Прикладная математика и механика. Том 44, вып. 6, 1980

УДК 531.38

УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОМЕРНЫХ ВРАЩЕНИЙ ТЯЖЕЛОГО ГИРОСТАТА ВОКРУГ ГЛАВНОЙ ОСИ

А. М. Ковалев

(Донецк)

С помощью теоремы Арнольда — Мозера [1,2], распространенной на стационарные движения [3,4], исследуется устойчивость равномерных вращений гиростата вокруг главной оси. Показано, что равномерные вращения устойчивы для всех значений параметров, принадлежащих области выполнения необходимых условий устойчивости, за исключением некоторого многообразия меньшей размерности.

Достаточные условия устойчивости равномерных вращений гиростата вокруг главной оси с произвольной угловой скоростью получены В. В. Румянцевым [5]. Случай, когда гиростат может вращаться вокруг главной оси только с некоторой фиксированной скоростью, разобран в работе [6]. Достаточные условия устойчивости равномерных вращений гиростата вокруг произвольной оси конуса осей равномерного вращения получены в [7,8], в работе [8] указаны также и необходимые условия устойчивости.

1. Равномерные вращения гиростата вокруг главной оси. Оси, вокруг которых гиростат может вращаться с постоянной скоростью, образуют в неизменно связанном с ним пространстве конус, указанный П. В. Харламовым [9]. Из анализа направляющей линии этого конуса — геометрического места концов векторов угловой скорости равномерного вращения — следует, что равномерное вращение гиростата вокруг главной оси с произвольной угловой скоростью ω возможно лишь при условии, что эта ось несет центр масс и по этой оси направлен вектор гиростатического момента λ. Изучим устойчивость таких движений относительно проекций угловой скорости ω_1, ω_2, ω_3 и вектора вертикали ν_1, ν_2, ν_3 на подвижные оси.

Движение гиростата будем описывать уравнениями Гамильтона. В предположении, что центр масс гиростата лежит на первой главной оси и по этой же оси направлен вектор гиростатического момента, функция Гамильтона для гиростата [10] принимает вид

$$H=\frac{1}{2\sin^2\theta}\{a_1[(p_\psi-p_\varphi\cos\theta)\sin\varphi+p_\theta\cos\varphi\sin\theta-\lambda'\sin\theta]^2+ \\ +a_2[(p_\psi-p_\varphi\cos\theta)\cos\varphi-p_\theta\sin\varphi\sin\theta]^2+\frac{a_3p_\varphi^2}{2}+\Gamma e\sin\varphi\sin\theta \tag{1.1}$$

Здесь a_1, a_2, a_3 — компоненты гирационного тензора, Γ — произведение веса гиростата и расстояния центра масс до неподвижной точки, λ', e — проекции на первую ось соответственно вектора гиростатического момента и единичного вектора, направленного из неподвижной точки в центр масс гиростата.

Чтобы избежать появления особенности в уравнениях возмущенного движения, следуя работе [3], изучаемое равномерное вращение гиростата с угловой скорстью ω' определим следующими значениями переменных:

$$(1.2)\qquad p_\theta = 0,\quad p_\varphi = 0,\quad p_\psi = \frac{\omega'}{a_1} + \lambda',\quad \theta = \frac{\pi}{2},\quad \varphi = \frac{\pi}{2},$$
$$\psi = \omega' t + \psi_0$$

Равномерное вращение, определенное равенством (1.2), является стационарным движением механической системы с гамильтонианом (1.1), и, поскольку приведенная система в данном случае двумерна, для исследования его устойчивости применим теорему Арнольда — Мозера, распространенную на стационарные движения [3]. Отметим, что исследование на устойчивость равномерных вращений относительно ω_1, ω_2, ω_3, ν_1, ν_2, ν_3 эквивалентно исследованию на устойчивость соответствующих стационарных движений относительно p_θ, p_φ, p_ψ, θ, φ.

