Прикладная математика и механика. Том 44, вып. 6, 1980

УДК 531.36:534

К ТЕОРИИ ГИРОСКОПИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Ю. Н. Челноков

(Саратов)

Дана кинематическая интерпретация полученным в работе [1] прецессионным уравнениям движения гироскопического маятника относительно сопровождающего трехгранника Дарбу, а также прецессионным уравнениям движения гиромаятника относительно географического трехгранника, рассмотренным в [2, 3]. Установлены линейные дифференциальные уравнения, описывающие поведение гиромаятника при конечных углах отклонений оси ротора от вертикали для произвольного движения точки его подвеса по поверхности Земли. Эти уравнения имеют структуру кинематических уравнений сферического движения твердого тела в параметрах Родрига — Гамильтона и в случае неподвижного основания согласуются с уравнениями, установленными в работе [4].

Доказана устойчивость по Ляпунову решений как уравнений гиромаятника в конечных углах Эйлера — Крылова, так и уравнений гиромаятника в параметрах Родрига — Гамильтона. Указаны частные случаи интегрируемости в квадратурах прецессионных уравнений гиромаятника в конечных углах.

1. Движение гироскопического маятника будем рассматривать относительно естественного трехгранника Дарбу $Ox^\circ y^\circ z^\circ$ с вершиной в центре карданова подвеса, ребро z° которого нормально поверхности Земли, а ребро x° направлено по вектору $\mathbf{v}$ скорости центра подвеса [1, 5].

Исходные прецессионные уравнения движения гироскопического маятника для произвольного движения точки его подвеса по поверхности Земли имеют вид [1, 5]

$$H\omega_x' = a\,(P_x + F_x),\; H\omega_y' = a\,(P_y + F_y) \tag{1.1}$$

Здесь ω_x', ω_y' — проекции абсолютной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}'$ системы координат $Oxyz$ с началом в центре карданова подвеса и осью z, направленной по оси ротора гиромаятника, на ее же оси, H — собственный кинетический момент гироскопа; P_x, P_y и F_x, F_y — проекции равнодействующей $\mathbf{P}$ переносных сил инерции и силы тяготения $\mathbf{F}$ (эти силы проходят через центр тяжести системы «внутреннее кольцо — ротор») на оси системы координат $Oxyz$, a — расстояние от центра тяжести до начала координат O.

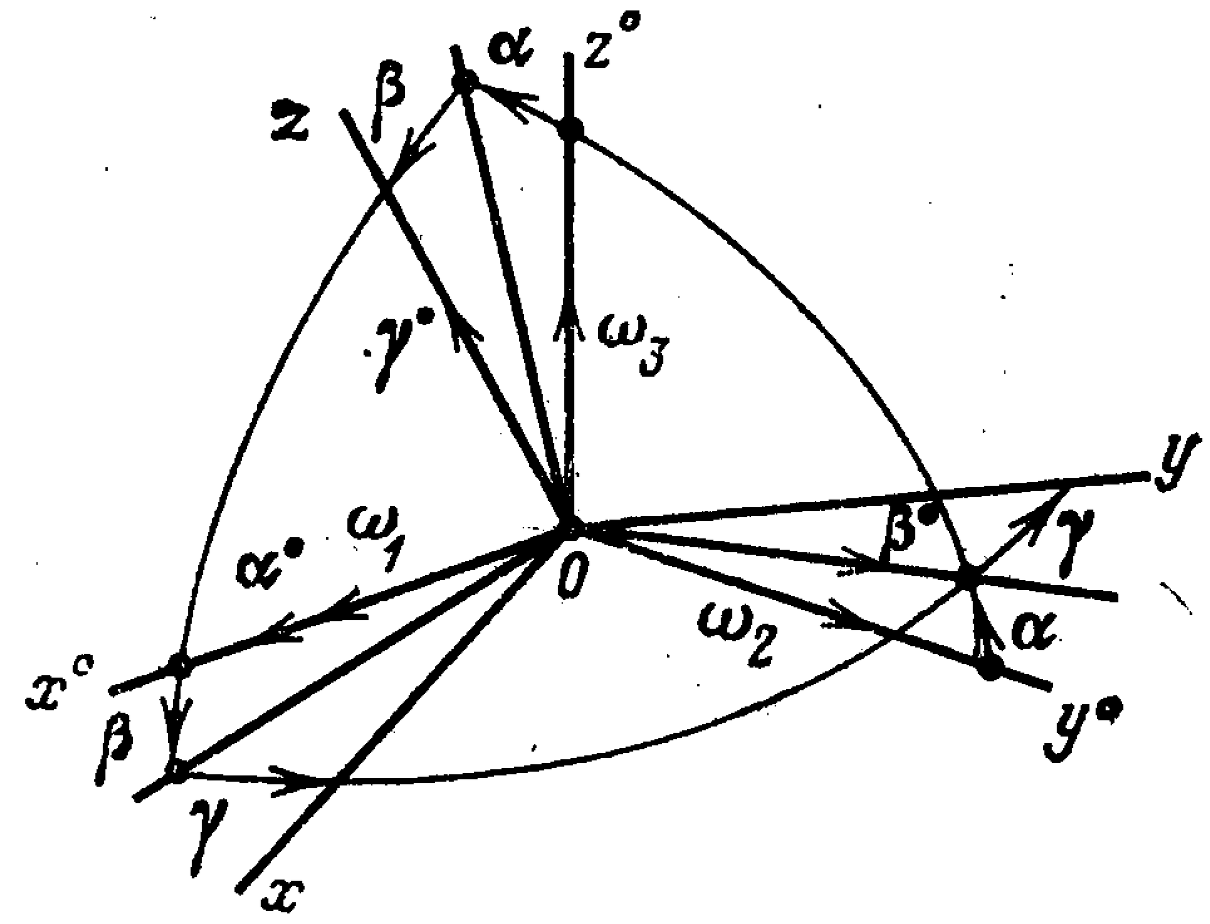
Положение системы координат $Oxyz$ относительно трехгранника $Ox^\circ y^\circ z^\circ$ определим углами α, β, γ (фиг.1). Углы α и β определяют положение оси z ротора гиромаятника по отношению к трехграннику $Ox^\circ y^\circ z^\circ$. Ниже приведены косинусы углов между осями системы координат $Oxyz$ и ребрами трехгранника $Ox^\circ y^\circ z^\circ$

