^2 + q^2 \sim 1$). Заменив в (1.1) r на εr, имеем систему

$$\varepsilon\frac{dp}{dt} = \varepsilon\alpha q r - \varepsilon^2\zeta\gamma', \quad \varepsilon\frac{dq}{dt} = -\varepsilon\alpha r p + \varepsilon^2[\zeta\gamma - (1-\alpha)\xi\gamma''] \tag{4.1}$$
$$\varepsilon\frac{dr}{dt} = \varepsilon\xi\gamma' \quad \varepsilon\frac{d\gamma}{dt} = -q\gamma'' + \varepsilon r\gamma', \quad \varepsilon\frac{d\gamma'}{dt} = p\gamma'' - \varepsilon r\gamma$$
$$\varepsilon\frac{d\gamma''}{dt} = q\gamma - p\gamma'$$

Вычисления удобно проводить перейдя к переменным

$$p,\ q,\ r,\ \gamma'',\ u = p\gamma + q\gamma',\ v = q\gamma - p\gamma' \tag{4.2}$$

в которых L_0 имеет вид $L_0 = v\partial/\partial\gamma'' - \omega^2\gamma''\partial/\partial v$ (p, q, r, u, $v^2 + \omega^2\gamma''^2$ — пять инвариантов невозмущенной задачи).

Оператор L_1 удовлетворяет коммутационному соотношению

$$\omega^2 l_0 L_1 + l_0^3 L_1 = 0 \quad (L_0\omega^2 = 0) \tag{4.3}$$

Полагая $M_1 = \omega^{-2} l_0 L_1$, получим, согласно (4.3), (2.10), X_1. В переменных (4.2)

$$X_1 = \alpha r\left(q\frac{\partial}{\partial p} - p\frac{\partial}{\partial q}\right) + \frac{\xi}{\omega^2} q u \frac{\partial}{\partial r}, \quad l_0 X_1 = 0 \tag{4.4}$$

Не находя пока X_2, выпишем обыкновенную систему, отвечающую (2.6)

$$\varepsilon\frac{dp}{dt} = \varepsilon\alpha r q + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon\frac{dq}{dt} = -\varepsilon\alpha r p + O(\varepsilon^2),$$
$$\varepsilon\frac{dr}{dt} = \varepsilon\frac{\xi}{\omega^2} q u + O(\varepsilon^2)$$
$$\varepsilon\frac{du}{dt} = O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon\frac{dv}{dt} = -\omega^2\gamma'' + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon\frac{d\gamma''}{dt} = v + O(\varepsilon^2)$$

Очевидно, что для определения p, q, r, u с точностью $\sim\varepsilon$ на временах $t \lesssim 1$ в уравнениях для этих переменных члены $O(\varepsilon^2)$ можно отбросить. Что касается v и γ'', то, полагая $\varphi_{1,2} = v \pm i\omega\gamma''$, получим

$$\varepsilon \frac{d\varphi_1}{dt} = i\omega\varphi_1 + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \frac{d\varphi_2}{dt} = -i\omega\varphi_2 + O(\varepsilon^2),$$

$$\varepsilon \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon^2 X_2\omega + O(\varepsilon^3)$$

Рассуждая аналогично п. 1, приходим к выводу, что если достижимо равенство $X_2\omega = 0$, то при $t \lesssim 1$ члены $O(\varepsilon^2)$ можно отбросить и в этих уравнениях с погрешностью ε. Учитывая, что $L_0\omega = L_1\omega = 0$, $M_1\omega = 0$, имеем

$$X_2 \frac{\omega^2}{2} = L_0 M_2 \frac{\omega^2}{2} + L_2 \frac{\omega^2}{2}, \quad L_2 \frac{\omega^2}{2} = L_0 \{(1-\alpha)\xi\gamma + \zeta\gamma''\}$$

Полагая $M_2\omega^2/2 = -(1-\alpha)\xi\gamma - \zeta\gamma''$, получим $X_2\omega = 0$.

