Прикладная математика и механика. Том 44, вып. 6, 1980

УДК 531.36

УСТОЙЧИВОСТЬ МНОЖЕСТВА ПРОЦЕССОВ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Т. К. Сиразетдинов

(Казань)

Вводится аксиоматическое описание процессов с последействием для систем с распределенными параметрами. Определены понятия устойчивости множества или трубки процессов с последействием, получены необходимые и достаточные условия устойчивости и неустойчивости, развивающие результаты работ [1–3].

Известно, что при применении метода функций Ляпунова к исследованию устойчивости решения дифференциальных уравнений используются не все свойства решений. Поэтому представляет интерес выделить только те общие свойства движений или решений дифференциальных уравнений, которые используются при доказательстве теорем, построить абстрактные аксиоматические процессы и получить для них условия устойчивости.

Задача исследования устойчивости или других свойств движений сводится к проверке существования функции Ляпунова, удовлетворяющей условиям соответствующих теорем, и выполнения данной системы аксиом. Эти аксиомы включают в себя основные свойства решения задачи Коши широкого класса дифференциальных уравнений и многих других процессов.

Аксиоматическое описание процессов рассматривалось также в [4–6] и других работах.

1. Пусть (α_0, T) — интервал вещественной оси, где $\alpha_0 \leqslant 0$, $T > 0$. Рассмотрим множество Φ_0 элементов φ_0. Если каждому определенному значению времени t из промежутка $(t_0, t_1] \subset (\alpha_0, T)$ отвечает в Φ_0 определенный элемент $\varphi_0 = \varphi_0(t_0, t_1; t)$, будем говорить, что задана начальная кривая $\varphi_0 = \varphi_0(t_0, t_1; t)$ в промежутке $(t_0, t_1]$. Существенно, что φ_0 кроме времени t зависит от промежутка $(t_0, t_1]$. Например, если Φ_0 — множество чисел, то φ_0 принимает числовые значения и кривая, задаваемая формулой $\varphi = t^2(t_1 - t_0)$, зависит от выбора интервала (t_0, t_1). Здесь для каждой пары значений t_0, t_1 существует своя зависимость φ_0 от времени t. В частности, функция $\varphi = t^2$, которая не зависит от промежутка $(t_0, t_1]$, также является кривой в рассматриваемом здесь смысле.

Из множества начальных кривых виделим класс кривых, называемых начальными процессами.

Аксиомы начальных процессов. 1.1. Любой начальный процесс, определенный в промежутке $(t_0, t_1] \subset (\alpha_0, T)$, является начальным процессом в любом промежутке $(t_0', t_1'] \subset (t_0, t_1]$.

1.2. Если даны два начальных процесса $\varphi_0(t_0, t_1; t)$ и $\varphi_0(t_1, t_2, t)$, где $\alpha_0 \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T$, то составной начальный процесс $\varphi_0(t_0, t_2; t)$, состоящий при $t \in (t_0, t_1]$ из элементов первого, а при $t \in (t_1, t_2]$ из элементов второго начального процесса, также является начальным процессом.

1.3. Существует хотя бы один начальный процесс, определенный во всем интервале (α_0, T).

При этом $\varphi_0 \in \Phi_0$ будем называть начальным состоянием. Эти аксиомы соответственно называются аксиомами сужения, сочленения и существования.

Из аксиом *1.1* и *1.3* следует, что в любом промежутке $(t_0, t_1] \subset (t_0, T]$ существует начальный процесс. Согласно аксиоме *1.2*, путем объединения начальных процессов смежных промежутков времени получим начальный процесс.

2. Пусть Φ — множество элементов φ. Если каждому значению времени $t \in [t_0, t_1) \subset (0, T)$ и начальному процессу $\varphi_0 = \varphi_0(\alpha, t_0; t')$, определенному в промежутке $(\alpha, t_0] \subset (\alpha_0, t_0]$ и $t' \in (\alpha, t_0]$, отвечает в Φ определенная точка $\varphi = \varphi(\varphi_0(\alpha, t_0; t'), t_0, t_1; t)$, то в множестве Φ задана кривая с последействием. Таким образом кривая с последействием удовлетворяет начальному условию, т. е. аксиоме начальных данных.

Здесь элемент $\varphi \in \Phi$ в момент времени t зависит от начального процесса $\varphi_0 = \varphi_0(\alpha, t_0; t')$, заданного в промежутке $(\alpha_0, t_0] \subset (a_0, T]$, и от промежутка $[t_0, t_1)$. Начальный процесс $\varphi_0 = \varphi_0(\alpha, t_0; t')$ называется также начальным условием.