(1.2)

	x°	y°	z°
x	$\cos\beta\cos\gamma$	$\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma$	$-\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma$
y	$-\cos\beta\sin\gamma$	$-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+\cos\alpha\cos\gamma$	$\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma+\sin\alpha\cos\gamma$
z	$\sin\beta$	$-\sin\alpha\cos\beta$	$\cos\alpha\cos\beta$

Обозначим через ω вектор угловой скорости вращения системы координат $Oxyz$ относительно трехгранника $Ox^\circ y^\circ z^\circ$. Проекции ω_i $(i=1,2,3)$ этого вектора на оси системы координат $Ox^\circ y^\circ z^\circ$ выражаются формулами

(1.3) $$\omega_1=\alpha^\cdot+\gamma^\cdot\sin\beta,\quad \omega_2= =\beta^\cdot\cos\alpha-\gamma^\cdot\cos\beta\sin\alpha$$
$$\omega_3=\beta^\cdot\sin\alpha+\gamma^\cdot\cos\beta\cos\alpha$$



Фиг. 1

Отсюда получаем

(1.4) $$\alpha^\cdot=\omega_1-\operatorname{tg}\beta\,(\omega_3\cos\alpha- -\omega_2\sin\alpha),\quad \beta^\cdot=\omega_2\cos\alpha+ +\omega_3\sin\alpha$$
$$\gamma^\cdot=(\omega_3\cos\alpha-\omega_2\sin\alpha)/\cos\beta$$

Движение системы координат $Oxyz$ по координате γ выберем таким, чтобы проекция ω'_z вектора ω' на ось z определялась соотношением

(1.5) $$\omega'_z=a\,(P_z+F_z)/H$$

в котором P_z и F_z — проекции векторов $\mathbf{P}$ и $\mathbf{F}$ на ось z. Скалярные соотношения (1.1), (1.5) будут тогда эквивалентны одному векторному

(1.6) $$\omega'=a\,(\mathbf{P}+\mathbf{F})\,/\,H=a\,(\mathbf{F}-m\mathbf{w})/H$$

Здесь m — суммарная масса внутреннего кольца и ротора гиромаятника, $\mathbf{w}$ — абсолютное ускорение точки подвеса гиромаятника [1, 5].

