Прикладная математика и механика. Том 44, вып. 6, 1980

УДК 531.36:534

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ МНОГОКРАТНОГО РЕЗОНАНСА НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА

В. Э. Жавнерчик

(Минск)

Исследуется устойчивость тривиального решения автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений в критическом случае n пар чисто мнимых корней при наличии многократного резонанса нечетного порядка. Для канонической системы рассматриваются все возможные случаи наличия двукратного резонанса третьего порядка. В качестве примера рассматривается задача об устойчивости относительного равновесия спутника на круговой орбите.

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$x^{\cdot} = Ax + X(x), \quad X(0) = 0, \quad x \in E_{2n} \tag{1.1}$$

где A — квадратная постоянная матрица, имеющая лишь чисто мнимые и различные собственные значения $\pm i\omega_s (\omega_s > 0,\ s = 1, \ldots, n)$, $X(x)$ — голоморфная вектор-функция, разложение которой по степеням x начинается формой m-го порядка, m — четное число.

Предположим, что в системе (1.1) имеет место μ-кратный внутренний резонанс $(m+1)$-го порядка, т. е. выполняются всевозможные резонансные соотношения вида

$$\begin{gathered}\langle \Omega, P_\nu \rangle = 0, \quad \nu = 1, \ldots, \mu \\ \Omega = (\omega_1, \ldots, \omega_q), \quad P_\nu = (p_{\nu 1}, \ldots, p_{\nu q}), \quad q \leqslant n \\ |P_\nu| = \sum_{j=1}^{q} |p_{\nu j}| = k, \quad k = m + 1\end{gathered} \tag{1.2}$$

где P_ν — целочисленный вектор, компоненты которого не содержат общего множителя. Для определенности можно считать, что первая ненулевая компонента вектора P_ν положительна.

В работах [1–3] исследовалась задача об устойчивости тривиального решения системы (1.1) при наличии μ-кратного резонанса (1.2), удовлетворяющего условию

$$p_{\nu j}{}^* = (-1)^{\alpha_\nu + \beta_j} p_{\nu j} \geqslant 0, \quad \nu = 1, \ldots, \mu, \quad j = 1, \ldots, q \tag{1.3}$$

для некоторых α_ν, β_j, принимающих значения 1 или 2. Ниже рассматривается эта же задача без ограничения (1.3). Частный случай такой задачи рассматривался ранее [4].

При помощи специального нелинейного преобразования с учетом (1.2) систему (1.1) в полярных координатах r_s, φ_s $(s = 1, \ldots, n)$ можно привести к нормальной форме [5] вида

$$
\begin{aligned}
(1.4)\qquad & r_j^{\cdot} = 2\sum_{\nu=1}^{\mu} R_\nu Q_{\nu j}(\theta_\nu^*) + \Upsilon_j(r,\varphi)\\
& \theta_\nu^{*\cdot} = \sum_{i=1}^{\mu}\sum_{j=1}^{q} \frac{p_{\nu j}^* \operatorname{sign} p_{ij}^*}{r_j} R_i Q_{ij}'(\theta_i^*) + \Theta_{n+\nu}(r,\varphi)\\
& r_\alpha^{\cdot} = \Upsilon_\alpha(r,\varphi), \quad r_\alpha \varphi_\alpha^{\cdot} = \omega_\alpha r_\alpha + \Theta_\alpha(r,\varphi)\\
& j = 1,\ldots,q, \quad \nu = 1,\ldots,\mu, \quad \alpha = q+1,\ldots,n\\
& R_\nu^2 = \prod_{l=1}^{q} r_l^{|p_{\nu l}^*|}, \quad \theta_\nu^* = \sum_{j=1}^{q} p_{\nu j}^* \varphi_j\\
& Q_{\nu j}(\theta_\nu^*) = a_{\nu j}\cos\theta_\nu^* + b_{\nu j}\sin\theta_\nu^*, \quad Q_{\nu j}' = dQ_{\nu j}/d\theta_\nu^*\\
& r = (r_1,\ldots,r_n), \quad \varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_n), \quad \Theta_\alpha(r,\varphi) \sim O(\|r\|^{(k+1)/2})\\
& \Theta_{n+\nu}(r,\varphi) = \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{r_j}\Theta_{\nu j}(r,\varphi), \quad \Theta_{\nu j}(r,\varphi) \sim O(\|r\|^{(k+1)/2})\\
& \Upsilon_s(r,\varphi) \sim O(\|r\|^{(k+1)/2}), \quad s = 1,\ldots,n\\
& Q_{\nu j}(\theta_\nu^*) \equiv 0, \text{ если } p_{\nu j}^* = 0
\end{aligned}
$$