Если кривая с последействием начинает развиваться в промежутке $[t_0, t_1) \subset (\alpha_0, T)$ с момента времени t_0, то для его определения необходимо знать начальный процесс или начальное условие в промежутке $(\alpha_0, t_0]$. Если же кривая с последействием рассматривается в промежутке $[t_0', t_1) \subset (\alpha_0, T)$, где $t_0 < t_0'$, то необходимо знать начальную кривую состояний в промежутке $(\alpha', t_0'] \subset (\alpha_0, t_0']$.

Задаваясь различными начальными процессами в промежутке $(\alpha', t_0']$, получим, вообще говоря, различные кривые с последействием в промежутке $(t_0', t_1]$. Если же начальный процесс $\varphi_0(\alpha', t_0'; t)$ совпадает с некоторой кривой φ' с последействием в промежутке $[t_0, t_0') \subset (\alpha_0, T)$, где $t_0 < t_0'$, то кривая, имеющая этот начальный процесс в промежутке $[t_0', t_1)$, рассматривается как продолжение кривой с последействием φ' в промежуток $[t_0', t)$.

Среди всевозможных кривых с последействием выделим класс процессов с последействием.

Аксиомы процессов с последействием. 2.1. Любой процесс с последействием, определенный в промежутке $[t_0, t_1) \subset (0, T)$, будет также процессом с последействием, если его рассматривать в любом промежутке $[t_0', t_1') \subset [t_0, t_1)$, т. е. если $\varphi(\varphi_0(\alpha, t_0; t'), t_0, t_1; t)$ — процесс с последействием, то $\varphi(\varphi_0'(\alpha, t_0'; t'), t_0', t_1'; t)$ также является процессом с последействием с начальным условием

$$t' \in [\alpha, t_0), \quad \varphi_0'(\alpha, t_0'; t') = \varphi_0(\alpha, t_0; t')$$

$$t' \in [t_0, t_0'], \quad \varphi_0'(\alpha, t_0'; t') = \varphi(\varphi_0(\alpha, t_0; t''), t_0, t_1; t')$$

2.2. Если два процесса с последействием

$$\varphi(\varphi_0(\alpha_0, t_0; t'), t_0, t_1; t), \ \varphi(\varphi_0(\alpha_1, t_1; t''), t_1, t_2; t)$$

определенные соответственно в промежутках $[t_0, t_1)$ и $[t_1, t_2)$, такие, что

$$t \in (\alpha_1, t_0], \ \alpha_0 \leqslant \alpha_1 \leqslant t_0, \ \varphi_0(\alpha_1, t_1; t) = \varphi_0(\alpha_0, t_0; t)$$
$$t \in [t_0, t_1], \ \varphi_0(\alpha_1, t_1; t) = \varphi(\varphi_0(\alpha_0, t_0; t'), t_0, t_1; t)$$

то составная кривая, состоящая при $t < t_1$ из элементов одного процесса с последействием и при $t \geqslant t_1$ из элементов другого процесса, также будет процессом с последействием. Такие процессы с последействием будем называть составными.

2.3. Существует хотя бы один процесс с последействием, определенный на всем интервале $[t_0, T)$ с начальной кривой, определенной в промежутке $(\alpha, t_0]$.

Процесс с последействием удовлетворяет аксиомам начальных данных, сужения, сочленения и существования и определяется в промежутке времени $[t_0, T)$, а начальное условие — в $(\alpha_0, t_0]$. В дальнейшем будем рассматривать также процессы с последействием $\varphi = \varphi(\varphi_0(\alpha, t_0; t'), t_0, t_1; t)$ не только в промежутке $[t_0, t_1)$, но и в промежутке $[\alpha, t_1)$, и под такими процессами будем понимать составной процесс с последействием, состоящий из процессов

$$t \in (\alpha, t_0), \quad \varphi = \varphi_0(\alpha, t_0; t)$$
$$t \in [t_0, t), \ \varphi = \varphi(\varphi_0(\alpha, t_0; t'), t_0, t_1; t)$$

Сокращенно будем писать $\varphi = \varphi(\varphi_0, \alpha, t_0, t_1; t)$, где $(\alpha, t_0]$ указывает промежуток начальных распределений, $[t_0, t_1)$ — промежуток определения процесса. Вместо процесса с последействием будем употреблять также термин «процесс». При этом $\varphi \in \Phi$ будем называть состоянием процесса.