Вектор относительной угловой скорости вращения системы координат $Oxyz$ $\omega=\omega'-\omega^\circ$, где ω° — абсолютная угловая скорость вращения трехгранника $Ox^\circ y^\circ z^\circ$. Используя выражение (1.6), находим

(1.7) $$\omega=a\,(\mathbf{F}-m\mathbf{w})/H-\omega^\circ$$

Проектируя левую и правую части векторного равенства (1.7) на ребра трехгранника $Ox^\circ y^\circ z^\circ$ и учитывая выражения проекций векторов $\mathbf{F}$, $\mathbf{w}$, ω° на ребра трехгранника $Ox^\circ y^\circ z^\circ$ [1, 5], получаем следующие формулы для проекций ω_i вектора ω:

(1.8) $$\omega_1=-\frac{am}{H}v^\cdot,\quad \omega_2=-\frac{am}{H}\omega_0 v-\frac{v}{R}$$
$$\omega_3=-\frac{a}{H}\left(F-\frac{mv^2}{R}\right)-\omega_0\quad \left(\omega_0=\frac{v}{\rho}\right)$$

Здесь v — скорость движения точки подвеса гиромаятника относительно невращающейся сферы S с тем же центром и радиусом, что и Земля, R — радиус Земли, ρ — радиус геодезической кривизны траектории движения точки подвеса гиромаятника в том месте, где в данный момент времени находится точка подвеса.

Из выражений (1.8) и первых двух уравнений системы (1.4) получаем известные [1, 5] прецессионные уравнения движения оси z ротора гироскопического маятника относительно трехгранника Дарбу для произвольного движения точки его подвеса по поверхности Земли

$$(1.9)\qquad \begin{aligned} &H\,(vR^{-1}\sin\alpha\,\sin\beta - \omega_0\cos\alpha\sin\beta + \alpha^{\boldsymbol{\cdot}}\cos\beta) = \\ &= a\,[(F - mv^2R^{-1})\cos\alpha\sin\beta - m\,(v^{\boldsymbol{\cdot}}\cos\beta + \omega_0 v\sin\alpha\sin\beta)] \\ &H\,(vR^{-1}\cos\alpha + \omega_0\sin\alpha + \beta^{\boldsymbol{\cdot}}) = a[(mv^2R^{-1} - F)\sin\alpha - \\ &- m\omega_0 v\cos\alpha] \end{aligned}$$

Третье уравнение системы (1.4) при учете равенств (1.8) принимает вид

$$(1.10)\qquad \gamma^{\boldsymbol{\cdot}} = \frac{1}{\cos\beta}\left\{\left[\frac{a}{H}\left(\frac{mv^2}{R} - F\right) - \omega_0\right]\cos\alpha + \left(\frac{am}{H}\omega_0 v + \frac{v}{R}\right)\sin\alpha\right\}$$

Оно позволяет после отыскания из системы (1.9) неизвестных функций времени $\alpha = \alpha\,(t)$ и $\beta = \beta\,(t)$ установить закон изменения координаты $\gamma = \gamma\,(t)$, при котором имеет место равенство (1.5), а следовательно, и векторное равенство (1.6).

2. Свяжем с системой координат $Oxyz$ твердое тело D, поместив одну из его точек в начало O системы координат $Oxyz$. Тело D совершает относительно трехгранника Дарбу $Ox^\circ y^\circ z^\circ$ сферическое движение с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, определяемой формулой (1.7). Кинематические уравнения этого движения имеют вид (1.4).

Введем в рассмотрение вектор $\boldsymbol{\theta}$ конечного поворота, определяющий положение тела D относительно трехгранника $Ox^\circ y^\circ z^\circ$. Параметры Родрига — Гамильтона, соответствующие вектору конечного поворота $\boldsymbol{\theta}$, обозначим λ_j ($j = 0, 1, 2, 3$). Параметры λ_j выражаются через углы α, β, γ в соответствии с известными формулами [4]. Для того чтобы найти выражения углов α, β и γ через параметры Родрига — Гамильтона λ_j, выразим элементы (1.2) через параметры λ_j согласно формулам, приведенным в [6]. В результате находим

$$(2.1)\qquad \begin{aligned} &\sin\beta = 2\,(\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3),\quad \operatorname{tg}\alpha = 2\,(\lambda_0\lambda_1 - \lambda_2\lambda_3)\,/\,(\lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \\ &- \lambda_1^2 - \lambda_2^2) \\ &\operatorname{tg}\gamma = 2\,(\lambda_0\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2)\,/\,(\lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2) \end{aligned}$$