Соответствующая модельная система получается из (1.4) при

$$\Upsilon_s(r,\varphi) = \Theta_\nu(r,\varphi) \equiv 0, \quad s = 1,\ldots,n, \quad \nu = 1,\ldots,\mu$$

Предполагается, что

$$\sum_{j=1}^{q} |Q_{\nu j}| \not\equiv 0, \quad \nu = 1,\ldots,\mu$$

Обозначим ($\delta_{\beta h}$ — символ Кронекера)

$$
\begin{aligned}
& A_{\beta h} = \sum_{\nu=1}^{\mu} S_{\nu\beta}^{\circ} K_{\nu h} - 2\delta_{\beta h}, \quad A_{\beta,\, n+\nu} = S_{\nu\beta}^{\circ\prime}\\
& A_{n+\nu,\,\beta} = \sum_{i=1}^{\mu} (T_{\nu i}^{\circ\prime} K_{i\beta} - L_{\nu i\beta}), \quad A_{n+\nu,\, n+i} = -T_{\nu i}^{\circ}\\
& K_{\nu\beta} = \frac{1}{2\sqrt{q-\beta}}\left[\sum_{l=\beta+1}^{q} |p_{\nu l}^*| - (q-\beta)|p_{\nu\beta}^*|\right]\\
& L_{\nu i\beta} = \frac{R_i^{\circ}}{\sqrt{q-\beta}}\left[\sum_{l=\beta+1}^{q} \frac{p_{\nu l}^* \operatorname{sign} p_{il}^* Q_{il}^{\circ\prime}}{k_l} - \frac{(q-\beta)\, p_{\nu\beta}^* \operatorname{sign} p_{i\beta}^* Q_{i\beta}^{\circ\prime}}{k_\beta}\right]\\
& S_{\nu\beta}(\theta_\nu^*) = \frac{2R_\nu^{\circ}}{(q-\beta+1)\sqrt{q-\beta}}\left[\sum_{l=\beta+1}^{q} \frac{Q_{\nu l}(\theta_\nu^*)}{k_l} - \frac{(q-\beta)\, Q_{\nu\beta}(\theta_\nu^*)}{k_\beta}\right]\\
& T_{\nu i}(\theta_i^*) = R_i^{\circ} \sum_{j=1}^{q} \frac{p_{\nu j}^* \operatorname{sign} p_{ij}^*\, Q_{ij}(\theta_i^*)}{k_j}\\
& S_{\nu\beta}^{\circ} = S_{\nu\beta}(\theta_\nu^{*\circ}), \quad T_{\nu i}^{\circ} = T_{\nu i}(\theta_i^{*\circ})\\
& \beta, h = 1,\ldots,q-1, \quad \nu, i = 1,\ldots,\mu
\end{aligned}
$$

Теорема 1. Если модельная система имеет частное решение типа растущего луча

$$r_j = k_j b(t),\ b^{\cdot} = 2b^{k/2},\ k_j > 0,\ j = 1, \ldots, q$$
$$\theta_\nu^* = \theta_\nu^{*\circ} = \mathrm{const},\ \nu = 1, \ldots, \mu$$

причем

$$\det \| A_{\upsilon_\sigma} - l\delta_{\upsilon_\sigma} \| \neq 0,\ l = 1, 2, \ldots$$
$$\upsilon, \sigma = 1, \ldots, n + \mu\ (\upsilon, \sigma \neq q, \ldots, n)$$

то тривиальное решение системы уравнений (1.1) неустойчиво по Ляпунову.