3. Мерой $\rho = \rho[\varphi, t]$ состояния процессов с последействием в момент времени $t \in [t_0, T)$ называется вещественное число, которое приводится в соответствие каждой паре (φ, t) любого процесса с последействием.

Мерой $\rho_0 = \rho_0[\varphi; \alpha, t_0]$ начальных процессов называется вещественное число, которое приводится в соответствие каждой кривой начальных процессов $\varphi_0(\alpha, t_0; t)$, определенной в промежутке $(\alpha, t_0]$. Например, $\rho_0[\varphi; \alpha, t_0] = \sup_{t \in (\alpha, t_0]} \rho[\varphi, t]$, где $\rho = \rho[\varphi, t]$ — мера состояний процессов в произвольный момент времени $t \in (\alpha, t_0]$.

Если для заданного числа $\varepsilon > 0$ существует другое число $\delta = \delta(\varepsilon) > > 0$, такое, что неравенство $\rho < \varepsilon$ выполняется при $\rho_0 < \delta(\varepsilon)$ и каждом $t \in (\alpha, t_0]$, то мера ρ называется полунепрерывной сверху по мере ρ_0. В дальнейшем предполагается, что мера ρ является полунепрерывной сверху по мере ρ_0. Меры ρ и ρ_0 могут принимать как положительные, так и отрицательные числовые значения, числа ε и $\delta(\varepsilon)$ — только положительные.

4. Предполагается, что существует хотя бы один процесс с последействием $\varphi_* = \varphi_*(\varphi_{0*}(\alpha, t_0; t), t_0, T; t)$, удовлетворяющий неравенствам $\rho_0 \leqslant 0$ и $\rho \leqslant 0$.

Множество

$$\Gamma_0 = \{\varphi,\ t : \rho_0 \leqslant 0,\ t \in (\alpha,\ t_0];\ \rho \leqslant 0,\ t \in [t_0,\ T)\}$$

процессов с последействием назовем множеством или трубкой невозмущенных процессов с последействием.

Пусть r — положительное число. Множество начальных процессов, удовлетворяющих неравенствам $0 < \rho_0 < r$, назовем начальными возмущениями и процессы, исходящие из этой области, назовем возмущенными процессами с последействием.

Невозмущенное множество Γ_0 процессов с последействием называется устойчивым по двум мерам ρ и ρ_0 на интервале $[t_0, T)$, если для любого положительного числа ε можно указать такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$, чтобы для всякого возмущенного процесса с последействием $\varphi = \varphi(\varphi_0, \alpha, t_0, T; t)$, удовлетворяющего в начальный промежуток времени $(\alpha, t_0]$ неравенству $\rho_0 < \delta(\varepsilon)$ во всей области определения процесса, выполнялось условие $\rho < \varepsilon$, $\forall t \in [t_0, T)$. Если условие устойчивости не выполняется, то множество Γ_0 невозмущенных процессов называется неустойчивым.

При $T = \infty$ невозмущенное множество Γ_0 процессов называется асимптотически устойчивым по двум мерам ρ и ρ_0, если это множество устойчиво по этим мерам и для любых возмущенных процессов, исходящих из малой окрестности $\rho_0 \in (0, r)$, выполняется условие $\lim_{t\to\infty} \rho \leqslant 0$.

Заметим, что вдоль конкретных процессов функционалы ρ, ρ_0 считаются непрерывными функциями времени t.

5. Введем функционал $v = v[\varphi, t]$, который для состояния процесса φ в каждый момент времени $t \in [t_0, T)$ ставит в соответствие вещественное число v, и функционал $v_\alpha = v[\varphi; \alpha, t]$, который для составного процесса $\varphi = \varphi(\varphi_0(\alpha, t_0; t''), t_0, T; t')$ в промежутке $[\alpha, t) \subset [\alpha_0, T)$ в момент времени $t \in [t_0, T)$ ставит в соответствие вещественное число ϑ_α. Например,

$$v[\varphi, t] = \int\limits_\tau \varphi^2(x, t)\, dx, \quad v_\alpha = v[\varphi; \alpha, t] = \sup_{s \in [\alpha, t]} \vartheta[\varphi, s]$$

Здесь $\varphi = \varphi(x, t)$ — скалярная функция $x \in \tau$ и $t \in [\alpha_0, T)$, τ — интервал вещественной оси.