Кинематические уравнения сферического движения тела D, связывающие параметры Родрига — Гамильтона и их производные с проекциями ω_i вектора $\boldsymbol{\omega}$ относительной угловой скорости тела на оси системы координат $Ox^\circ y^\circ z^\circ$, имеют вид [6,7]

$$(2.2)\qquad \begin{aligned} &2\lambda_0^{\boldsymbol{\cdot}} = -(\omega_1\lambda_1 + \omega_2\lambda_2 + \omega_3\lambda_3),\quad 2\lambda_1^{\boldsymbol{\cdot}} = \omega_1\lambda_0 + \omega_2\lambda_3 - \omega_3\lambda_2 \\ &2\lambda_2^{\boldsymbol{\cdot}} = \omega_2\lambda_0 + \omega_3\lambda_1 - \omega_1\lambda_3,\quad 2\lambda_3^{\boldsymbol{\cdot}} = \omega_3\lambda_0 + \omega_1\lambda_2 - \omega_2\lambda_1 \end{aligned}$$

Выше показано, что динамические уравнения (1.9) прецессионного движения гиромаятника эквивалентны первым двум кинематическим уравнениям (1.4) и соотношениям (1.8). В свою очередь уравнения (1.4) эквивалентны уравнениям (2.2), так как уравнения (1.4) и (2.2) представляют собой две формы кинематических уравнений сферического движения одного и того же тела D. Поэтому уравнения (2.2) при задании ω_i соотношениями (1.8) можно трактовать как прецессионные уравнения движения оси z ротора гиромаятника относительно трехгранника Дарбу. Эти уравнения, так же как и уравнения (1.9), справедливы для произвольного движения точки подвеса гиромаятника по поверхности Земли в случае, если соблюдены известные условия [1,5], наложенные на силы, действующие на гиромаятник.

Таким образом, для отыскания углов α и β, характеризующих положение оси z ротора гиромаятника относительно трехгранника Дарбу, при произвольных заданных функциях $v(t)$ и $\omega_0(t)$ вместо решения двух существенно нелинейных дифференциальных уравнений (1.9) можно решать четыре линейных дифференциальных уравнения (2.2), осуществляя переход от параметров λ_j к углам α и β по первым двум формулам (2.1). Третье соотношение (2.1) позволяет после нахождения параметров λ_j установить закон изменения угла γ, при котором справедливы равенства (1.5) и (1.6).

Для неподвижной точки подвеса гиромаятника $\omega_0 = 0$, $v = 0$. Поэтому $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = -aF / H$ и уравнения (2.2) принимают вид уравнений, полученных в работе [4] для гиромаятника, установленного на неподвижном основании, при условии, что введенная в этой работе величина $h = \omega_z' - a(P_z + F_z) / H$ равна нулю для выбранного закона движения системы координат $Oxyz$ по углу γ.

3. Покажем, что между прецессионными уравнениями гиромаятника и уравнениями основной задачи инерциальной навигации [5, 8, 9] существует аналогия.

Пусть $\xi^s\eta^s\zeta^s$ — невращающаяся система координат, а XYZ — система координат, связанная со стабилизированной платформой. Ориентация системы координат XYZ относительно трехгранника $\xi^s\eta^s\zeta^s$ определяется углами ψ, $-\varphi$, $-\varkappa$, смысл которых пояснен в работе [5]. Считая условно координатные оси x, y, z невращающимися, совместим их с осями ζ^s, ξ^s, η^s соответственно. Из фиг. 1 и схемы поворотов координатного трехгранника XYZ относительно $\xi^s\eta^s\zeta^s$, приведенной в [5], следует, что при выполнении равенств

$$\alpha = \varkappa, \ \beta = \varphi, \ \gamma = -\psi \tag{3.1}$$

координатные оси x°, y°, z° будут совпадать с осями Z, X, Y соответственно, а проекции ω_x, ω_y, ω_z абсолютной угловой скорости вращения трехгранника XYZ на его же оси будут равны

$$\omega_x = -\omega_2, \ \omega_y = -\omega_3, \ \omega_z = -\omega_1 \tag{3.2}$$

Из уравнений (1.3) и равенств (3.1), (3.2) получаем уравнения

$$\begin{gathered} -\varphi^\cdot \cos\varkappa - \psi^\cdot \cos\varphi \sin\varkappa = \omega_x, \quad -\varphi^\cdot \sin\varkappa + \\ + \psi^\cdot \cos\varphi^\cdot \cos\varkappa = \omega_y \\ -\varkappa^\cdot + \psi^\cdot \sin\varphi = \omega_z \end{gathered} \tag{3.3}$$

совпадающие с уравнениями основной задачи инерциальной навигации в углах Эйлера — Крылова [5, 8, 9].