Доказательство подобно доказательству теоремы из [3].

С помощью теоремы 1 в общем случае не удается получить конструктивных условий неустойчивости по Ляпунову, однако в некоторых частных случаях (например, для канонической системы с двукратным резонансом третьего порядка) последняя теорема дает и конструктивные условия.

2. Рассмотрим каноническую систему

$$p_s^{\cdot} = -\frac{\partial H(p, q)}{\partial q_s},\quad q_s^{\cdot} = \frac{\partial H(p, q)}{\partial p_s},\quad p; q \in E_n,\quad s = 1, \ldots, n \tag{2.1}$$

$$H(p, q) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n} (-1)^{\delta_s} (p_s^2 + \omega_s^2 q_s^2) + H_k + H_{k+1} + \ldots \tag{2.2}$$

где H_l — однородный полином степени l, δ_s принимают значения 1 или 2 так, что квадратичная форма в (2.2) индефинитна; среди собственных значений линеаризованной системы нет кратных и выполняются соотношения (1.2).

С помощью полиномиального канонического преобразования с учетом (1.2) гамильтониан (2.2) в полярных канонических переменных можно привести к нормальной форме

$$\Gamma = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s r_s + 2 \sum_{\nu=1}^{\mu} A_\nu R_\nu Q_\nu'(\theta_\nu^*) + \Gamma^*(r, \varphi) \tag{2.3}$$
$$Q_\nu(\theta_\nu^*) = a_\nu \cos\theta_\nu^* + b_\nu \sin\theta_\nu^* \equiv \sin\psi_\nu^*,\ a_\nu^2 + b_\nu^2 = 1$$
$$Q_\nu' = dQ_\nu / d\theta_\nu^*,\quad \Gamma^*(r, \varphi) \sim O(\| r \|^{(k+1)/2})$$
$$\lambda_s = (-1)^{\delta_s} \omega_s,\quad p_{\nu j}^* = (-1)^{\delta_j} p_{\nu j}$$
$$\nu = 1, \ldots, \mu,\quad j = 1, \ldots, q,\quad s = 1, \ldots, n$$

Модельный гамильтониан получается из (2.3) при $\Gamma^*(r, \varphi) \equiv 0$. Из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. Если каноническая система с модельным гамильтонианом имеет частное решение вида

$$r_j = k_j b(t),\ b^{\cdot} = 2b^{k/2},\ k_j > 0,\ j = 1, \ldots, q \tag{2.4}$$
$$\psi_\xi^* = (\pi/2)\,\mathrm{sign}\, A_\xi,\quad \xi = 1, \ldots, \mu_0$$
$$\psi_\eta^* = -(\pi/2)\,\mathrm{sign}\, A_\eta,\quad \eta = \mu_0 + 1, \ldots, \mu\ \ (0 \leqslant \mu_0 \leqslant \mu)$$

причем

$$\det \| A_{v\sigma} - l\delta_{v\sigma} \| \neq 0, \quad l = 1, 2, \ldots$$
$$v, \sigma = 1, \ldots, n + \mu \ (v, \ \sigma \neq q, \ldots, n)$$

то тривиальное решение канонической системы (2.1) неустойчиво по Ляпунову.

Здесь

$$A_{\beta h} = \sum_{\nu=1}^{\mu} S^{\circ}_{\nu\beta} K_{\nu h} - 2\delta_{\beta h}, \quad A_{\beta, n+\nu} = 0$$

$$A_{n+\nu, \beta} = 0, \quad A_{n+\nu, n+i} = (-1)^{\sigma_i+1} R_i^{\circ} |A_i| \sum_{j=1}^{q} \frac{p^*_{\nu j} |p^*_{ij}|}{k_j}$$

$$K_{\nu\beta} = \frac{1}{2\sqrt{q-\beta}} \left[\sum_{l=\beta+1}^{q} |p^*_{\nu l}| - (q-\beta) |p^*_{\nu\beta}| \right]$$