2. Разложение функции Гамильтона в окрестности равномерного вращения. Перейдем к безразмерным переменным x_1, x_2, y_1, y_2 и безразмерному времени τ, полагая

$$(p_\theta, p_\varphi) = \sqrt{\Gamma / a_1}\,(x_1, x_2),\quad \left(\theta - \frac{\pi}{2},\ \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = (y_1, y_2),$$
$$\tau = t\sqrt{a_1\Gamma}$$

Уравнения возмущенного движения приведенной системы в безразмерном виде таковы (точка означает дифференцирование по τ)

$$(2.1)\qquad x_1^\bullet = -\frac{\partial H}{\partial y_1},\quad x_2^\bullet = -\frac{\partial H}{\partial y_2},\quad y_1^\bullet = \frac{\partial H}{\partial x_1},\quad y_2^\bullet = \frac{\partial H}{\partial x_2}$$
$$H = H_2 + H_4 + \ldots$$
$$2H_2 = ax_1^2 + bx_2^2 + (\omega^2 + \omega\lambda - e)\,y_1^2 + \{(\omega + \lambda)\times$$
$$\times\,[a(\omega + \lambda) - \omega] + - e\}\,y_2^2 + 2\,[a(\omega + \lambda) - \omega]\,x_1y_2 + 2\omega x_2y_1$$
$$24\,H_4 = (3\lambda^2 + 11\lambda\omega + 8\omega^2 + e)\,y_1^4 + [(\omega + \lambda)\,(4\omega +$$
$$+ 3\lambda - 4a(\omega + \lambda)) + e]\,y_2^4 + 6\,[(\omega + \lambda)\,(-2\omega - \lambda +$$
$$+ 2a(\omega + \lambda)) + e]\,y_1^2y_2^2 + 12\,(1 - a)\,x_1^2y_2^2 +$$
$$+ 12x_2^2y_1^2 + 4\,[4\omega + 3\lambda - 4a(\omega + \lambda)]\,x_1y_2^3 + 4\,(5\omega +$$
$$+ 3\lambda)\,x_2y_1^3 + 12\,(a - 1)\,(\omega + \lambda)\,x_1y_1^2y_2 + 12\,[-2\omega -$$
$$- \lambda + 2a(\omega + \lambda)]\,x_2y_1y_2^2 + 24\,(a - 1)\,x_1x_2y_1y_2$$
$$a = \frac{a_2}{a_1},\quad b = \frac{a_3}{a_1},\quad \omega = \frac{\omega'}{\sqrt{a_1\Gamma}},\quad \lambda = \sqrt{\frac{a_1}{\Gamma}}\,\lambda'$$

Параметры ω, λ могут принимать произвольные значения, значения параметров a, b должны удовлетворять условиям, следующим из неравенств треугольника для моментов инерции. Область C изменения параметров a, b — это область положительных значений a, b, ограниченная кривыми $a = b\,(a + 1)$, $b = a\,(b + 1)$, $a = b\,(a - 1)$ [3].

3. Необходимые условия устойчивости. Для получения необходимых условий устойчивости запишем характеристическое уравнение линеаризованной системы с функцией H_2

$$(3.1)\qquad \mu^4 + \xi_1\mu^2 + \xi_2\xi_3 = 0$$

$$\xi_1 = ab(\omega+\lambda)^2 - (a+b)(\omega+\lambda)\omega + 2\omega^2 - e(a+b)$$

