Прикладная математика и механика. Том 44, вып. 6, 1980

УДК 531.36:534

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕАВТОНОМНОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ РЕЗОНАНСЕ ОСНОВНОГО ТИПА

А. П. Иванов, А. Г. Сокольский

(Москва)

В нелинейной постановке рассматривается задача об устойчивости положения равновесия неавтономной гамильтоновой системы с периодическими коэффициентами, у которой два мультипликатора линеаризованной системы равны. В зависимости от коэффициентов гамильтониана доказывается устойчивость, устойчивость в конечном приближении, формальная устойчивость или неустойчивость по Ляпунову.

1. Рассмотрим неавтономную гамильтонову систему с двумя степенями свободы

$$\frac{dq_k}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_k},\quad \frac{dp_k}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_k}\quad (k=1,2) \tag{1.1}$$

функция Гамильтона которой $H = H(q_k, p_k, t)$ аналитична по q_k, p_k в окрестности тривиального положения равновесия

$$H = H_2 + \ldots + H_m + \ldots \tag{1.2}$$

где H_m — однородные многочлены степени m относительно q_k, p_k с 2π-периодическими и непрерывными по t коэффициентам $h_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}(t)$.

Задача об устойчивости такой системы к настоящему времени решена почти до конца [1, 2]. Нерассмотренным остался случай, который в прикладных задачах соответствует так называемому параметрическому резонансу основного типа [3] и, как правило, отвечает границе области устойчивости линеаризованной системы. Изучение этого случая диктуется необходимостью полного решения вопроса об устойчивости в конкретных прикладных задачах механики. В качестве примера можно привести задачу об устойчивости треугольных точек либрации плоской эллиптической ограниченной задачи трех тел при граничных значениях эксцентриситета и соотношения масс. К системам рассматриваемого типа приводят и задачи исследования произвольных периодических движений в автономных гамильтоновых системах при использовании изоэнергетической редукции.

Изучим сначала вопрос о нормализации линеаризованной системы с гамильтонианом H_2. В рассматриваемом случае без ограничения общности можно предполагать, что в системе уже проделано линейное каноническое преобразование, разделяющее переменные, и функция H_2 приведена к виду

$$H_2 = h_2(q_1, p_1) + {}^1/_2\delta_2\lambda_2(q_2{}^2 + p_2{}^2)\quad (\delta_2 = \pm 1,\quad \lambda_2 > 0) \tag{1.3}$$

Поэтому будем пока считать, что исходная система имеет одну степень свободы и рассмотрим ее подробнее.

Пусть $\mathrm{X}(t)$ — матрица фундаментальных решений линейной системы с гамильтонианом $h_2(q_1, p_1)$, нормированная начальным условием $\mathrm{X}(0) = \mathrm{E}$ (E — единичная матрица). Тогда при параметрическом резонансе основного типа оба собственных значения матрицы $\mathrm{X}(2\pi)$ (т. е. мультипликаторы ρ — корни характеристического уравнения $\det \| \mathrm{X}(2\pi) - \rho\mathrm{E} \| = 0$) вещественны, равны между собой и равны плюс или минус единице. Это означает, что мнимые части характеристических показателей $\pm i\lambda_1$ ($\rho = \exp(\pm 2\pi i\lambda_1)$) — целые или полуцелые числа. Кроме того, так как матрица $\mathrm{X}(2\pi)$ имеет кратные собственные значения, то ее нормальная форма (а следовательно, и нормальная форма гамильтониана) будет зависеть от кратности элементарных делителей характеристической матрицы $\mathrm{X}(2\pi) - \rho\mathrm{E}$. Таким образом, приходим к необходимости раздельного рассмотрения четырех случаев: 1) $2\lambda_1 = 2n + 1$, элементарные делители просты; 2) $2\lambda_1 = 2n + 1$, элементарные делители непросты; 3) $2\lambda_1 = 2n$, элементарные делители просты; 4) $2\lambda_1 = 2n$, элементарные делители непросты. Здесь n — целые числа, которые, как будет видно из дальнейшего (см. (2.4)), всегда можно считать равными нулю. По аналогии с автономными системами скажем, что в случаях 1), 2) имеет место резонанс второго порядка, а в случаях 3), 4) — резонанс первого порядка.