$$S^{\circ}_{\nu\beta} = \frac{2(-1)^{\sigma_\nu} R_\nu^{\circ} |A_\nu|}{(q-\beta+1)\sqrt{q-\beta}} \left[\sum_{l=\beta+1}^{q} \frac{p^*_{\nu l}}{k_l} - \frac{(q-\beta) p^*_{\nu\beta}}{k_\beta} \right]$$

$$\sigma_\xi = 2, \quad \xi = 1, \ldots, \mu_0, \quad \sigma_\eta = 1, \quad \eta = \mu_0 + 1, \ldots, \mu$$
$$\beta, h = 1, \ldots, q - 1, \quad \nu, i = 1, \ldots, \mu$$

Предположим, что в канонической системе (2.1) имеет место двукратный резонанс третьего порядка, причем среди его резонансных соотношений есть хотя бы одно сильное (т. е. приводящее к неустойчивости нулевое решение модельной системы [1]).

Исследуем в этом случае вопрос об устойчивости, используя результаты [2] и настоящей работы, а именно изучим следующие свойства устойчивости тривиального решения канонической системы (2.1): неустойчивость во втором порядке в силу существования у модельной системы частных решений типа растущего луча вида

$$r_u = k_u b(t), \quad b^{\cdot} = 2b^{k/2}, \quad k_u > 0, \quad u = 1, \ldots, \bar{q} \tag{2.5}$$
$$r_v = 0, \quad v = \bar{q} + 1, \ldots, q \quad (0 < \bar{q} < q)$$
$$\psi_\xi^* = (\pi/2) \operatorname{sign} A_\xi, \quad \xi = 1, \ldots, \mu_0$$
$$\psi_\eta^* = -(\pi/2) \operatorname{sign} A_\eta, \quad \eta = \mu_0 + 1, \ldots, \bar{\mu}$$
$$\psi_\zeta^* = \pm\pi/2, \quad \zeta = \bar{\mu} + 1, \ldots, \mu \quad (0 \leqslant \mu_0 \leqslant \bar{\mu} < \mu; \ \bar{\mu} > 0),$$

и вида (2.4), неустойчивость по Ляпунову, устойчивость по части переменных во втором порядке.

Составим таблицу, в которую внесем результаты исследования устойчивости (достаточные условия) во всевозможных случаях наличия в системе (2.1) двукратного резонанса третьего порядка.

В таблице двукратный резонанс (1.2) представлен матрицей

$$P^* = \| p_{\nu j}^* \| \ (\nu = 1, 2; \ j = 1, \ldots, q), \quad A = |A_1/A_2|$$

(в (2.3) A_i соответствует i-му резонансному соотношению), $l = 1, 2, \ldots$; звездочка в таблице означает, что данное свойство устойчивости имеет место при $0 < A < \infty$; прочерк означает, что для изучения данного свойства устойчивости необходимы иные методы исследования.