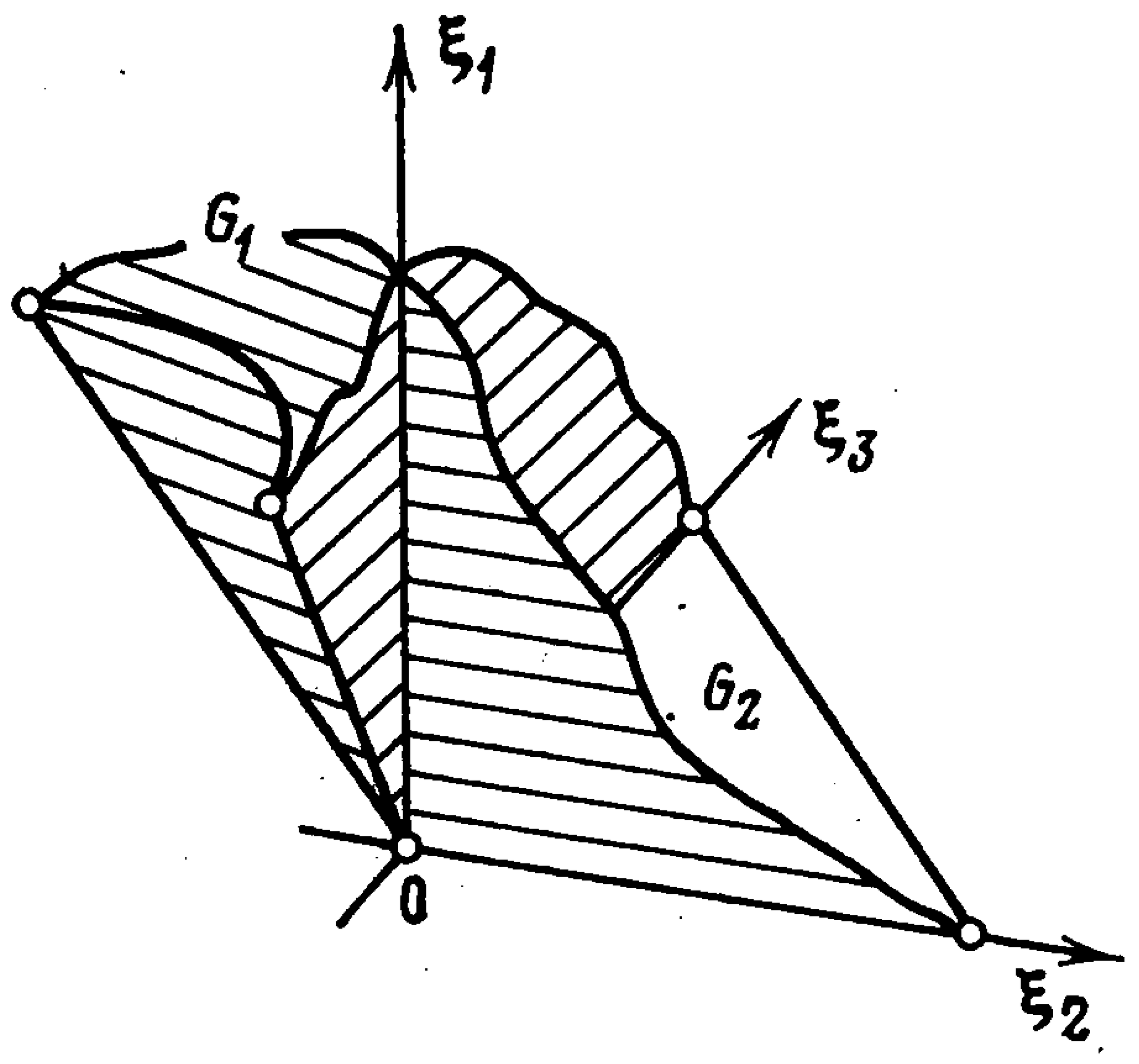
$$\xi_2 = \omega^2(a-1) + a\omega\lambda - ae,\quad \xi_3 = \omega^2(b-1) + b\omega\lambda - be$$

Необходимые условия устойчивости, следовательно, имеют вид

$$(3.2)\qquad \xi_1 > 0,\quad \xi_2\xi_3 > 0$$

$$\xi_1^2 - 4\xi_2\xi_3 = a^2b^2(\omega+\lambda)^4 - 2ab(a+b)(\omega+\lambda)^3\omega + (a+b)^2(\omega+\lambda)^2\omega^2 - 2abe(a+b)(\omega+\lambda)^2 + 2e(a+b)^2\times(\omega+\lambda)\omega + 8abe(\omega+\lambda)\omega - 8e(a+b)\omega^2 + (a-b)^2 > 0$$

В пространстве $0\,\xi_1\xi_2\xi_3$ область G выполнения необходимых условий устойчивости (3.2) состоит их двух подобластей: G_1, G_2 (фигура). Анализ области G в пространстве безразмерных параметров a, b, ω, λ представляет довольно сложную задачу. Однако можно утверждать, что в отличие от случая твердого тела [3] условия (3.2) выполнены для всех точек области C, правда, при соответствующем выборе величины λ.