Итак, при $t \lesssim 1$ движение тела с точностью $\sim\varepsilon$ описывается в рассматриваемом случае системой уравнений

$$\frac{dp}{dt} = \alpha q r, \quad \frac{dq}{dt} = -\alpha r p, \quad \frac{dr}{dt} = \frac{\xi}{\omega^2} q u, \quad \frac{du}{dt} = 0, \quad \varepsilon \frac{dv}{dt} = -\omega^2\gamma'', \tag{4.5}$$

$$\varepsilon \frac{d\gamma''}{dt} = v$$

Кроме очевидных интегралов

$$\omega^2 = p^2 + q^2 = \mathrm{const}, \quad u = \mathrm{const}, \quad v^2 + \omega^2\gamma''^2 = \mathrm{const}$$

которые являются приближенными следствиями трех классических интегралов движения, система (4.5) обладает новым интегралом

$$r^2 - \frac{2\xi}{\alpha\omega^2} u p = \mathrm{const}$$

и интегрируется в квадратурах.

Отметим, что в рассмотренном приближении отклонение центра масс (ζ) от экваториальной плоскости не влияет на движение.

Замечание 4.1. Методом, изложенным в п. 3, можно получить приближения любого порядка. При этом удобно вместо операторов L_0, L_1, L_2 рассматривать операторы $\omega^{-1}L_0$, $\omega^{-1}L_1$, $\omega^{-1}L_2$ (введение множителя ω^{-1} эквивалентно замене времени). Коммутационные соотношения для $\omega^{-1}L_1$, $\omega^{-1}L_2$ окажутся при этом с постоянными коэффициентами. Нужно, конечно, помнить, что после решения приближенной системы (с исследованием точности) следует вернуться к исходным переменным с помощью преобразования e^{-M} (при точности $\sim\varepsilon$ в этом, очевидно, нет нужды).

5. Второй случай. Исследование случая, когда мала разность $k^2 - \alpha^2 r^2$, проводится аналогично предыдущему. Полагая в уравнениях (1.1)

$$r = n\omega + \varepsilon s \tag{5.1}$$

выберем постоянную n так, чтобы $k^2 - \alpha^2 r^2 \sim \varepsilon$ $(s \sim 1)$. Тогда

$$\alpha = \frac{n^2+1}{2n^2}, \quad A = B = \frac{2n^2}{n^2-1} C \quad \left(1 > \alpha > \frac{1}{2}\right) \tag{5.2}$$

Для системы (1.1) будем иметь

$$L_0 = n\omega\left\{\alpha\left(q\frac{\partial}{\partial p} - p\frac{\partial}{\partial q}\right) + \left(\gamma'\frac{\partial}{\partial\gamma} - \gamma\frac{\partial}{\partial\gamma'}\right)\right\} +$$
$$+ \gamma''\left(-q\frac{\partial}{\partial\gamma} + p\frac{\partial}{\partial\gamma'}\right) + (q\gamma - p\gamma')\frac{\partial}{\partial\gamma''}$$
$$L_1 = s\left\{\alpha\left(q\frac{\partial}{\partial p} - p\frac{\partial}{\partial q}\right) + \left(\gamma'\frac{\partial}{\partial\gamma} - \gamma\frac{\partial}{\partial\gamma'}\right)\right\} +$$
$$+ \left\{\frac{\xi}{\omega}[\omega\gamma' + n(1-\alpha)q\gamma''] - \frac{n\zeta}{\omega}(q\gamma - p\gamma')\right\}\frac{\partial}{\partial s}$$
$$L_2 = -(1-\alpha)\xi\gamma''\frac{\partial}{\partial q} - \zeta\left(\gamma'\frac{\partial}{\partial p} - \gamma\frac{\partial}{\partial q}\right)$$

Здесь удобно перейти к переменным

(5.3) $$p,\ q,\ s,\quad I = n(1-\alpha)qu + n\alpha pv - \omega q\gamma''$$
$$\varkappa = u + n(1-\alpha)\omega\gamma'',\quad I_* = n(1-\alpha)pu - n\alpha qv - \omega p\gamma''$$

где u, v — те же, что и в (4.2). Тогда

(5.4) $$L_0 = \alpha n\omega\left(q\frac{\partial}{\partial p} - p\frac{\partial}{\partial q}\right)$$

Коммутационное соотношение для L_1

$$4(n\alpha\omega)^4 l_0L_1 + 5(n\alpha\omega)^2 l_0^3L_1 + l_0^5L_1 = 0$$

Выбирая M_1 согласно (2.10), получим X_1. В переменных (5.3)

(5.5) $$X_1 = \alpha s\left(q\frac{\partial}{\partial p} - p\frac{\partial}{\partial q}\right) + \frac{s}{n^2\alpha}\left(I\frac{\partial}{\partial I_*} - I_*\frac{\partial}{\partial I}\right) - \frac{\xi}{2\omega^2 n\alpha}I\frac{\partial}{\partial s}$$