В работах [10–14] доказана устойчивость по Ляпунову решений уравнений (3.3) для любых непрерывных функций ω_x, ω_y, ω_z. Уравнения (1.3) вместе с соотношениями (3.1), (3.2) эквивалентны уравнениям (3.3). Уравнения (1.9) гиромаятника получаются из уравнений (1.3) в результате их разрешения относительно производных $\alpha^\cdot$, $\beta^\cdot$, $\gamma^\cdot$ и подстановки вместо ω_i выражений (1.8), непрерывность которых очевидна. Следовательно, решения уравнений (1.9) гиромаятника в углах Эйлера — Крылова α и β также устойчивы по Ляпунову.

Параметры Родрига — Гамильтона l_j ($j = 0, 1, 2, 3$), характеризующие расположение системы координат XYZ относительно $\xi^s\eta^s\zeta^s$, связаны с параметрами λ_j соотношениями

$$l_0 = \lambda_0,\ l_1 = -\lambda_2,\ l_2 = -\lambda_3,\ l_3 = -\lambda_1 \tag{3.4}$$

Из равенств (3.2), (3.4) и уравнений (2.2) получаем уравнения

$$\begin{gathered} 2l_0^\cdot = -(\omega_x l_1 + \omega_y l_2 + \omega_z l_3), \quad 2l_1^\cdot = \omega_x l_0 + \omega_z l_2 - \omega_y l_3 \\ 2l_2^\cdot = \omega_y l_0 - \omega_z l_1 + \omega_x l_3, \quad 2l_3^\cdot = \omega_z l_0 + \omega_y l_1 - \omega_x l_2 \end{gathered} \tag{3.5}$$

совпадающие с уравнениями основной задачи инерциальной навигации в параметрах Родрига — Гамильтона [5].

В работах по инерциальной навигации [12, 14–17], как правило, используется другая совокупность параметров Родрига — Гамильтона m_j, приводящая к более простым связям между параметрами m_j и углами ψ, φ, $\varkappa$. Связь между параметрами l_j и m_j установлена в [5], где показано, что уравнения основной задачи инерциальной навигации в параметрах m_j имеют тот же вид, что и уравнения (3.5) (при замене в них l_j на m_j).

Устойчивость по Ляпунову решений уравнений (3.5) для любых непрерывных функций ω_x, ω_y, ω_z доказана в [12]. Уравнения (2.2), эквивалентные уравнениям (3.2), (3.4), (3.5), для ω_i, заданных непрерывными функциями (1.8), являются прецессионными уравнениями гиромаятника в параметрах Родрига — Гамильтона. Поэтому можно сделать вывод об устойчивости по Ляпунову решений уравнений (2.2), (1.8) гиромаятника в параметрах Родрига — Гамильтона.

Таким образом, установленная аналогия между прецессионными уравнениями гиромаятника и уравнениями основной задачи инерциальной навигации позволяет утверждать, что решения как уравнений (1.9) гиромаятника в углах Эйлера — Крылова, так и уравнений (2.2), (1.8) гиромаятника в параметрах Родрига — Гамильтона устойчивы по Ляпунову. Однако следует иметь в виду, что значения

