совпадает с произведением $\langle x^2\rangle \langle y^2\rangle = (\langle x^2\rangle)^2\Omega^2 = {}^1/_4\varkappa^2\Omega^2(\delta-2)^{-2}$ лишь в предельном случае $\delta\to\infty$, соответствующем асимптотически нормальному распределению.

В заключение найдем, пользуясь известной [5] зависимостью, среднее в единицу времени число пересечений $n(x_0)$ процессом $x(t)$ уровня $x = x_0$ с положительной производной

$$n(x_0) = \int_0^\infty yp(x_0, y)\,dy = (\Omega/2\pi)(1 + x_0^2/\varkappa)^{-(\delta-1)} \tag{10}$$

В пределе при $D_\xi \to 0$ из (10) получаем, как и следовало ожидать

$$n(x_0) = (\Omega/2\pi)\exp(-2\alpha\Omega^2 x_0^2/D_\zeta)$$

Формула (10) наглядно показывает, как по мере приближения к границе $\delta = 1$ стохастической устойчивости системы (1) происходит непрерывное возрастание уровня параметрического усиления колебаний, вызванных внешними случайными возмущениями $\zeta(t)$.

Поступила 24 XII 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский А. А.* Фазовое пространство и статистическая теория динамических систем. М., «Наука», 1974.
2. *Диментберг М. Ф., Сидоренко А. С.* О взаимодействии между колебаниями, возникающими в линейной системе при действии внешних и параметрических случайных возмущений. Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 3.
3. *Стратонович Р. Л.* Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. М., Изд-во МГУ, 1966.
4. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М., «Наука», 1969.
5. *Свешников А. А.* Прикладные методы теории случайных функций. М., «Наука», 1968.

УДК 624.131 + 539.215

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМЫХ ВЯЗКОСЫПУЧИХ МАТЕРИАЛОВ

Л. П. Горбачев, В. Г. Григорьев, Е. Е. Ловецкий

(Москва)

Рассматривается стационарное движение несжимаемой вязкосыпучей среды. Получены уравнения движения в пограничном слое и исследовано обтекание плоской пластинки. Рассмотрено течение в плоском диффузоре и между вращающимися цилиндрами.

В ряде работ [1–3] предлагалась модель вязкосыпучей сплошной среды. Вязкосыпучий материал по существу вязкопластический, но с пределом текучести, зависящим от давления, т. е. для девиатора тензора напряжений справедливо следующее выражение [3]:

$$\sigma_{ik} = \left(\frac{\sqrt{2}\tau_s}{\sqrt{\varepsilon_{ab}\varepsilon_{ab}}} + 2\eta\right)\varepsilon_{ik} \tag{1}$$

$$\tau_s = kp, \quad \varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)$$

где k — коэффициент внутреннего, η — коэффициент вязкости, p — давление, которое считается положительным, для того чтобы рассматривать вязкосыпучую среду как сплошную.

Наличие у вязкосыпучих сред предельного напряжения сдвига обуславливает образование зон, где вязкосыпучая среда движется как твердое тело. Положение и форма границ, отделяющих зоны вязкого течения от зон квазитвердого течения, должны быть определены в процессе решения задачи. Для обычного вязкопластического материала условия на границе жесткой зоны получены в работе [4] в интегральной форме и в работе [5] в конечной форме.

Ниже приведены примеры стационарного движения несжимаемых вязкосыпучих материалов, для которых справедливо уравнение (1). Коэффициент вязкости η считается постоянным.

Рассмотрим уравнения установившегося плоского пограничного слоя в отсутствие массовых сил для вязкосыпучей среды, описываемой уравнениями движения сплошной среды в напряжениях и уравнением (1).