Так же, как и в предыдущем случае, при $t \lesssim 1$ в уравнениях для s, $\varkappa$, I, I_* возмущениями $\sim\varepsilon^2$ можно пренебречь, т. е. не интересоваться значениями X_2 на этих переменных. Приближенные уравнения для них, согласно (5.5), будут

(5.6) $$\frac{ds}{dt} = -\frac{\xi}{2\omega^2 n\alpha}I,\quad \frac{d\varkappa}{dt} = 0,\quad \frac{dI}{dt} = -\frac{s}{n^2\alpha}I_*,\quad \frac{dI_*}{dt} = \frac{s}{n^2\alpha}I$$

Что касается p, q, то, полагая $\varphi_1 = q + ip$, $\varphi_2 = q - ip$, из (5.4), (5.5) получим

(5.7) $$\varepsilon\frac{d\varphi_{1,2}}{dt} = \pm i\alpha(n\omega + \varepsilon s)\varphi_{1,2} + O(\varepsilon^2),\quad \varepsilon\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon^2 X_2\omega + O(\varepsilon^3)$$

Для вычисления φ_1, φ_2 с точностью ε при $t \lesssim 1$ требуется определить ω с ошибкой $\lesssim \varepsilon^2$ (см. (1.6)). Стало быть, члены $O(\varepsilon^2)$ в (5.7) можно отбросить, только если удастся получить $X_2\omega = 0$. Однако в рассматриваемом случае (в отличие от предыдущего)

$$X_2\omega = L_0M_2\omega + L_0f + \frac{1-\alpha}{2n^2\alpha^2\omega^2}\xi I$$

где последнее слагаемое является инвариантом L_0. Выбирая соответствующим образом $M_2\omega$, получим

$$X_2\omega = \frac{1-\alpha}{2n^2\alpha^2\omega^2}\xi I$$

В соответствии с этим (с нужной точностью)

(5.8) $$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon(1-\alpha)\frac{\xi}{2n^2\alpha^2\omega^2}I$$

Приближенные уравнения для p, q получим теперь в виде

(5.9) $$\varepsilon \frac{dp}{dt} = \alpha (n\Omega + \varepsilon s) q, \quad \varepsilon \frac{dq}{dt} = -\alpha (n\Omega + \varepsilon s) p$$

где параметр Ω определяется как решение уравнения (5.8). Видно, что (5.8) интегрируется в силу (5.6).

Итак, если в начальный момент вектор угловой скорости лежит вблизи конуса $p^2 + q^2 - r^2/n^2 = 0$, где n определено в (5.2), движение тела (с точностью до ε) за время $t \lesssim 1$ описывается системой уравнений (5.6), (5.9).

Так же, как и в предыдущем случае, кроме очевидных интегралов

$$\omega^2 = p^2 + q^2 = \text{const}, \quad \varkappa = \text{const}, \quad I^2 + I_*{}^2 = \text{const}$$

(приближенные следствия классических интегралов) система обладает новым, четвертым интегралом

$$s^2 + \frac{\xi n}{\omega^2} I_* = \text{const}$$

и интегрируется в квадратурах.

Замечание 5.1. То же, что замечание 4.1.

Замечание 5.2. Не рассмотрен случай, когда в начальный момент величина ω мала. Это случай быстрого вращения вокруг оси симметрии. Заменив в (1.1) p, q на εp, εq, этот случай можно рассмотреть совершенно аналогично предыдущим. Оказывается, что за время $t \lesssim 1$ движение остается близким к начальному эйлеровскому и нетривиальный эффект (прецессия тела) наблюдается только на больших временах ($t \sim 1/\varepsilon$).

6. Геометрическая интерпретация движения. В рассмотренных случаях можно дать геометрическую интерпретацию движения тела, подобную той, которая была дана Н. Б. Делоне [5] для случая С. В. Ковалевской.