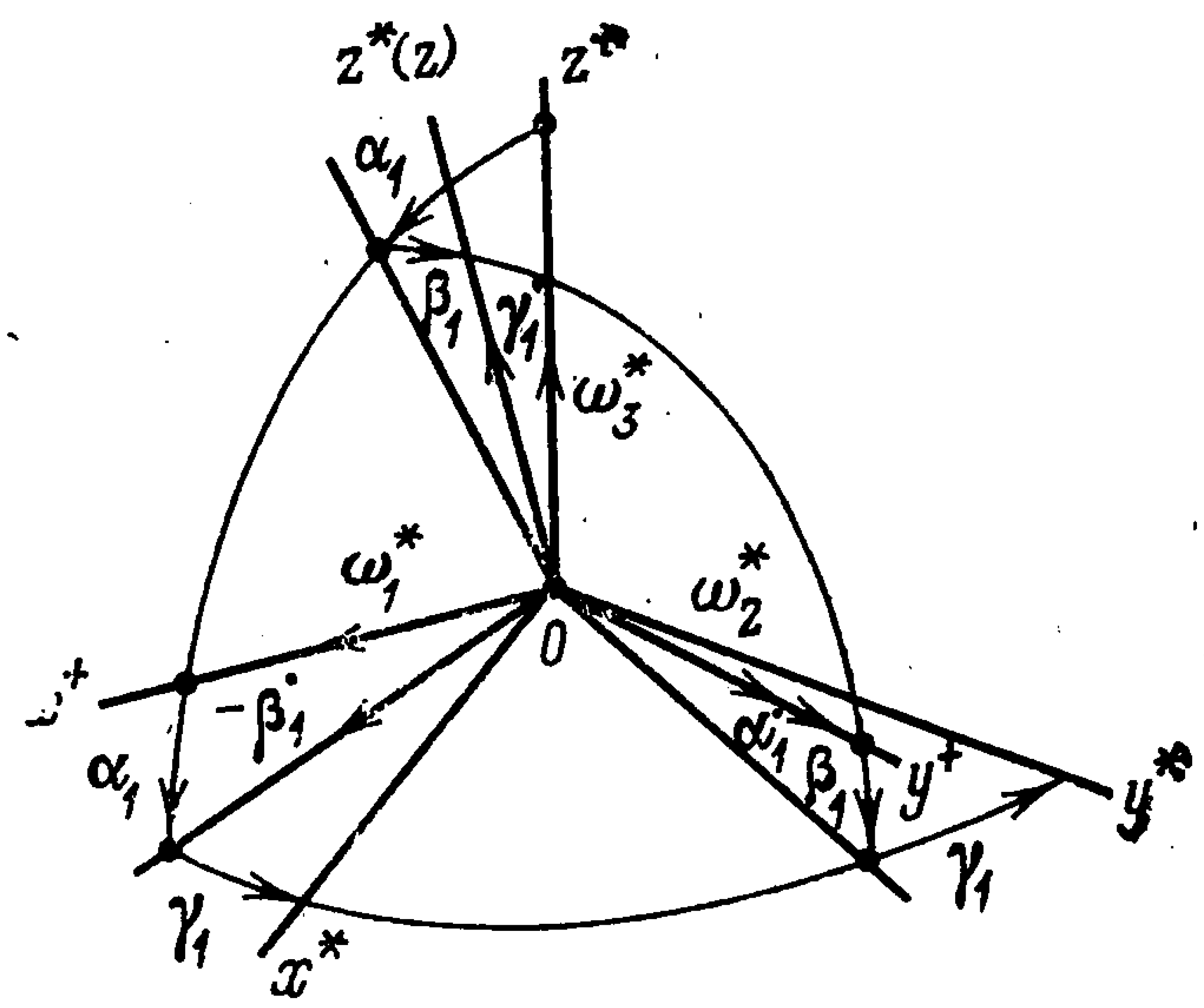
$$\alpha^* = 0,\ \beta^* = 0,\ \gamma^* = \gamma^*(t)\ \ (\gamma^{*\cdot} = \omega_3)$$

переменных α, β, γ и соответствующие им значения

$$\lambda_0^* = \cos(\gamma^*/2),\ \ \lambda_1^* = \lambda_2^* = 0,\ \ \lambda_3^* = \sin(\gamma^*/2)$$

переменных λ_j, при которых главная ось гиромаятника совпадает с вертикалью, не являются частными решениями уравнений (1.9) гиромаятника в углах Эйлера — Крылова и уравнений (2.2), (1.8) гиромаятника в параметрах Родрига — Гамильтона. Поэтому сделанный вывод об устойчивости по Ляпунову решений прецессионных уравнений гиромаятника не означает устойчивости движения главной оси гиромаятника по отношению к вертикали. Этот вопрос требует отдельного рассмотрения. Необходимо также рассмотрение вопроса однозначного определения углов α, β, γ через параметры Родрига — Гамильтона λ_j. Для этого следует воспользоваться подходом, описанным в работе [5], учитывая при этом, что α, β, γ могут принимать любые значения в интервалах $(-\pi/2, \pi/2)$, $(-\pi/2, \pi/2)$, $(0, 2\pi)$ соответственно.

Структура общего решения системы (2.2) известна [5, 7, 16]. Известны также решения уравнений (2.2) для частных случаев задания вектора ω, например для вектора ω, постоянного по направлению в системе координат $Ox^\circ y^\circ z^\circ$, и для вектора ω, совершающего коническое движение. Поэтому для установления структуры общего решения системы (1.9) и ее решения для указанных случаев задания вектора угловой скорости ω следует воспользоваться соотношениями (2.1).



Фиг. 2

4. Получим линейные дифференциальные уравнения, описывающие прецессионное движение гиромаятника относительно географического трехгранника [2, 3] в конечных углах.