4. Достаточные условия устойчивости. В области G_2 квадратичная форма H_2 в разложении (2.1) знакоопределенная. Это позволяет применить теорему Рауса с дополнением Ляпунова и утверждать, что соответствующие области G_2 равномерные вращения устойчивы. В этой области достаточные условия устойчивости $\xi_2 > 0$, $\xi_3 > 0$ совпадают с полученными в работе [5].

В области G_1 квадратичная форма H_2 знакопеременная. Обозначим корни характеристического уравнения (3.1) через $\pm i\alpha_1$, $\pm i\alpha_2$ ($\alpha_1 > \alpha_2 > 0$) и запишем каноническое преобразование, приводящее гамильтониан (2.1) к виду

$$(4.1)\qquad H' = -i\alpha_1 p_1 q_1 + i\alpha_2 p_2 q_2 + \sum_{\nu_1+\ldots+\nu_4=4} h_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} p_1^{\nu_1} q_1^{\nu_2} p_2^{\nu_3} q_2^{\nu_4} + \ldots$$

Получаем

$$x_1 = is_1(p_1 - q_1) + ic_1(q_2 - p_2),\quad y_1 = s_3(p_1 + q_1) + c_3(q_2 + p_2)$$

$$x_2 = s_2(p_1 + q_1) + c_2(q_2 + p_2),\ y_2 = is_4(p_1 - q_1) + ic_4(q_2 - p_2)$$

$$s_1 = \alpha_1\{\alpha_1^2 - [a(\omega+\lambda) - \omega][b(\omega+\lambda) - \omega] + be\}w$$

$$s_2 = \{(\omega^2 - \alpha_1^2)[a(w+\lambda) - \omega] - a\omega e\}w$$

$$s_3 = \{a\alpha_1^2 - b\omega[a(\omega+\lambda) - \omega] + abe\}w$$

$$s_4 = \alpha_1[ab(\omega+\lambda) - \omega(a+b)]w$$

$$w^2 = \alpha_2\{a\alpha_1^2 - b\omega[a(\omega+\lambda) - \omega] + abe\}^{-1}$$

Формулы для c_1, c_2, c_3, c_4 находятся из выражений для s_1, s_2, s_3, s_4 заменой α_1 на α_2 и α_2 на α_1.

Для решения вопроса об устойчивости изучаемых движений необходимо вычислить детерминант

$$D = -(\beta_{11}\alpha_2^2 + 2\beta_{12}\alpha_1\alpha_2 + \beta_{22}\alpha_1^2) \tag{4.2}$$

Коэффициенты β_{11}, β_{22}, β_{12} равны коэффициентам при $p_1^2q_1^2$, $p_2^2q_2^2$, $2p_1q_1p_2q_2$ в форме $2iH'$, где гамильтониан H' определен выражением (4.1). Имеем

$$\begin{aligned}
2\alpha_1\alpha_2(\alpha_1^2-\alpha_2^2)\beta_{11} = {}& {}^1/_2[3\lambda^2+11\lambda\omega+8\omega^2+e]s_3^4+2(5\omega+\\
&+3\lambda)s_2s_3^3+{}^1/_2[(\omega+\lambda)(4\omega+3\lambda-4a(\omega+\lambda))+e]s_4^4+\\
&+2(4\omega+3\lambda-4a(\omega+\lambda))s_1s_4^3+[(\omega+\lambda)(-2\omega-\lambda+\\
&+2a(\omega+\lambda))+e]s_3^2s_4^2+6(1-a)s_1^2s_4^2+6s_2^2s_3^2+\\
&+2(\omega+\lambda)(a-1)s_1s_4s_3^2+2(-2\omega-\lambda+2a(\omega+\\
&+\lambda))s_2s_3s_4^2+4(a-1)s_1s_2s_3s_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\alpha_1\alpha_2(\alpha_1^2-\alpha_2^2)\beta_{12} = {}& {}^1/_2[3\lambda^2+11\lambda\omega+8\omega^2+e]s_3^2c_3^2+\\
&+(s_3c_2+c_3s_2)^2+{}^1/_2[(\omega+\lambda)(-2\omega-\lambda+2a(\omega+\lambda))+\\
&+e](s_3^2c_4^2+c_3^2s_4^2)+2s_2s_3c_2c_3+{}^1/_2[(\omega+\lambda)(4\omega+3\lambda-\\
&-4a(\omega+\lambda))+e]s_4^2c_4^2+(1-a)((s_4c_1+s_1c_4)^2+\\
&+2s_1s_4c_1c_4)+(4\omega+3\lambda-4a(\omega+\lambda))(s_1c_4+s_4c_1)s_4c_4+\\
&+(5\omega+3\lambda)(s_2c_3+s_3c_2)s_3c_3+(a-1)(\omega+\lambda)(s_1s_4c_3^2+\\
&+c_1c_4s_3^2)+(-2\omega-\lambda+2a(\omega+\lambda))(s_2s_3c_4^2+c_2c_3s_4^2)+\\
&+2(a-1)(s_2s_3c_1c_4+s_1s_4c_2c_3)
\end{aligned}$$