Линейное преобразование $\| q_1 p_1 \|^T = \mathrm{N}(t) \| q_1' p_1' \|^T$ с дифференцируемой и 2π-периодической по t, вещественной, симплектической матрицей $\mathrm{N}(t)$, приводящее гамильтониан $h_2(q_1, p_1)$ к нормальной форме, можно построить по аналогии с работами [1, 2].

Теорема 1.1. Гамильтониан $h_2(q_1, p_1)$ приводится к одной из следующих нормальных форм:

$$h_2(q_1', p_1') = {}^1/_2\lambda_1(q_1'^2 + p_1'^2) \quad (\lambda_1 = {}^1/_2) \tag{1.4}$$

$$\mathrm{N}(t) = \mathrm{X}(t)\,\mathrm{Q}(t), \quad \mathrm{Q}(t) = \begin{Vmatrix} \cos\lambda_1 t & -\sin\lambda_1 t \\ \sin\lambda_1 t & \cos\lambda_1 t \end{Vmatrix} \quad \text{(случай 1)}$$

$$h_2(q_1', p_1') \equiv 0 \tag{1.5}$$

$$\mathrm{N}(t) = \mathrm{X}(t) \quad (\mathrm{X}(t + 2\pi) = \mathrm{X}(t)) \quad \text{(случай 3)}$$

$$h_2(q_1', p_1') = \frac{1}{2}\delta_1 p_1'^2 \quad (\delta_1 = \pm 1) \tag{1.6}$$

$$\mathrm{N}(t) = \mathrm{X}(t)\,\mathrm{P}\mathrm{Q}(t), \quad \mathrm{Q}(t) = \begin{Vmatrix} 1 & -\delta_1 t \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \quad \text{(случай 4)}$$

Постоянная матрица P определяется по одной из формул

$$\mathrm{P} = \begin{Vmatrix} \varkappa_{12} & 0 \\ \delta_1 \dfrac{x_{22} - 1}{\sqrt{2\pi |x_{12}|}} & \dfrac{1}{\varkappa_{12}} \end{Vmatrix}, \quad \delta_1 = \operatorname{sign} x_{12}, \quad \text{если } x_{12} \neq 0$$

$$\mathrm{P} = \begin{Vmatrix} \delta_1 \dfrac{x_{11} - 1}{\sqrt{2\pi |x_{21}|}} & \dfrac{1}{\varkappa_{21}} \\ -\varkappa_{21} & 0 \end{Vmatrix}, \quad \delta_1 = -\operatorname{sign} x_{21}, \quad \text{если } x_{21} \neq 0$$

где $\varkappa_{jk} = \sqrt{|x_{jk}| / (2\pi)}$, а x_{jk} $(j, k = 1, 2)$ — элементы матрицы $\mathrm{X}(2\pi)$.

Доказательство теоремы 1.1 проводится непосредственной проверкой свойств матриц $\mathrm{N}(t)$.

Нормальные формы (1.4)—(1.6) совпадают с нормальными формами автономных систем (для которых λ_1 имеет смысл частоты линейных колебаний) в соответствующих резонансных случаях.