Пусть $Ox^+y^+z^+$ — географическая система координат, ось Oz^+ которой совпадает с осью Oz° трехгранника Дарбу $Ox^\circ y^\circ z^\circ$ и направлена по радиусу земного шара, а оси Ox^+ и Oy^+ направлены на восток и на север соответственно. С осью z ротора гиромаятника свяжем систему координат $Ox^*y^*z^*$, ось Oz^* которой направим по оси ротора. Положение системы координат $Ox^*y^*z^*$ относительно географического трехгранника $Ox^+y^+z^+$ определим углами α_1, β_1, γ_1 (фиг. 2). Углы α_1 и β_1 определяют положение оси z ротора гиромаятника по отношению к трехграннику $Ox^+y^+z^+$.

В соответствии с векторным уравнением (1.7) угловая скорость ω^* вращения системы координат $Ox^*y^*z^*$ относительно трехгранника $Ox^+y^+z^+$ имеет следующий вид:

$$\omega^* = a\,(\mathbf{F} - m\mathbf{w}) \,/\, H - \omega^+ \tag{4.1}$$

Здесь ω^+ — абсолютная угловая скорость географического трехгранника.

Из уравнения (4.1) находим для проекций ω_i^* вектора ω^* на оси системы координат $Ox^+y^+z^+$ следующие выражения:

$$\omega_1^* = -amw_1 \,/\, H - u_1, \quad \omega_2^* = -amw_2 \,/\, H - u_2 \tag{4.2}$$
$$\omega_3^* = -a\,(F + mw_3) \,/\, H - u_3$$

Здесь w_i и u_i — проекции векторов $\mathbf{w}$ и $\boldsymbol{\omega}^+$ на оси системы координат $Ox^+y^+z^+$, определяемые известными соотношениями [2, 3].

С другой стороны (см. фиг. 2), проекции ω_i^* могут быть представлены в виде

$$(4.3)\qquad \omega_1^* = -\beta_1^{\cdot}\cos\alpha_1 + \gamma_1^{\cdot}\cos\beta_1\sin\alpha_1, \quad \omega_2^* = \alpha_1^{\cdot} + \gamma_1^{\cdot}\sin\beta_1$$
$$\omega_3^* = \beta_1^{\cdot}\sin\alpha_1 + \gamma_1^{\cdot}\cos\beta_1\cos\alpha_1$$

Разрешая уравнения (4.3) относительно производных $\alpha_1^{\cdot}$, $\beta_1^{\cdot}$, $\gamma_1^{\cdot}$, при помощи выражений (4.2) получим известные [2, 3] прецессионные уравнения движения оси z ротора гиромаятника относительно географического трехгранника

$$(4.4)\qquad H(\alpha_1^{\cdot}\cos\beta_1 - u_1\sin\alpha_1\sin\beta_1 + u_2\cos\beta_1 - u_3\cos\alpha_1\sin\beta_1) =$$
$$= a(F + mw_3)\cos\alpha_1\sin\beta_1 + amw_1\sin\alpha_1\sin\beta_1 - amw_2\cos\beta_1$$
$$H(\beta_1^{\cdot} - u_1\cos\alpha_1 + u_3\sin\alpha_1) = -a(F + mw_3)\sin\alpha_1 +$$
$$+ amw_1\cos\alpha_1$$

и уравнение

$$\gamma_1^{\cdot} = -\frac{1}{\cos\beta_1}\left\{\left(\frac{a}{H}mw_1 + u_1\right)\sin\alpha_1 + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{a}{H}(F + mw_3) + u_3\right]\cos\alpha_1\right\}$$

позволяющее после отыскания из системы (4.4) неизвестных функций $\alpha_1(t)$, $\beta_1(t)$ установить закон движения системы координат $Ox^*y^*z^*$ по углу γ_1.