Предполагается, что $v = v[\varphi, t] \leqslant 0$, $v_\alpha = v[\varphi; \alpha, t] \leqslant 0$ на невозмущенных процессах при $\rho_0 \leqslant 0$, $t = t_0$, $\rho \leqslant 0$, $t \in [t_0, T)$ и $v[\varphi, t] = 0$ при $\rho[\varphi, t] = 0$.

Функционал $v = v[\varphi, t]$ называется равномерно полунепрерывным сверху по мере ρ_0 в промежутке $(\alpha, t_0]$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, зависящее только от ε, что оценка $v < \varepsilon$ выполняется при $\rho_0 < \delta(\varepsilon)$ для всех $t \in (\alpha, t_0]$.

Функционал $v_\alpha = v[\varphi; \alpha, t]$ называется полунепрерывным сверху по мере $\rho_0 = \rho_0[\varphi; \alpha, t]$ при $t = t_0$, если для сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что оценка $v_\alpha < \varepsilon$ выполняется при условии $\rho_0 < \delta(\varepsilon)$, $t = t_0$. Если эта оценка выполняется для всех $t \in [t_0, T)$, то функционал v_α называется равномерно полунепрерывным сверху по ρ_α в промежутке $[t_0, T)$.

Предел отношения

$$\lim_{\Delta t \to +0} \frac{v[\varphi_{t+\Delta t}; \alpha(t+\Delta t), t+\Delta t] - v[\varphi_t; \alpha(t), t]}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

называется производной функционала v_α вдоль процесса, где $\varphi_t = \varphi(\varphi_0, \alpha, t_0, T; t)$.

Функционал $v = v[\varphi, t]$ называется определенно-положительным (отрицательным) по $\rho = \rho[\varphi, t]$, если $v[\varphi, t] \geqslant 0$ ($v[\varphi, t] \leqslant 0$) при $\rho \geqslant 0$ и $v[\varphi, t] = 0$ при $\rho = 0, t \in [t_0, T)$ и для любого числа $\varepsilon > 0$ существует другое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что неравенство $v[\varphi, t] \geqslant \delta(\varepsilon)$ ($v[\varphi, t] \leqslant -\delta(\varepsilon)$) выполняется при $\rho[\varphi, t] \geqslant \varepsilon$ для всех $t \in [t_0, T)$.

Функционалы

$$v = \int_0^l f(x)\varphi^2(x, t)\,dx, \quad \infty > c_2 \geqslant f(x) \geqslant c_1 > 0$$

$$v_\alpha = \int_0^l f(x)\varphi^2(x, t)\,dx + \int_{t-\gamma}^{t}\int_0^l \varphi^2(x, t)\,dx\,dt$$

где $\infty > c_2 \geqslant f(x) \geqslant c_1 > 0$, $\gamma = \text{const} > 0$, являются определенно-положительными по мере

$$\rho = \int_0^l \varphi^2(x, t)\,dx$$

В самом деле, используя оценки $v \geqslant c\rho$, $v_\alpha \geqslant c\rho$, $c > 0$, убеждаемся, что если $\rho \geqslant \varepsilon > 0$ при $t' \in [t-\gamma, t]$, то существует число $\delta(\varepsilon) = c\varepsilon > 0$, такое, что $v \geqslant \delta(\varepsilon)$ и $v_\alpha \geqslant \delta(\varepsilon)$. С другой стороны, если $\rho = 0$, то $\varphi^2(x, t) = 0$, за исключением множества меры нуль, и, следовательно, $v = 0$ и $v_\alpha = 0$. Невозмущенному процессу здесь соответствуют процессы, удовлетворяющие равенству $\rho = 0$.

В дальнейшем зависимости $v = v[\varphi, t]$, $v_\alpha = v[\varphi; \alpha, t]$, $\rho = \rho[\varphi, t]$, $\rho_0 = \rho_0[\varphi; \alpha, t]$ и их производные вдоль процессов предполагаются непрерывными функциями времени t в рассматриваемом промежутке.

Заметим, что функционал $v = v[\varphi, t]$ следует рассматривать как частный случай функционалов вида $v_\alpha = v[\varphi; \alpha, t]$ при $\alpha = t$, так что можно принять $v[\varphi, t] = (v_\alpha)_{\alpha=t} = v[\varphi; t, t]$.

6. Приведем теоремы об устойчивости и неустойчивости.

Теорема 1. Для устойчивости множества Γ_0 невозмущенных процессов по двум мерам ρ и ρ_0 необходимо и достаточно, чтобы существовал определенно-положительный по мере ρ, полунепрерывный сверху по ρ_0 при $t \in (\alpha, t_0]$ и невозрастающий вдоль возмущенных процессов с последействием функционал $v_\alpha = v[\varphi; \alpha, t]$.