Покажем, что случай 2) в гамильтоновых системах никогда не осуществляется. Предположим противное: пусть $\lambda_1 = {}^1/_2 + n$ и элементарные делители характеристической матрицы $X(2\pi) - \rho E$ (где $\rho = \exp(2\pi i\lambda_1) = -1$) непросты. В силу теоремы Ляпунова о приводимости такая система обязательно приводится к системе с постоянными коэффициентами

$$dq'/dt = a_{11}q' + a_{12}p', \quad dp'/dt = a_{21}q' + a_{22}p' \tag{1.7}$$

Корни определяющего уравнения этой системы по предположению должны быть чисто мнимыми. Отсюда $a_{11} + a_{22} = 0$ и, следовательно, система (1.7) каноническая. Но гамильтониан любой одномерной автономной канонической системы с непростыми элементарными делителями приводится к виду (1.6) и матрицей фундаментальных решений $Q(t)$ ($Q(0) = E$), которая при $t = 2\pi$ имеет двукратное собственное значение $\rho = 1$. Матрица фундаментальных решений исходной системы подобна матрице $Q(t)$, так как $X(t) = N(t)\,Q(t)\,N^{-1}(t)$. Но подобные матрицы должны иметь одинаковые собственные значения. Следовательно, собственные значения матрицы $X(2\pi)$ также равны единице, что противоречит исходному предположению $\lambda_1 = {}^1/_2 + n$ ($\rho = -1$). Поэтому случай 2) можно не рассматривать.

В дальнейшем будем считать, что линейная нормализация уже проведена и квадратичная часть гамильтониана (1.2) имеет нормальный вид (1.3), в котором $h_2(q_1, p_1)$ определяется формулами (1.4)—(1.6) для случаев 1), 3), 4) соответственно.

В нелинейной постановке исследование устойчивости одномерной системы проводилось в работах [5–7] (см. также обзор [8]) для разных интересных частных подслучаев. Наиболее важные результаты получены в работах [6,7]. Случай многомерных гамильтоновых систем почти не рассмотрен. Результаты данной работы обобщают упомянутые исследования. При этом, вообще говоря, достаточно рассмотреть систему с двумя степенями свободы, а затем все результаты легко переносятся на случай $n+1$ степеней свободы, если только характеристические показатели $\pm i\lambda_2, \ldots, \pm i\lambda_{n+1}$ не связаны соотношениями параметрического резонанса комбинационного или основного типов.

2. Рассмотрим вопрос об устойчивости системы (1.1) в случае 1). Проведем в системе нелинейную нормализацию, чтобы новая функция Гамильтона K приобрела более простой вид. Для этого сначала перейдем к комплексным переменным q_k^*, p_k^* по формулам ($\delta_1 = 1$)

$$q_k^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\delta_k q_k + ip_k), \quad p_k^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(iq_k - \delta_k p_k) \quad (k = 1, 2) \tag{2.1}$$

В комплексных переменных имеем $H_2^* = i\lambda_1 q_1^* p_1^* + i\lambda_2 q_2^* p_2^*$, где в рассматриваемом случае $\lambda_1 = {}^1/_2$, а коэффициенты форм H_m^* удовлетворяют соотношениям вещественности

$$h^*_{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2} = i^m \delta_1^{\nu_1+\mu_1}\delta_2^{\nu_2+\mu_2}\bar{h}^*_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} \tag{2.2}$$

Тогда коэффициенты производящей функции S^* нормализующей полиномиальной замены должны являться 2π-периодическими по t решениями дифференциальных уравнений [2]

$$\begin{gathered}(d/dt + ir_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2})\, s^*_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} = k^*_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} - g^*_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} \\ r_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} = \lambda_1(\nu_1 - \mu_1) + \lambda_2(\nu_2 - \mu_2)\end{gathered} \tag{2.3}$$

где $g^*_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}(t)$ — коэффициенты формы G_m^*, определяемой однозначно с помощью рекуррентных формул по коэффициентам членов менее высокого порядка [1]. Из (2.3) видно, что если $r_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} \neq 0 \pmod 1$, то можно положить $k^*_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}(t) \equiv 0$. Если $r_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ — целое число, то уничтожить соответствующий член в новом гамильтониане, вообще говоря, не удается. Однако можно так выбрать $s^*_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}(t)$, чтобы в разложении $k^*_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}(t)$ в ряд Фурье осталась только резонансная гармоника. А именно, можно положить

$$k^*_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}(t) = \varkappa_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} \exp(-ir_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}t) \tag{2.4}$$

$$\varkappa_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} = a_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} + ib_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g^*_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}(t)\exp(ir_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}t)\,dt$$

При этом числа $\varkappa_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ обладают свойством (2.2) и не меняются при замене $\lambda_k \to \lambda_k + n$ (n — произвольное целое число).