Введем безразмерные величины

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho U L}{\eta}, \quad \mathrm{Bi} = \frac{k p_0 L}{\eta U}, \quad x = \frac{x_1}{L}$$

$$y = \frac{x_2}{\varepsilon L}, \quad v_x = \frac{v_1}{U}, \quad v_y = \frac{v_2}{\varepsilon U}, \quad p^* = \frac{p}{p_0}$$

Здесь Re — число Рейнольдса, Bi — безразмерный параметр, характеризующий отношение пластической и вязкой диссипации энергии, x, y — продольная и поперечная координаты, p_0 — характерное давление, ε — малая величина, пока еще не определенная, но зависящая от Re и Bi.

Предположим, что величина $\partial v_x / \partial y$ всюду в пограничном слое положительна, и пренебрежем членами высшего порядка по ε. Тогда из уравнений движения получим следующие уравнения:

$$\varepsilon^2 \mathrm{Re} \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -\varepsilon^2 \frac{p_0 L}{\eta U} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \varepsilon \mathrm{Bi}^- \frac{\partial p^*}{\partial y}$$

$$0 = -\varepsilon \frac{p_0 L}{\eta U} \frac{\partial p^*}{\partial y} + \varepsilon^2 \mathrm{Bi} \left(\frac{\partial p^*}{\partial x} - 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(p^* \frac{\partial v_x / \partial x}{\partial v_x / \partial y} \right) \right)$$

Пусть $k p_0 \gg \rho U^2$, тогда имеем пластический пограничный слой ($\varepsilon = \mathrm{Bi}^{1/2}$), уравнения которого

$$0 = -\frac{\partial p^*}{\partial x} + k \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + k^2 \left(\frac{\partial p^*}{\partial x} - 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(p^* \frac{\partial v_x / \partial x}{\partial v_x / \partial y} \right) \right) \tag{2}$$

$$0 = \frac{\partial p^*}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

В этом случае ширина пограничного слоя δ растет с ростом скорости обтекания $\delta \sim L\, [\eta U/(k p_0 L)]^{1/2}$. Отметим, что для вязкопластической среды ($\tau_s = \mathrm{const}$) $\delta \sim L\, [\eta U/(\tau_s L)]^{1/2}$.

Применим уравнения (2) к задаче об обтекании плоской полубесконечной пластинки плоскопараллельным потоком вязкосыпучей среды. Пусть плоскость пластинки совпадает с полуплоскостью $x_1 x_3$, соответствующей положительным x_1 (так, что передний край пластинки — линия $x_1 = 0$). Возвращаясь в уравнениях (2) к размерным величинам, получим

$$0 = \eta \frac{\partial v_1}{\partial x_2{}^2} - 2k^2 p_0 \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial v_1 / \partial x_1}{\partial v_1 / \partial x_2} \right) \tag{3}$$

$$p = p_0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0$$

Граничные условия

$$v_1 = v_2 = 0, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 = 0; \quad v_1 = U, \quad x_2 = \pm \infty$$

Решение ищем в виде

$$v_1 = U f(\xi), \quad v_2 = U \sqrt{\frac{\eta U}{k p_0 x_1}}\, f_1(\xi), \quad \xi = x_2 \sqrt{\frac{k p_0}{x_1 \eta U}} \tag{4}$$

где f, f_1 — некоторые безразмерные функции. Решая уравнения (3) с учетом (4), можно получить: $f = -k\xi^2 + \sqrt{2k}\,|\,\xi, \,|\,\xi\,| \leqslant \sqrt{2/k}$. Сила трения, действующая на единицу площади поверхности пластинки, равна

$$\sigma_{12} = kp_0 + \eta \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\Big|_{x_2=0} = kp_0 \left(1 + \sqrt{\frac{2\eta U}{p_0 x_1}}\right)$$

Если пластинка имеет длину l (вдоль оси x_1), то полная действующая на нее сила трения, отнесенная к единице длины пластинки в поперечном (вдоль оси x_3) направлении, равна

$$F = 2\int_0^l \sigma_{12}\, dx_1 = 2kp_0 l\,(1 + 2\sqrt{2k}\,\mathrm{Bi}^{-1/2}) \tag{5}$$

Множитель 2 учитывает наличие у пластинки двух сторон, обтекаемых вязкосыпучей средой.