Свяжем с системой координат $Ox^*y^*z^*$ твердое тело D^*. Введем в рассмотрение вектор конечного поворота $\boldsymbol{\theta}^*$, определяющий положение тела D^* относительно трехгранника $Ox^+y^+z^+$. Параметры Родрига — Гамильтона, соответствующие вектору конечного поворота $\boldsymbol{\theta}^*$, обозначим ν_j ($j = 0, 1, 2, 3$). Кинематические уравнения сферического движения тела D^* относительно трехгранника $Ox^+y^+z^+$, записанные в параметрах Родрига — Гамильтона ν_j

$$(4.5)\qquad 2\nu_0^{\cdot} = -(\omega_1^*\nu_1 + \omega_2^*\nu_2 + \omega_3^*\nu_3), \quad 2\nu_1^{\cdot} = \omega_1^*\nu_0 + \omega_2^*\nu_3 -$$
$$- \omega_3^*\nu_2$$
$$2\nu_2^{\cdot} = \omega_2^*\nu_0 + \omega_3^*\nu_1 - \omega_1^*\nu_3, \quad 2\nu_3^{\cdot} = \omega_3^*\nu_0 +$$
$$+ \omega_1^*\nu_2 - \omega_2^*\nu_1$$

при задании коэффициентов ω_i^* формулами (4.2) описывают поведение гиромаятника в географической системе координат для конечных углов отклонений оси ротора от вертикали.

Таким образом, для отыскания углов α_1 и β_1, характеризующих положение оси z ротора гиромаятника относительно географического трехгранника при произвольном движении основания по поверхности Земли, вместо решения двух нелинейных дифференциальных уравнений (4.4) можно решать четыре линейных дифференциальных уравнения (4.5), осуществляя переход от параметров ν_j к углам α_1 и β_1 в соответствии с полученными аналогично (2.1) формулами

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = 2(\nu_0\nu_2 + \nu_1\nu_3) / (\nu_0^2 + \nu_3^2 - \nu_1^2 - \nu_2^2), \quad \sin\beta_1 = = 2(-\nu_0\nu_1 + \nu_2\nu_3)$$

В заключение отметим, что сделанные в п. 3 выводы об устойчивости по Ляпунову решений прецессионных уравнений (1.9) и (2.2), (1.8) движения оси ротора гиромаятника относительно сопровождающего трехгранника Дарбу и выводы о частных случаях интегрируемости этих уравнений в квадратурах можно распространить на прецессионные уравнения (4.4) и (4.5), (4.2) движения оси ротора гиромаятника относительно географического трехгранника.

Поступила 6 VI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ишлинский А. Ю.* К теории гироскопического маятника. ПММ, 1957, т. 21, вып. 1.
2. *Ройтенберг Я. Н.* Гироскопы. М., «Наука», 1966.
3. *Сайдов П. И., Слив Э. И., Чертков Р. И.* Вопросы прикладной теории гироскопов. Л., Судпромгиз, 1961.
4. *Кошляков В. Н.* О применении параметров Родрига — Гамильтона и Кейли — Клейна в прикладной теории гироскопов. ПММ, 1965, т. 29, вып. 4.
5. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М., «Наука», 1976.
6. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961.
7. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М., «Наука», 1973.
8. *Ишлинский А. Ю.* Об уравнениях задачи определения местоположения движущегося объекта посредством гироскопов и измерителей ускорений. ПММ, 1957, т. 21, вып. 6.
9. *Ишлинский А. Ю.* Об автономном определении местоположения движущегося объекта посредством пространственного гироскопического компаса, гироскопа направления и интегрирующего устройства. ПММ, 1959, т. 23, вып. 1.
10. *Жбанов Ю. К.* Исследование свободных колебаний в системе автономного определения координат движущегося объекта. ПММ, 1960, т. 24, вып. 6.
11. *Андреев В. Д.* Теория инерциальной навигации (автономные системы). М., «Наука», 1966.
12. *Кошляков В. Н., Люсин Ю. Б., Стороженко В. А., Темченко М. Е., Шульман И. Ш.* Об устойчивости решений системы дифференциальных уравнений задачи автономного определения координат движущегося объекта. Докл. АН СССР, 1968, т. 179, № 1.
13. *Ишлинский А. Ю.* Геометрическое рассмотрение устойчивости решения основной задачи инерциальной навигации. Инж. ж. МТТ, 1968, № 3.
14. *Бойчук О. Ф., Ишлинский А. Ю., Стороженко В. А.* Построение функции Ляпунова для совокупности уравнений основной задачи инерциальной навигации. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 5.
15. *Кошляков В. Н.* Об уравнениях местоположения движущегося объекта. ПММ, 1964, т. 28, вып. 6.
16. *Климов Д. М.* Об интегрировании кинематических уравнений инерциальных систем навигации. Изв. вузов СССР. Приборостроение, 1968, т. 11, № 7.
17. *Стороженко В. А., Темченко М. Е.* О применении теории конечных вращений к задаче автономного определения координат места движущегося объекта. Изв. АН СССР, МТТ, 1971, № 3.