Таким образом, после нелинейной нормализации до членов порядка m гамильтониан принимает вид

$$K^* = i\lambda_1 Q_1^* P_1^* + i\lambda_2 Q_2^* P_2^* + \tag{2.5}$$
$$+ \sum \varkappa_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} \exp(-ir_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}t)\, Q_1^{*\nu_1} Q_2^{*\nu_2} P_1^{*\mu_1} P_2^{*\mu_2} + K^*_{m+1} + \ldots$$

где суммирование производится по таким неотрицательным индексам ν_1, ν_2, μ_1, μ_2, что $3 \leqslant \nu_1 + \nu_2 + \mu_1 + \mu_2 \leqslant m$, а $r_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} = n$ (целые числа). Наконец, в (2.5) перейдем к вещественным полярным переменным (φ_k — координаты, $r_k \geqslant 0$ — импульсы) по формулам

$$Q_k^* = i\sqrt{r_k}\exp[i(\delta_k\varphi_k + \lambda_k t)], \quad P_k^* = -\delta_k\sqrt{r_k}\exp[-i(\delta_k\varphi_k + \lambda_k t)] \tag{2.6}$$

Задачи об устойчивости исходной системы по отношению к переменным q_k, p_k и нормализованной системы по отношению к переменным r_k эквивалентны.

Ограничимся анализом на основе членов до четвертого порядка включительно ($m = 3, 4$). Нормальная форма будет различной в следующих четырех подслучаях (n — целые числа): 1а) $3\lambda_2 \neq n$, $4\lambda_2 \neq 2n + 1$, $6\lambda_2 \neq 2n + 1$; 1б) $3\lambda_2 = n$; 1в) $4\lambda_2 = 2n + 1$; 1г) $6\lambda_2 = 2n + 1$.

В подслучае 1а) нормальная форма такова:

$$K = K^{(0)} + K^{(1)} \tag{2.7}$$

$$K^{(0)} = \Phi_{40}(\varphi_1) r_1^2 + \Phi_{22}(\varphi_1) r_1 r_2 + \Phi_{04} r_2^2, \quad K^{(1)} = K_5 + \ldots \tag{2.8}$$

$$\Phi_{40}(\varphi_1) = 2a_{4000}\cos 4\varphi_1 - 2\delta_1 b_{4000}\sin 4\varphi_1 - 2\delta_1 b_{3010}\cos 2\varphi_1 -$$
$$- 2a_{3010}\sin 2\varphi_1 - a_{2020}$$

$$\Phi_{22}(\varphi_1) = -2\delta_2 b_{2101}\cos 2\varphi_1 - 2\delta_1\delta_2 a_{2101}\sin 2\varphi_1 - \delta_1\delta_2 a_{1111},$$

$$\Phi_{04} = -a_{0202}$$

Теорема 2.1. 1) Если существует такое значение $\varphi_1^* \in [0, 2\pi]$, что $\Phi_{40}(\varphi_1^*) = 0$, а $\Phi_{40}'(\varphi_1^*) \neq 0$, то положение равновесия неустойчиво по Ляпунову. 2) Если $\Phi_{40}(\varphi_1) \neq 0$ ни при каких вещественных φ_1, то положение равновесия устойчиво при учете в гамильтониане (1.2) членов до четвертого

[1] *Маркеев А. П., Сокольский А. Г.* Некоторые вычислительные алгоритмы нормализации гамильтоновых систем. Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, 1976, № 31.