Теорема 2. Для асимптотической устойчивости невозмущенного множества Γ_0 по двум мерам ρ и ρ_0 необходимо и достаточно, чтобы существовал полунепрерывный сверху по мере ρ_0 при $t \in (\alpha, t_0]$, определенно-положительный по мере ρ, невозрастающий вдоль возмущенных процессов функционал $v_\alpha = v[\varphi; \alpha, t]$, удовлетворяющий условию $\overline{\lim}\, v_\alpha \leqslant 0$ при $t \to \infty$.

Теорема 3. Для того чтобы невозмущенное множество Γ_0 процессов с последействием не было устойчивым по двум мерам ρ и ρ_0, необходимо и достаточно, чтобы существовал функционал $v_\alpha = v\,[\varphi;\ \alpha,\ t]$, ограниченный и обладающий определенно-положительной производной dv_α/dt в области $\{\varphi : v_\alpha > 0\}$, и для любого числа $\delta_\alpha > 0$ имелся процесс $\varphi\,[\varphi_0,\ \alpha,\ t_0;\ t]$, исходящий из области $\{\varphi : v_\alpha > 0\}$ и удовлетворяющий условию $0 < \rho_0 < \delta_0$.

Формулировка этих теорем аналогична формулировке теорем об устойчивости и неустойчивости по двум мерам процесса $\varphi \equiv 0$ при отсутствии последействия [4, 7]. Их доказательства также проводятся аналогично. Однако содержание рассматриваемых процессов и теорем существенно отличается от содержания процессов, изучаемых в [4, 7].

7. Рассмотрим теоремы об устойчивости процессов с последействием, использующие производные dv/dt и обобщающие результаты [1, 3]. Эти теоремы дают достаточные условия устойчивости.

Теорема 4. Если для возмущенных процессов существует равномерно полунепрерывный сверху по мере ρ_0 в промежутке $(\alpha,\ t_0]$ и определенно-положительный по мере ρ функционал $v = v\,[\varphi,\ t]$, производная которого dv/dt, вычисленная при произвольном $t \in [t_0,\ T)$, вдоль возмущенных процессов на множестве

$$\{\varphi',\ t',\ \varphi,\ t : v\,[\varphi',\ t'] \leqslant v\,[\varphi,\ t],\ \alpha \leqslant t_0 \leqslant t' \leqslant t \leqslant T\}$$

при $\alpha \leqslant t_0 \leqslant t' \leqslant t \leqslant T$ является неположительной, то невозмущенное множество Γ_0 процессов является устойчивым по мерам ρ и ρ_0.

Доказательство. Функционал v является определенно-положительным по мере ρ. Поэтому для заданного числа $\varepsilon > 0$ существует число $\mu_0 = \mu_0(\varepsilon)$, такое, что $v \geqslant \mu_0$, если $\rho \geqslant \varepsilon$, и, наоборот, $\rho < \varepsilon$, если $v < \mu_0$. С другой стороны, функционал v является полунепрерывным сверху по мере ρ_0 в промежутке $(\alpha,\ t_0]$. Поэтому для числа $\mu_0 > 0$ существует число $\delta_1(\mu_0) > 0$, такое, что $v < \mu_0$ при $t \in (\alpha,\ t_0)$, если $\rho_0 < \delta_1(\mu_0)$.

Кроме того, из полунепрерывности сверху ρ по ρ_0 в промежутке $(\alpha,\ t_0]$ вытекает, что для заданного $\varepsilon > 0$ существует $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$, такое, что $\rho < \varepsilon$ при всех $t \in (\alpha,\ t_0]$, если $\rho_0 < \delta_2(\varepsilon)$. Обозначим $\delta = \delta\,(\varepsilon) = \min\{\delta_1(\varepsilon),\ \delta_2(\varepsilon)\}$. Таким образом, для числа $\varepsilon > 0$ найдено число $\delta = \delta\,(\varepsilon) > 0$, такое, что $v < \mu_0$ и $\rho < \varepsilon$ при всех $t \in (\alpha,\ t_0]$, если $\rho_0 < \delta\,(\varepsilon)$. В силу предполагаемой непрерывности v по t существует некоторый интервал времени $(t_0,\ t)$, где $t > t_0$, $v < \mu_0$, следовательно $\rho < \varepsilon$.