№	Вид резонанса	Неустойчивость во 2-м порядке		Неустойчивость по Ляпунову	Устойчивость по части переменных во 2-м порядке	№	Вид резонанса	Неустойчивость во 2-м порядке		Неустойчивость по Ляпунову	Устойчивость по части переменных во 2-м порядке
		решение вида (2.5)	решение вида (2.4)					решение вида (2.5)	решение вида (2.4)		
1	111000 000111	*	*	*	—	14	1110 1002	*	$A=2$	$A=2$	—
2	111000 00011—1	*	—	—	*	15	1110 100—2	*	$A=2$	$A=2$	—
3	11100 10011	*	$A=1$	$A=1$	—	16	1—1—10 1002	*	$A=2$	$A=2$	—
4	11100 100—1—1	*	$A=1$	$A=1$	—	17	11—10 1002	*	—	—	*
5	11100 1001—1	*	—	—	*	18	2100 0021	*	*	*	—
6	11100 00021	*	*	*	—	19	2100 002—1	*	—	—	*
7	11100 0002—1	*	—	—	*	20	111 2—10	—	*	$0<A<\infty$ $A\neq\frac{2\sqrt{l+2}}{l+1}$	—
8	11—100 00021	*	—	—	*	21	1—11 210	—	$0<A<\sqrt{3}$	$0<A<\sqrt{3}$	—
9	1110 1—101	—	$1<A<\infty$	$1<A<\infty$	—	22	1—1—1 210	—	$0<A<1$	$0<A<1$	—
10	1110 2001	*	$\sqrt{2}<A<\infty$	$\sqrt{2}<A<\infty$	—	23	210 102	*	$0<A<\sqrt{2}$	$0<A<\sqrt{2}$	—
11	1110 200—1	—	*	$0<A<\infty$ $A\neq\sqrt{\frac{2}{l+1}}$	—	24	210 10—2	*	$\sqrt{2}<A<\infty$	$\sqrt{2}<A<\infty$ $A\neq\sqrt{2(l+1)}$	—
12	1—1—10 2001	*	$0<A<\sqrt{2}$	$0<A<\sqrt{2}$ $A\neq\sqrt{\frac{2}{l+1}}$	—	25	2—10 102	—	*	$0<A<\infty$ $A\neq\sqrt{2(l+1)}$	—
13	11—10 2001	*	—	—	*						

Если в двукратном резонансе третьего порядка (1.2) все резонансные соотношения слабые, то тривиальное решение канонической системы (2.1) устойчиво во втором порядке (см. [2]).

Пример. Рассмотрим задачу об устойчивости относительного равновесия спутника на круговой орбите [6,7]. Исследуем устойчивость при значениях параметров, соответствующих пересечению резонансных кривых

$$\omega_3 - \omega_2 + \omega_1 = 0, \quad \omega_3 - 2\omega_1 = 0 \tag{2.6}$$

в области выполнения лишь необходимых условий устойчивости в плоскости $\varepsilon = C/A$, $\delta = B/A$, где A, B, C — главные центральные моменты инерции спутника (см. [7,2]).

Расчеты на ЭВМ показали, что двукратный резонанс (2.6) реализуется в точке $\varepsilon_0 = 0.912686\ldots$, $\delta_0 = 0.835888\ldots$. С помощью нормализации гамильтониан рассматриваемой задачи можно привести к виду (2.3), где $A = 1.492993\ldots < \sqrt{3}$. Так как двукратный резонанс (2.6) можно записать в виде $\lambda_3 - \lambda_2 - \lambda_1 = 0$, $\lambda_3 + 2\lambda_1 = 0$, то из результатов приведенной таблицы вытекает (см. № 21), что относительное равновесие спутника на круговой орбите в точке (ε_0; δ_0) неустойчиво по Ляпунову.

Замечание. Все результаты, полученные в [2], остаются справедливыми для рассмотренных в настоящей работе многократных резонансов (1.2). Отметим, что условия теорем 1.2 и 2.2 в [2] являются лишь достаточными, но не необходимыми.

Автор благодарит В. В. Румянцева за критические замечания к этой работе.

Поступила 8 IV 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куницын А. Л., Медведев С. В.* Об устойчивости при наличии нескольких резонансов. ПММ, 1977, т. 41, вып. 3.
2. *Жавнерчик В. Э.* Об устойчивости автономных систем при наличии нескольких резонансов. ПММ, 1979, т. 43, вып. 2.
3. *Жавнерчик В. Э.* О неустойчивости при наличии нескольких резонансов. ПММ, 1979, т. 43, вып. 6.
4. *Хазина Г. Г.* К вопросу о взаимодействии резонансов. ПММ, 1976, т. 40, вып. 5.
5. *Брюно А. Д.* Аналитическая форма дифференциальных уравнений. Тр. Моск. матем. о-ва, 1971, т. 25.
6. *Маркеев А. П., Сокольский А. Г.* К задаче об устойчивости относительного равновесия спутника на круговой орбите. Космич. исследования, 1975, т. 13, № 2.
7. *Белецкий В. В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М., Изд-во МГУ, 1975.