порядка включительно. 3) Если $\Phi_{40}(\varphi_1) \neq 0$ и исходная система имеет одну степень свободы, то ее положение равновесия устойчиво по Ляпунову. 4) Если при всех φ_1 функция $K^{(0)}$ будет знакоопределенной при $r_1 \geqslant 0$, $r_2 \geqslant 0$, то имеет место формальная устойчивость.

Неустойчивость доказывается построением функции Четаева [1,2,4]

$$V = [r_1^\alpha - r_2^2]\sin\Psi, \quad \Psi = \frac{\pi}{2\varepsilon}(\varphi_1 - \varphi_1^* + \varepsilon), \quad 2 < \alpha < 3 \tag{2.9}$$

где, используя периодичность $\Phi_{40}(\varphi_1)$, можно так подобрать ε, чтобы в окрестности $|\varphi_1 - \varphi_1^*| < \varepsilon$ выполнялось неравенство $\Phi_{40}'(\varphi_1) < 0$. Тогда в области $V > 0$: $\{|\varphi_1 - \varphi_1^*| < \varepsilon,\ r_2 = \beta r_1^{\alpha/2},\ 0 < \beta < 1\}$ производная функции (2.9) в силу уравнений движения с гамильтонианом (2.7)

$$\frac{dV}{dt} = r_1^{\alpha+1}\left[\frac{\pi}{\varepsilon}(1-\beta^2)\Phi_{40}(\varphi_1)\cos\Psi - \alpha\Phi_{40}'(\varphi_1)\sin\Psi\right] + o(r_1^{\alpha+1})$$

будет определенно-положительной [4], откуда на основании теоремы Четаева и получаем неустойчивость положения равновесия.

Так как $r_2 = \mathrm{const}$ — интеграл укороченной системы с гамильтонианом $K^{(0)}$, то $G = sr_2 + K^{(0)}$, где $s = \mathrm{sign}\,\Phi_{40}(\varphi_1)$ — также интеграл укороченной системы, т. е. $dG/dt = 0$, причем этот интеграл знакоопределен. Отсюда на основании теоремы Ляпунова об устойчивости (G — функция Ляпунова) получаем устойчивость полной системы в четвертом порядке. (Если $k\lambda_2 \neq n$, где $k = 3, \ldots, 2m+1$, то отсюда даже следует устойчивость в m-м порядке, а при иррациональном λ_2 — формальная устойчивость [9].)

Если исходная система одномерна и $\Phi_{40}(\varphi_1) \neq 0$, то по теореме 2.1 из работы [4] (переход к переменным действие — угол и использование теоремы Мозера об инвариантных кривых) получаем устойчивость положения равновесия по Ляпунову.

Для доказательства формальной устойчивости заметим, что после проведения описанной выше нелинейной нормализации до членов бесконечного порядка функция (2.7) не будет зависеть от времени явно, т. е. при выполнении условий теоремы будет знакоопределенным формальным интегралом. Тогда, согласно определению [9], положение равновесия формально устойчиво, т. е. устойчиво в любом конечном порядке.

В заключение доказательства теоремы 2.1 заметим, что сформулированные в ней условия в конкретной механической задаче легко проверяются. После замены $x = \cos 2\varphi_1$ проблема сводится к выяснению условий расположения на отрезке $[-1, 1]$ корней алгебраического уравнения четвертой степени, которое разрешается в радикалах. Удобней, однако, использовать косвенные методы типа метода Штурма.

Для подслучая 1б) в нормальной форме (2.8)

$$K^{(0)} = \Phi_{03}(\varphi_2)\, r_2^{3/2},\ K^{(1)} = K_4 + \ldots \tag{2.10}$$

$$\Phi_{03}(\varphi_2) = 2b_{0300}\cos 3\varphi_2 + 2\delta_2 a_{0300}\sin 3\varphi_2$$

Теорема 2.2. Если в (2.10) $a_{0300}^2 + b_{0300}^2 \neq 0$, то положение равновесия неустойчиво.