Первый случай. Отметим, прежде всего, что проекция Q мгновенной угловой скорости тела на вертикаль есть

$$Q = \frac{p}{\varepsilon}\gamma + \frac{q}{\varepsilon}\gamma' + r\gamma'' = \frac{u}{\varepsilon} + r\gamma''$$

Ограничимся рассмотрением случая, когда в начальный момент $u \sim 1$. В этом случае $u = \text{const}$ (с точностью $\sim\varepsilon$). Таким образом, конец вектора мгновенной угловой скорости движется по горизонтальной плоскости, совершающей вдоль вертикали колебания, амплитуда которых много меньше среднего расстояния от этой плоскости до точки закрепления тела. Последнее означает, что в принятом приближении эту плоскость можно считать неподвижной.

Далее, в силу интеграла (с точностью $\sim\varepsilon$)

(6.1) $$\omega^2 = p^2 + q^2 = \text{const}$$

конец вектора мгновенной угловой скорости движется по цилиндру, жестко связанному с телом.

В силу же интеграла

(6.2) $$r^2 - \frac{2\xi}{\alpha\omega^2} up = \text{const}$$

конец вектора мгновенной угловой скорости движется по параболическому цилиндру.

Направляющей кривой для подвижного аксоида является, таким образом, кривая Г, образованная пересечением параболического (6.2) и кругового (6.1) цилиндров.

Движение тела в принятом приближении представляется качением кривой Г (жестко с ним связанной) по неподвижной горизонтальной плоскости.

В силу «узости» параболического цилиндра по сравнению с круговым смысл данной интерпретации сводится к следующему. Тело почти равномерно вращается вокруг вертикали ($Q = \text{const}$), совершает почти гармонические нутационные колебания (см. два последних уравнения (4.6)) и вращается вокруг оси симметрии подобно маятнику (см. уравнения для r, p, q (4.6)). В этом и состоит отклонение от движения по инерции.

Второй случай. В этом случае дадим геометрическую интерпретацию не непосредственно изучаемому движению, а движению цилиндра (H), который вращается в теле вокруг их общей оси симметрии с угловой скоростью $-k/\varepsilon$ (см. (1.7), (5.1)). При движении по инерции в рассматриваемом случае абсолютная угловая скорость (Ω_H) цилиндра H постоянна и пропорциональна вектору кинетического момента с коэффициентом пропорциональности $1/A$.

Пользуясь (5.6), (5.8), (5.9), (5.1), вычислим Ω_H с учетом силы тяжести. Проекции Ω_H на оси системы координат, вращающейся вместе с цилиндром (по оси симметрии направлена третья ось), при соответствующем выборе начального положения экваториальных осей равны (с выписанной точностью)

$$\frac{I_*}{\varepsilon h},\quad \frac{I}{\varepsilon h},\quad R = \frac{(1-\alpha)n\omega}{\varepsilon} + \frac{2-\alpha}{\alpha n^2}s + \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha}s_0,\quad h = \text{const}$$

Таким образом, для движения цилиндра H получаем интерпретацию, аналогичную данной для первого случая.

В силу интеграла $\varkappa = \text{const}$ конец вектора мгновенной угловой скорости цилиндра движется по горизонтальной плоскости, неподвижной в рассмотренном приближении.

В силу интегралов

$$I^2 + I_*^2 = \omega^2 h^2 = \text{const} \tag{6.3}$$

$$\frac{(2-\alpha)^2}{\alpha^2}\frac{\xi}{n^3\omega^2}I_* + \left(R - \frac{(1-\alpha)n\omega}{\varepsilon} - \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha}s_0\right)^2 = \text{const} \tag{6.4}$$

направляющей кривой подвижного аксоида служит линия пересечения кругового (6.3) и параболического (6.4) цилиндров.

Как и в первом случае, эффект силы тяжести состоит в том, что появляется маятниковое движение тела вокруг оси симметрии.

Авторы благодарны В. В. Румянцеву, Ю. А. Архангельскому и А. Я. Повзнеру за обсуждение результатов работы.

Поступила 20 VIII 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В. И.* Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. Успехи матем. наук, 1963, т. 18, вып. 5.
2. *Козлов В. В.* Новые периодические решения в задаче о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. ПММ, 1975, т. 39, вып. 3.
3. *Голубев В. В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М., Гостехиздат, 1953.
4. *Povzner A.* Linear methods in problems of nonlinear differential equations with a small parameter. Internat. J. Nonlinear Mech., 1974, vol. 9, No. 4, p. 279—323.
5. *Делоне Н. Б.* К вопросу о геометрическом истолковании интегралов движения твердого тела около неподвижной точки, данных С. В. Ковалевской. Матем. сб., 1891, 16, вып. 2.