Рассмотрим стационарное движение вязкосыпучей среды между двумя плоскими шероховатыми стенками, наклоненными друг к другу под углом 2α, исток происходит вдоль линии пересечения плоскостей.

Выбираем цилиндрические координаты r, φ, z с осью z вдоль линии пересечения плоскостей и углом φ, отсчитываемым от биссектрисы угла 2α. Движение однородно вдоль оси z, и естественно предположить, что оно чисто радиальное, т. е. $v_\varphi = v_z = 0$, $v_r = v\,(r, \varphi)$. Уравнения движения дают систему

$$\begin{gathered}
v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \left(\nu + \frac{\sqrt{2}kp}{2\rho A}\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2}\right) + \\
+ \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sqrt{2}kp}{\rho A}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\sqrt{2}kp}{\rho A}\right) \\
0 = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{2}{r^2}\left(\nu + \frac{\sqrt{2}kp}{2\rho A}\right)\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{v}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\sqrt{2}kp}{\rho A}\right) + \\
+ \frac{1}{2r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sqrt{2}kp}{\rho A}\right) \\
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv) = 0; \quad A^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{v}{r}\right)^2 + \frac{1}{2r^2}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)^2
\end{gathered} \tag{6}$$

Из последнего уравнения видно, что rv — функция только от φ. Поэтому решение будем искать в виде

$$v = \frac{\nu}{r}\,u\,(\varphi), \quad p = \rho\frac{\nu^2}{r^2}\,w\,(\varphi) \tag{7}$$

Подставляя (7) в (6), получаем следующую систему уравнений для функций u и w:

$$\begin{gathered}
\sqrt{2}u\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{kw}{C}\right) + 2u'\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{kw}{C}\right) - w' = 0 \\
2w + u^2 + u''\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{kw}{C}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}u'\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{kw}{C}\right) = 0 \\
C = \sqrt{2u^2 + \frac{u'^2}{2}}, \quad u' = \frac{du}{d\varphi}, \quad w' = \frac{dw}{d\varphi}
\end{gathered} \tag{8}$$

Таким образом, задача сведена к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Граничными условиями являются условие обращения скорости в нуль на стенках и условие, что через любое сечение $r = \mathrm{const}$ проходит (в единицу времени) одинаковое количество сыпучей среды $Q > 0$