Для подслучая 1в) имеем

$$K^{(0)} = \Phi_{12}(\varphi_1, \varphi_2) r_1^{1/2} r_2, \quad K^{(1)} = K_4 + \ldots \tag{2.11}$$

$$\Phi_{12} = 2b_{1200}\cos(\varphi_1 + 2\delta_1\delta_2\varphi_2) + 2\delta_1 a_{1200}\sin(\varphi_1 + 2\delta_1\delta_2\varphi_2) + $$
$$+ 2\delta_1 a_{0120}\cos(\varphi_1 - 2\delta_1\delta_2\varphi_2) + 2b_{0120}\sin(\varphi_1 - 2\delta_1\delta_2\varphi_2)$$

Теорема 2.3. Если в (2.11) $(a_{1200}^2 + b_{1200}^2 - a_{0120}^2 - b_{0120}^2)\delta_1\delta_2 > 0$, то положение равновесия неустойчиво.

Доказательство теорем 2.2 и 2.3 можно провести с помощью теоремы Четаева аналогично работам [1, 2, 4] и теореме 2.1, заметив, что при любых значениях коэффициентов функций Φ_{03} и Φ_{12} (не обращающихся одновременно в нуль) эти функции будут принимать значения обоих знаков. Заметим только, что подслучай 1в) эквивалентен одновременному выполнению резонансных соотношений $\lambda_1 + 2\lambda_2 = n_1$ и $\lambda_1 - 2\lambda_2 = n_2$, где n_1, n_2 — целые числа различной четности.

Для подслучая 1г) получаем

$$K^{(0)} = \Phi_{40}(\varphi_1) r_1^2 + \Phi_{22}(\varphi_1) r_1 r_2 + \Phi_{13}(\varphi_1, \varphi_2) r_1^{1/2} r_2^{3/2} + \tag{2.12}$$
$$+ \Phi_{04} r_2^2, \quad K^{(1)} = K_5 + \ldots$$

$$\Phi_{13} = 2a_{1300}\cos(\varphi_1 + 3\delta_1\delta_2\varphi_2) - 2\delta_1 b_{1300}\sin(\varphi_1 + 3\delta_1\delta_2\varphi_2) -$$
$$- 2\delta_1 b_{0310}\cos(\varphi_1 - 3\delta_1\delta_2\varphi_2) + 2a_{0310}\sin(\varphi_1 - 3\delta_1\delta_2\varphi_2)$$

Теорема 2.4. 1) Если существует такое значение $\varphi_1^* \in [0, 2\pi]$, что $\Phi_{40}(\varphi_1^*) = 0$, а $\Phi_{40}'(\varphi_1^*) \neq 0$, то положение равновесия неустойчиво. 2) Если при $0 \leqslant \varphi_1 < 2\pi$, $0 \leqslant \varphi_2 < 2\pi$, $r_1 \geqslant 0$, $r_2 \geqslant 0$ функция $K^{(0)}$ знакоопределена, то положение равновесия формально устойчиво.

3. Рассмотрим случай 3), когда $\lambda_1 = 0$ и характеристическая матрица имеет простые элементарные делители. Отметим, что с прикладной точки зрения этот случай менее интересен, чем рассмотренный в п. 4 случай непростых элементарных делителей, так как для его осуществления необходимо выполнение дополнительных условий на элементы матрицы $\mathbf{X}(2\pi)$, которые приводят к уменьшению на единицу $\operatorname{rg}[\mathbf{X}(2\pi) + \mathbf{E}]$. Поэтому ограничимся здесь только кратким описанием основных результатов.