Докажем, что $\rho < \varepsilon$ при любом $t \in (t_0,\ T)$. Допустим, что существует процесс, на котором функционал v дифференцируем по времени t, и момент времени $t = \tau$, при котором $\rho \geqslant \varepsilon$ и $v \geqslant \mu_0$; до этого момента $v < \mu_0$ и $dv/dt > 0$ при $t = \tau$ и в малой окрестности $(\tau,\ \tau - \Delta t)$, $\Delta t > 0$. Значение производной dv/dt в момент времени $t = \tau$ зависит от состояний процесса при $t \leqslant \tau$ на множестве

$$\{\varphi',\ t',\ \varphi,\ t : v\,[\varphi',\ t'] \leqslant v\,[\varphi,\ t] = \mu_0,\ \alpha \leqslant t' < t = \tau < T\}$$

Согласно условию теоремы на множестве таких состояний везде выполняется условие $dv/dt \leqslant 0$. Следовательно, $v < \mu_0$ и $\rho < \varepsilon$ для любого $t \geqslant t_0$, если $\rho_0 < \delta\,(\varepsilon)$ при $t = t_0$. Устойчивость множества Γ_0 процессов с последействием по мерам ρ и ρ_0 доказана.

При доказательстве этой теоремы предполагалось, что T может быть как конечным, так и бесконечным. В дальнейшем при рассмотрении асимптотической устойчивости положим $T = \infty$. Заметим также, что параметр

α может зависеть от t_0, т. е. $\alpha = \alpha(t_0)$, но $\alpha(t_0) \leqslant t_0$. Продолжительность промежутка последействия $[\alpha(t_0), t_0]$ процессов, рассматриваемых в промежутке $[t_0, \infty)$, зависит от начального момента t_0. Доказанные ранее теоремы и теорема, рассматриваемая ниже, справедливы также при этих предположениях.

Предположим, что производная dv/dt вдоль процессов с последействием определяется на множестве состояний φ процесса в некотором отрезке $[\beta, t]$ и при рассмотрении асимптотической устойчивости будем считать, что параметр β является функцией времени, т. е. $\beta = \beta(t)$ и $\lim \beta(t) = \infty$ при $t \to \infty$, $\beta(t_0) \leqslant \beta(t) \leqslant t$. Случай $\beta(t) = t$ соответствует тому, что запаздывание аргумента отсутствует. Таким образом, производная dv/dt в момент времени t является функционалом, определенным на множестве состояний φ в отрезке $[\beta(t), t]$, правый и левый концы которого неограниченно удаляются вправо от начала координат.

Теорема 5. Если для возмущенных процессов $\{\varphi : 0 < \rho_0 < r\}$ существует полунепрерывный сверху по мере ρ_0 в промежутке $(\alpha(t_0), t_0]$, равномерно полунепрерывный сверху и определенно-положительный по мере ρ при $t \geqslant t_0$ функционал $v = v[\varphi, t]$, производная которого dv/dt, вычисленная при произвольном $t \in [t_0, \infty)$ вдоль возмущенных процессов на множестве $\{\varphi, t\}$, удовлетворяющих неравенству

$$v[\varphi', t'] \leqslant f(v[\varphi, t]), \quad t' \in (\beta(t), t], \quad t > t_0 \qquad (7.1)$$
$$(v > 0, \ f(v) > v)$$

является определенно-отрицательной по мере ρ при $t \geqslant t_0$, то множество Γ_0 невозмущенных процессов с последействием асимптотически устойчиво по мерам ρ и ρ_0.

Доказательство. Пусть условия теоремы выполняются. Тогда выполняются условия предыдущей теоремы. Поэтому множество Γ_0 невозмущенных процессов с последействием является устойчивым по двум мерам ρ и ρ_0, т. е. для заданного числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что $\rho < \varepsilon$ при любом $t \geqslant t_0$, если $\rho_0 < \delta(\varepsilon)$ при $t = t_0$. Остается доказать асимптотическую устойчивость множества Γ_0.