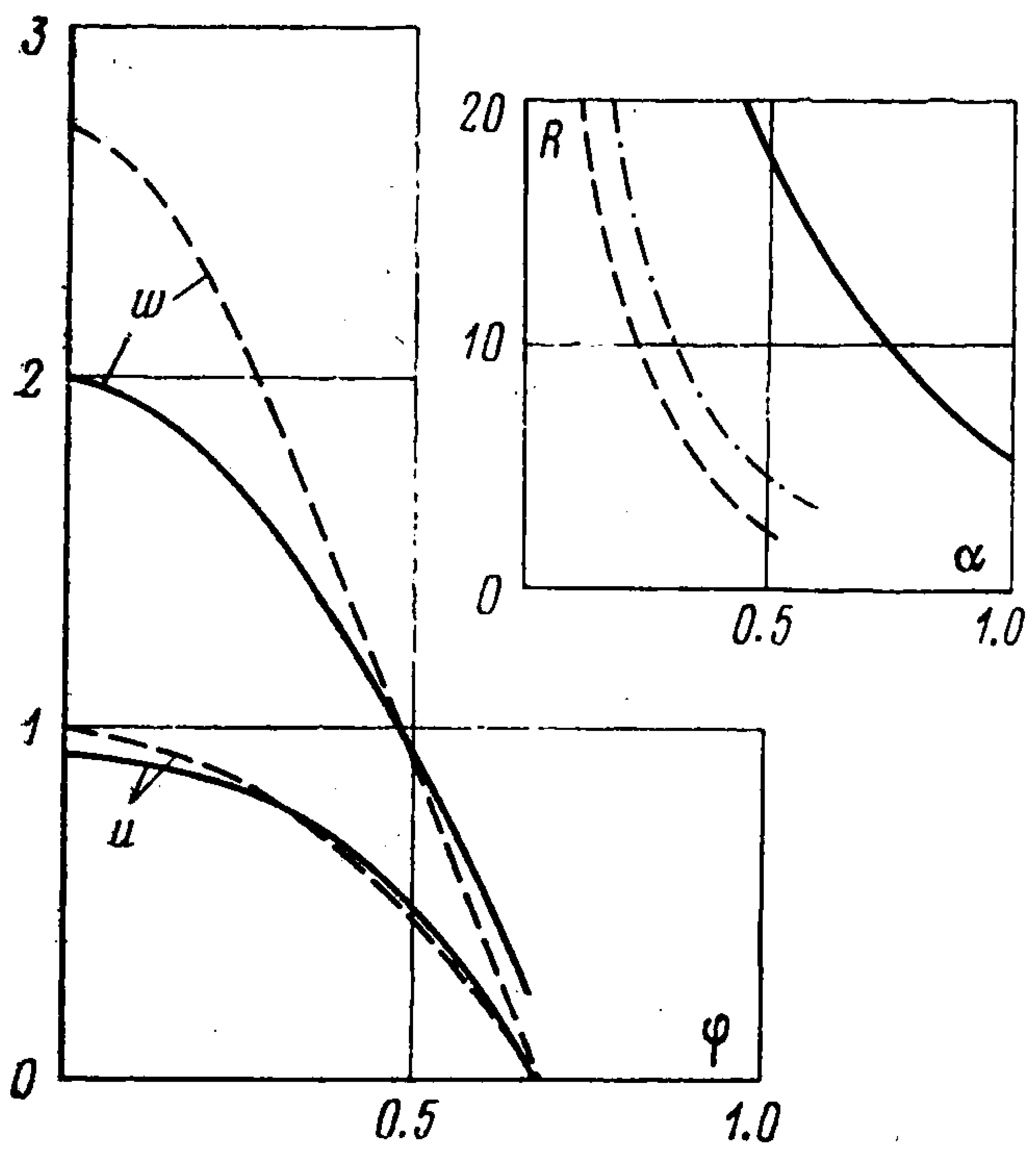
$$u\,(\pm\,\alpha) = 0, \quad Q = \rho\int_{-\alpha}^{\alpha} rv\, d\varphi = \rho\nu\int_{-\alpha}^{\alpha} u\, d\varphi$$

Отношение $R = Q / (\rho\nu)$ безразмерно и играет роль числа Рейнольдса для рассматриваемого движения.