При анализе на основе членов до четвертого порядка возможны 3 подслучая (n — целые числа): 3а) $3\lambda_2 \neq n$, $4\lambda_2 \neq 2n + 1$; 3б) $3\lambda_2 = n$; 3в) $4\lambda_2 = 2n + 1$.

Для подслучая 3а) в нормальной форме (2.7)

$$K^{(0)} = \Phi_{30}(\varphi_1) r_1^{3/2} + \Phi_{40}(\varphi_1) r_1^2 + \Phi_{22}(\varphi_1) r_1 r_2 + \Phi_{04} r_2^2$$

$$\Phi_{30}(\varphi_1) = 2b_{3000}\cos 3\varphi_1 - 2\delta_1 a_{3000}\sin 3\varphi_1 +$$
$$+ 2\delta_1 a_{2010}\cos\varphi_1 - 2b_{2010}\sin\varphi_1$$

а остальные функции определены в (2.8). При этом в формулах (2.4), по которым вычисляются величины $a_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$, $b_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$, надо положить $\lambda_1 = 0$, т. е. в (2.3) $r_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} = \lambda_2(\nu_2 - \mu_2)$.

Теорема 3.1. Если $a_{3000}^2 + b_{3000}^2 + a_{2010}^2 + b_{2010}^2 \neq 0$, то положение равновесия неустойчиво. Если же $\Phi_{30}(\varphi_1) \equiv 0$, то справедлива теорема 2.1.

Первое утверждение теоремы 3.1 доказывается с помощью функции Четаева (2.9).

Далее будем считать, что $\Phi_{30}(\varphi_1) \equiv 0$. Подслучай 3б) полностью аналогичен подслучаю 1б) и теорема 2.2 также справедлива.

Подслучай 3в) аналогичен подслучаю 1г). Теперь нормальная форма будет определяться выражениям (2.7), (2.8), где

$$\Phi_{04} = \Phi_{04}(\varphi_2) = 2a_{0400} \cos 4\varphi_2 - 2\delta_2 b_{0400} \sin 4\varphi_2 - a_{0202}$$

Теорема 2.4 остается справедливой. Кроме того, к ней можно теперь добавить утверждение: 3) Если существует такое значение $\varphi_2^* \in [0,2\pi]$, что $\Phi_{04}(\varphi_2^*) = 0$, а $\Phi_{04}'(\varphi_2^*) \neq 0$, то положение равновесия неустойчиво. Оно доказывается с помощью функции Четаева (2.9), в которой индексы 1 и 2 у переменных надо поменять местами.

4. Пусть теперь $\lambda_1 = 0$, а элементарные делители непросты. Отметим, что в отличие от рассмотренных ранее случаев движение, описываемое линейной системой, неустойчиво. Однако, как и в автономной задаче [4], из такой неустойчивости (решение растет как линейная функция времени) еще не следует неустойчивость полной нелинейной системы (см. также [7]).

Для проведения нелинейной нормализации введем комплексные переменные q_2^*, p_2^* по формулам (2.1), а переменные q_1, p_1 оставим без изменения, обозначив их через q_1^*, p_1^*. В комплексных переменных теперь $H_2^* = {}^1/_2\delta_1 p_1^{*2} + i\lambda_2 q_2^* p_2^*$, а вместо (2.2) имеем теперь такие соотношения вещественности:

$$h^*_{\nu_1\mu_1\mu_1\nu_2} = (i\delta_2)^{\nu_2+\mu_2}\, \bar{h}^*_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} \tag{4.1}$$

Тогда уравнения для определения коэффициентов производящей функции и новой функции Гамильтона принимают вид

$$\left(\frac{d}{dt} + ir_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}\right) s^*_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} + \delta_1(\nu_1+1)\, s^*_{\nu_1+1,\,\nu_2,\,\mu_1-1,\,\mu_2} = \tag{4.2}$$
$$= k^*_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} - g^*_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}, \qquad r_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} = \lambda_2(\nu_2 - \mu_2)$$