Пусть $\varepsilon > 0$. Определим число $\delta = \delta(\varepsilon)$, такое, что $\rho < \varepsilon$ для любого $t \geqslant t_0$, если $\rho_0 < \delta(\varepsilon)$ при $t = t_0$. Рассмотрим только такие процессы, для которых $\rho_0 < \delta(\varepsilon)$ при $t = t_0$, следовательно, $\rho < \varepsilon$ для любого $t \geqslant t_0$. Тогда существует число $\mu_0 = \mu_0(\varepsilon)$, такое, что

$$t \geqslant t_0, \quad v < \mu_0 \qquad (7.2)$$

Функционал $v = v[\varphi, t]$ является определенно-положительным по мере ρ, т. е. для любого числа $\eta \in (0, \varepsilon)$ существует число $\mu_T = \mu_T(\eta) > 0$, такое, что $v \geqslant \mu_T$, если $\rho \geqslant \eta$. Отсюда следует, что если $v < \mu_T$, то $\rho < \eta$.

Убедимся, что если при $t = t_0$ имеет место $v < \mu_0$, то через конечный промежуток времени $[t_0, T]$ функционал v достигает значения $v < \mu_T$. Для этого покажем, что существует конечный промежуток времени $[t_0, T]$, за который функционал убывает не меньше, чем на разность $\mu_0(\varepsilon) - \mu_T(\eta)$, как бы мало не было значение $\mu_T(\eta) > 0$.

Допустим, что $\rho \geqslant \eta$ и, следовательно, $v \geqslant \mu_T(\eta)$ при любом $t \in [t_0, \infty)$. Убедимся, что это допущение нарушается за конечный промежуток $[t_0, T]$.

Если $v \geqslant \mu_T(\eta) > 0$, то существует положительное число $a = a[\mu_T(\eta)] = a(\eta)$, такое, что $f(v) - v \geqslant a(\eta) > 0$.

На множестве состояний $v[\varphi', t'] \leqslant f(v[\varphi, t])$, $t' \in [\beta(t), t]$, $t_0 \leqslant t$ производная dv/dt является определенно-отрицательным функционалом, т. е. для заданного числа $\eta > 0$ существует другое число $\delta_0 = \delta_0(\eta) > 0$, такое, что при условии $\rho \geqslant \eta$

$$dv/dt \leqslant -\delta_0 \tag{7.3}$$

Пусть значения функционала $v[\varphi, t]$ в моменты времени t и $\beta = \beta(t)$ соответственно равны v_t и v_β. Условие (7.1) требует выполнения неравенства $v_\beta \leqslant f(v_t)$. Поскольку значения v_β и v_t заранее неизвестны и зависят от выбора функционала v и процессов φ, а от выбора функции $f(v)$ не зависят, то может оказаться, что $v_\beta > f(v_t)$ и $v > f(v_t)$ в начальные и некоторые другие моменты из промежутка $[\beta(t), t]$. Это означает, что процессы могут придти к моменту времени t из множества состояний, лежащих за пределами множества $\{\varphi', t', \varphi, t: v \leqslant f(v_t), \beta(t) \leqslant t' \leqslant t\}$, т. е. из множества состояний $v > f(v_t)$, $\beta(t) \leqslant t' \leqslant t$. При этом не гарантируется зависимость значения dv/dt в момент времени t только от состояний процесса, удовлетворяющих условию (7.1).

Поэтому ограничимся рассмотрением процессов, для которых функционал $v = v[\varphi, t]$ убывает на величину, меньшую $a = f(v_t) - v_t$. При убывании v от значения $v_{t_0} < \mu_0$ до значения $v_t < \mu_t$ за конечное время разность $(\mu_0 - \mu_t)$ может оказаться больше разности $(f(v_t) - v_t)$. При убывании переменной v больше, чем на разность $f(v_t) - v_t = a$, оценкой (7.2) пользоваться нельзя. Поэтому разделим промежуток $[\mu_T, \mu_0]$ на $a = a(\eta)$ и введем целое число N из условия

$$N - 1 \leqslant (\mu_0 - \mu_T)/a \leqslant N \tag{7.4}$$

Покажем, что найдутся моменты времени $t_j = t_j(\eta, \delta, t_0)$, $j = 0, 1, \ldots, N$, такие, что

$$v[\varphi, t] < \mu_T + (N - j)\, a \tag{7.5}$$

при $t > t_j$, $j = 0, 1, \ldots, N$ и, следовательно, будет выполняться условие $v[\varphi, t] < \mu_T$ при $t \geqslant T = t_N$.

При $j = 0$ неравенство (7.5) выполняется. Действительно, из (7.4) следует, что $\mu_T + aN \geqslant \mu_0$. Тогда, если $v[\varphi, t] \geqslant \mu_T + aN$ при $t = 0$, то $v[\varphi, t] \geqslant \mu_0$ при $t \geqslant t_0$, что противоречит неравенству (7.2). Таким образом, при $j = 0$ неравенство (7.5) выполняется.