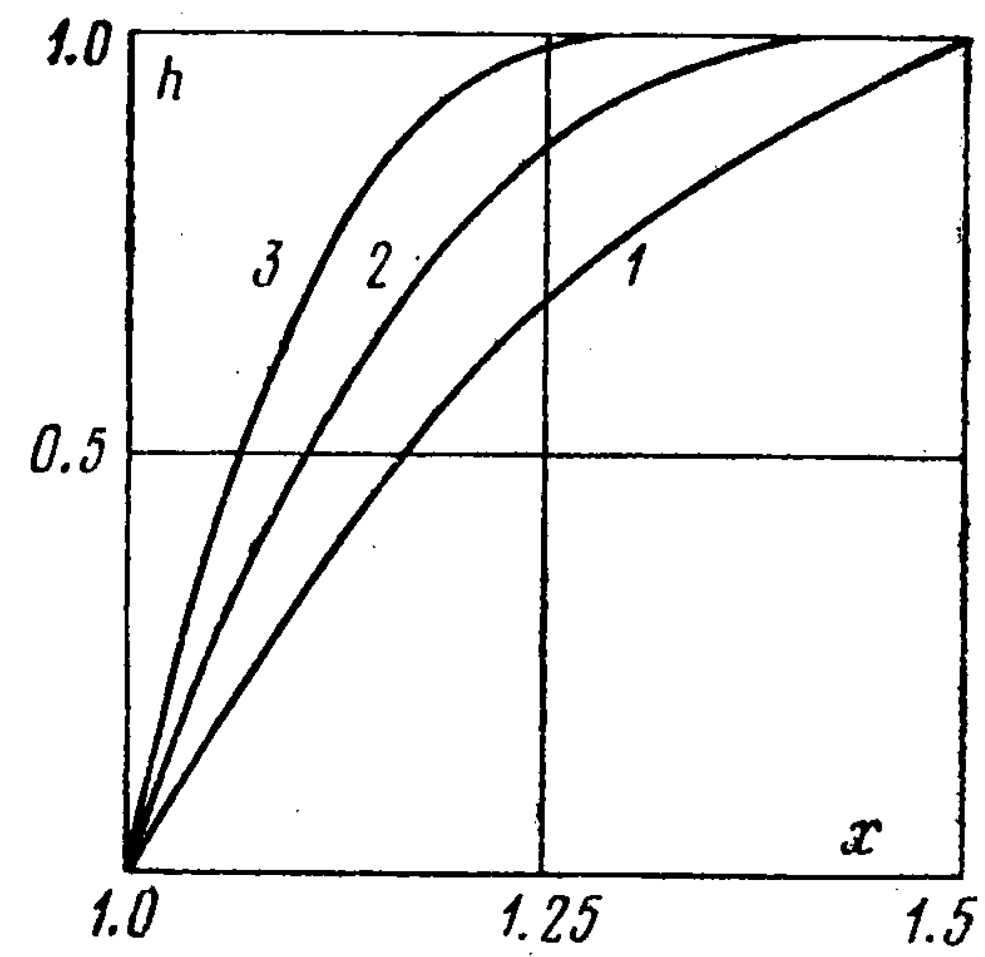
Предположим, что движение симметрично относительно плоскости $\varphi = 0$ и $u(\varphi)$ монотонно меняется от нуля при $\varphi = \pm\alpha$ до $u = u_0 > 0$ при $\varphi = 0$.

Как известно, симметричное расходящееся течение вязкой жидкости в диффузоре возможно для данного угла раствора только при числах Рейнольдса, не превышающих определенного предела. Для вязкосыпучей среды более жестким условием оказывается условие положительности давления ($w > 0$).

На фиг. 1 на плоскости α, R показаны области существования симметричных течений вязкосыпучей среды для различных значений коэффициента сухого трения,



Фиг. 1



Фиг. 2

т. е. таких течений, для которых выполняется условие $w > 0$. Для данного α существует такое R_0, что при $R > R_0$ течение вязкосыпучей среды невозможно без нарушения сплошности. Штриховая линия на фиг. 1 соответствует $k = 0.3$, штрихпунктирная — $k = 0$, сплошная линия ограничивает область существования симметричных течений для вязкой жидкости. На фиг. 1 представлены также результаты численного интегрирования системы (8) для $R = 0.88$, $\alpha = 0.67$. Сплошные линии соответствуют $k = 0$, штриховые — $k = 0.3$.

Рассмотрим движение вязкосыпучего материала, заключенного между двумя коаксиальными бесконечными цилиндрами, вращающимися вокруг своей оси с угловыми скоростями Ω_1 и Ω_2, радиусы цилиндров R_1, R_2, причем $R_2 < R_1$. Аналогичная задача ($\Omega_2 = 0$) без учета вязкости рассматривалась в работе [6].