Из (4.2) видно, что в K^* можно уничтожить все члены, кроме таких, для которых $r_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} = n$ (целые числа) и $\mu_1 = 0$ одновременно. Коэффициенты оставшихся членов будут определяться формулами (2.4), в которых $r_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} = \lambda_2(\nu_2 - \mu_2)$, а постоянные величины $\varkappa_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ удовлетворяют соотношениям вещественности (4.1). Тогда, сделав еще замену (2.6) для переменных с индексом 2 и опуская звездочки при переменных с индексом 1, получаем вещественную нормальную форму функции Гамильтона. Пусть $k\lambda_2 \neq n$ (n — целые числа) при $k = 3, \ldots, m$. В этом случае, подобно автономной задаче [4], имеем

$$K = \frac{1}{2}\delta_1 P_1^2 + \sum_{k=3}^{m}\sum_{l=0}^{[k/2]} A_{k-2l,\,2l} Q_1^{k-2l} r_2^{\,l} + K_{m+1} + \ldots$$

$$A_{k-2l,\,2l} = \begin{cases} (-1)^L a_{k-2l,\,l,\,0,\,l}, & l = 2L, \quad L = 0, 1, 2, \ldots \\ (-1)^L \delta_2 b_{k-2l,\,l,\,0,\,l}, & l = 2L+1 \end{cases}$$

где предполагается, что нормализация проведена до такого порядка m, что $A_{m,0} \neq 0$.

Теорема 4.1. 1) Если m — нечетное, то положение равновесия неустойчиво. 2) Если m — четное и $\delta_1 A_{m,0} < 0$, то положение равновесия неустойчиво. 3) Если m — четное, но $\delta_1 A_{m,0} > 0$, то положение равновесия устойчиво при учете членов до порядка m. 4) Если m — четное, $\delta_1 A_{m,0} > 0$ и $\delta_1 A_{0,2} > 0$, то положение равновесия формально устойчиво. 5) Если m — четное, $\delta_1 A_{m,0} > 0$ и система имеет одну степень свободы, то ее положение равновесия устойчиво по Ляпунову.

Доказательство этой теоремы получается объединением доказательств теоремы 4.1 работы [4] и теоремы 2.1 данной работы.

Подслучаи $3\lambda_2 = n$, $4\lambda_2 = 2n + 1$ и другие исследуются аналогично рассмотрениям предыдущих пунктов.

Авторы благодарят А. П. Маркеева, а также участников и руководителя семинара В. В. Румянцева за обсуждения.

Поступила 22 V 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маркеев А. П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М., «Наука», 1978.
2. *Иванов А. П., Сокольский А. Г.* Об устойчивости неавтономной гамильтоновой системы при резонансе второго порядка. ПММ, 1980, т. 44, вып. 5.
3. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М., «Наука», 1972.
4. *Сокольский А. Г.* Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при резонансе первого порядка. ПММ, 1977, т. 41, вып. 1.
5. *Levi-Civita T.* Sorpa alcuni criteri di instabilita. Ann. mat. pure ed appl., 1901, ser. 3, vol. 5, p. 221.
6. *Мерман Г. А.* О неустойчивости периодического решения канонической системы с одной степенью свободы в случае главного резонанса. В сб.: Проблемы движения искусственных небесных тел. М., Изд-во АН СССР, 1963.
7. *Мерман Г. А.* Асимптотические решения канонической системы с одной степенью свободы в случае нулевых характеристических показателей. Бюл. Ин-та теорет. астрон. АН СССР, 1964, т. 9, № 6 (109).
8. *Куницын А. Л., Маркеев А. П.* Устойчивость в резонансных случаях. В сб.: Итоги науки и техники. Сер. Общая механика, т. 4. ВИНИТИ, 1979.
9. *Moser J.* New aspects in the theory of stability of Hamiltonian systems. Communs Pure and Appl. Math., 1958, vol. 11, No. 1, p. 81—114.