Допустим, что для значения индекса $j = k$ при $t \geqslant t_k$ выполняется неравенство (7.5). Докажем, что это условие выполняется и для $j = k + 1$.

Из предположений $\beta(t_0) \leqslant \beta(t)$, $\beta(t) \leqslant t$, $\lim \beta(t) = \infty$ при $t \to \infty$ следует, что для любого заданного числа $t_k > t_0$ найдется такой момент времени $t_k^* \geqslant t_k$, что $\beta(t) \geqslant t_k$ при $t \geqslant t_k^*$. Если $t' \geqslant t_k$, то из (7.5) следует $v[\varphi', t'] \leqslant \mu_T + a(N - k)$. Следует убедиться, что за конечный промежуток времени выполняется неравенство $v[\varphi', t'] \leqslant \mu_T + a(N - k - 1)$. Допустим, что в моменты времени $t > t_k^*$ выполняется также неравенство $v[\varphi, t_k^*] > \mu_T + a(N - k - 1)$. При этом $\beta(t) \geqslant t_k$ и процесс с последействием, который влияет на величину производной dv/dt, будет лежать внутри прямоугольника

$$\mu_T + a(N - k - 1) < v[\varphi', t'] \leqslant \mu_T + a(N - k), \quad \beta(t) \leqslant t' \leqslant t \tag{7.6}$$

Следовательно, $dv/dt \leqslant -\delta_0(\eta)$. Принимая наихудший случай $(v)_{t_k^*} = \mu_T + a(N - k)$ и интегрируя $dv/dt \leqslant -\delta_0(\eta)$ от $t = t_k^*$ вдоль процесса с последействием, получим

$$v[\varphi, t] \leqslant \mu_T + a(N - k) - (t - t_k^*)\, \delta_0(\eta)$$

За промежуток времени $\Delta t_k = a(\eta)/\delta_0(\eta)$ функционал $v[\varphi, t]$ убывает не менее, чем на величину $a(\eta)$, т. е. $(t - t_k^*)\, \delta_0(\eta) \geqslant a(\eta)$ при $t = t_{k+1}$, где $t_{k+1} = t_k^* + a(\eta)/\delta_0(\eta)$.

Таким образом, при $t \geqslant t_{k+1}$ будет выполняться неравенство

$$v[\varphi, t] \leqslant \mu_T + a(N - k - 1)$$

Нарушение его при некотором $t \geqslant t_{k+1}$ противоречит определенной отрицательности производной dv/dt в области (7.6). Таким образом, начиная с момента времени $t = t_{k+1}$ выполняется неравенство (7.5) для значения индекса $j = k + 1$. Применяя метод полной индукции, получим, что неравенство (7.5) выполняется для любого j, следовательно, и при $j = N$. Полагая $j = N$, из (7.5) получим

$$t \geqslant t_N = T, \quad v[\varphi, t] < \mu_T$$

Следовательно, допущение о том, что $v > \mu_T$ выполняется при любом $t \geqslant t_0$, нарушается при конечном значении $T = t_N$. При $t \geqslant t_N = T$ выполняется $v < \mu_T$, следовательно, $\rho < \eta$.

Таким образом, за конечный промежуток премени величина ρ остается меньшей любого сколь угодно малого положительного числа η, т. е. $\overline{\lim}\, \rho \leqslant 0$ при $t \to 0$, что и требовалось доказать.

Поступила 27 IV 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Разумихин Б. С.* Об устойчивости систем с запаздыванием. ПММ, 1956, т. 20, вып. 4.
2. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., Физматгиз, 1959.
3. *Сиразетдинов Т. К., Семенов П. К.* Об устойчивости процессов с распределенными параметрами с запаздыванием. В сб.: Проблемы аналитической механики, теории устойчивости движения и управления. М., «Наука», 1975.
4. *Мовчан А. А.* Устойчивость процессов по двум метрикам. ПММ, 1960, т. 24, вып. 6.
5. *Матросов В. М., Анапольский Л. Ю.* Метод сравнения в анализе процессов. В сб.: Проблемы аналитической механики, теории устойчивости и управления. М., «Наука», 1975.
6. *Сиразетдинов Т. К.* Устойчивость множества процессов. В сб.: Проблемы устойчивости движения, аналитической механики и управления движением. «Наука», СО АН СССР, 1979.
7. *Сиразетдинов Т. К.* Устойчивость систем с распределенными параметрами. Изд-во Казанск. авиац. ин-та, 1971.