Выражение для β_{22} следует из формулы для β_{11}, если в ней поменять местами s_k и c_k.

Детерминант (4.2) при $\lambda = 0$, $a = 1$ вычислен в работе [3], откуда следует, что $D(a, b, \lambda, \omega) \not\equiv 0$, поэтому равенство $D(a, b, \lambda, \omega) = 0$ выделяет в пространстве $0ab\lambda\omega$ некоторое многообразие. Резонансные соотношения $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2$, $\alpha_1 = 3\alpha_2$ также выделяют в пространстве $0ab\lambda\omega$ некоторые многообразия. Равномерные вращения, соответствующие выделенным многообразиям, исключаются из рассмотрения. Относительно остальных равномерных вращений, принадлежащих области G_1, на основании теоремы Арнольда — Мозера, распространенной на стационарные движения [3], заключаем, что эти движения являются устойчивыми по Ляпунову.

Таким образом доказана теорема.

Теорема. Пусть гиростат вращается равномерно вокруг главной оси, несущей центр масс, по которой направлен вектор гиростатического момента. Тогда в расширенном параметрическом пространстве $0ab\lambda\omega$ область устойчивости представляет собой область G выполнения необходимых условий устойчивости, из которой исключены многообразия, соответствующие резонансным соотношениям и условию равенства нулю детерминанта (4.2).

Сравнивая полученный результат с исследованием равномерных вращений твердого тела [3], можно утверждать, что наличие в теле ротора при соответствующем выборе его вращения оказывает на движение тела-носителя стабилизирующее влияние. Так, неустойчивые вращения тела вокруг средней главной оси можно выбором гиростатического момента сделать устойчивыми. Более того, любое равномерное вращение твердого тела можно соответствующим выбором гиростатического момента сделать устойчивым. Это следует из того, что при достаточно большом значении модуля вектора кинетического момента достаточные условия устойчивости выполнены при любом фиксированном значении вектора угловой скорости и любых значениях моментов инерции.

Поступила 26 III 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В. И.* Об устойчивости положения равновесия гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений в общем эллиптическом случае. Докл. АН СССР, 1961, т. 137, № 2.
2. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. М., «Мир», 1973.
3. *Ковалев А. М., Савченко А. Я.* Устойчивость равномерных вращений твердого тела вокруг главной оси. ПММ, 1975, т. 39, вып. 4.
4. *Савченко А. Я.* Устойчивость стационарных движений механических систем. Киев, «Наукова думка», 1977.
5. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения гиростатов. ПММ, 1961, т. 25, вып. 1.
6. *Анчев А.* Об устойчивости перманентных вращений тяжелого гиростата. ПММ, 1962, т. 26, вып. 1.
7. *Анчев А.* О перманентных вращениях тяжелого гиростата, имеющего неподвижную точку. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.
8. *Дружинин Э. И.* Устойчивость стационарных движений гиростатов. Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1966, вып. 92.
9. *Харламов П. В.* О равномерных вращениях тела, имеющего неподвижную точку. ПММ, 1965, т. 29, вып. 2.
10. *Ковалев А. М.* Сохранение интегралов движения при малом изменении функции Гамильтона в некоторых случаях интегрируемости уравнений движения гиростата. ПММ, 1971, т. 35, вып. 4.