Выберем цилиндрические координаты r, φ, z с осью z вдоль оси цилиндров. Из симметрии следует, что $v_z = v_r = 0$, $v_\varphi = v(r)$, $p = p(r)$.

Уравнения движения в цилиндрических координатах дают в рассматриваемом случае два уравнения

$$\nu\left(\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2}\right) + \frac{k}{\rho}\left(\frac{dp}{dr} + 2\frac{p}{r}\right)\operatorname{sgn}\left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r}\right) = 0 \tag{9}$$

$$\frac{dp}{dr} = \rho\frac{v^2}{r}$$

Решение уравнений (9) ищем в виде

$$v = \frac{\nu_0}{R_1} f(x), \quad p = \frac{\rho\nu_0^2}{R_1^2} g(x)$$

$$x = \frac{r}{R_1}, \quad 1 \leqslant x \leqslant \frac{R_2}{R_1}, \quad \nu_0 = \frac{\eta}{k\rho}$$

Общее решение системы (9) зависит от трех произвольных постоянных, для нахождения которых кроме задания скоростей вращения цилиндров необходимо задавать еще одно условие, например давление на одном из цилиндров. Таким образом, граничные условия к системе (9) можно взять в виде

$$f(1) = \frac{\Omega_1 R_1^2}{\nu_0}, \quad f\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \frac{\Omega_2 R_2 R_1}{\nu_0}, \quad g(1) = p_1 \frac{R_1^2}{\rho \nu_0}, \quad p_1 = p(R_1)$$

В случае $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, среда вращается как целое вместе с цилиндрами $v = \Omega r$. Рассмотрим случай, когда вращается только внешний цилиндр: $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = \Omega$. На фиг. 2 представлены результаты численного интегрирования системы (9) для случая $R_2 / R_1 = 1.5$, $\Omega R_1^2 / \nu_0 = 1.0$. По оси абсцисс отложены безразмерные радиусы $x = r / R_1$, по оси ординат — безразмерная угловая частота $h = f / x$. Кривые *1*, *2*, *3* соответствуют следующим значениям безразмерного давления g (1) на внутреннем цилиндре: 0.5, 5.0, 15.0.

Видно, что с ростом давления в вязкосыпучей среде возможно образование жестких областей. Выражение для момента сил трения, действующих на цилиндры, удается получить в конечной форме лишь в случае узкого зазора между цилиндрами, когда жесткие области отсутствуют. Момент сил трения (на единицу длины цилиндров) в этом приближении равен

$$M = \frac{4\pi R_1^2 R_2^2 \eta \Omega}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 + \frac{kp}{\eta \Omega} \ln \frac{R_2}{R_1}\right) \tag{10}$$

Здесь p — давление в среде, которое в рассматриваемом приближении можно считать постоянным. При $k = 0$ формула (10) переходит в известную формулу для вязкой жидкости.

Поступила 24 VI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гениев Г. А., Эстрин М. И.* Динамика пластической и сыпучей среды. М., Стройиздат, 1972.
2. *Басович И. Б., Бернадинер М. Г., Ерошина Л. В.* Особенности течения вязкосыпучих сред в трубах. ПМТФ, 1977, № 6.
3. *Григорьев В. Г., Ловецкий Е. Е.* О магнитной гидродинамике сыпучих сред. Тез. докл. 9-го Рижского совещ. по магнитной гидродинамике, т. 1. Саласпилс, Изд. Ин-та физики АН ЛатвССР, 1978.
4. *Мосолов П. П., Мясников В. П.* О застойных зонах течения вязкопластической среды в трубах. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
5. *Емельянов Е. И., Чернышов А. Д.* Об образовании жестких зон в вязкопластической среде. ПМТФ, 1974, № 3.
6. *Ишлинский А. Ю.* О плоском движении песка. Укр. матем. ж., 1954, т. 6, № 4.