УДК 531.36:534

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ СИСТЕМЫ СО СЛУЧАЙНЫМ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ

М. Ф. Диментберг

(Москва)

Рассматривается система второго порядка с внешними и параметрическими случайными возмущениями типа белого шума. При некотором специальном соотношении между коэффициентами интенсивности модуляции по координате и скорости для этой системы найдено точное аналитическое решение стационарного уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова, определяющее степенную зависимость для совместной плотности вероятности координаты и скорости. Это решение может использоваться, в частности, для контроля различных приближенных методов исследования задач динамики систем со случайно изменяющимися параметрами. Отметим, что большинство этих методов являются локальными, основанными на допущении о близости (в том или ином смысле) движения данной системы к движению системы с постоянными параметрами (см., например, [1] и цитированную там библиографию). Для некоторых систем удается провести нелокальный анализ, привлекая методы марковских процессов в сочетании с методом усреднения; в работе [2] такой анализ был проведен для системы второго порядка на основании решения уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова относительно стационарной одномерной плотности вероятности амплитуды.

Рассмотрим систему второго порядка

$$x^{\cdot\cdot} + 2\alpha x^{\cdot}\,[1 + \eta(t)] + \Omega^2 x\,[1 + \xi(t)] = \zeta(t) \tag{1}$$

в которой $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$ — статистически независимые стационарные гауссовские центрированные случайные процессы типа белого шума в смысле Р. Л. Стратоновича [3, 4] с коэффициентами интенсивности соответственно D_ξ, D_η, D_ζ. Переписав (1) в виде эквивалентной системы двух стохастических уравнений Ито

$$dx = y\,dt,\ dy = [-(2\alpha - 2\alpha^2 D_\eta)\,y - \Omega^2 x]\,dt - \Omega^2 x D_\xi^{1/2} d\Xi - 2\alpha y D_\eta^{1/2} d\mathrm{H} + D_\zeta^{1/2}\,d\mathrm{Z}$$

(Ξ, H, Z — независимые винеровские процессы), составим стационарное уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова относительно совместной плотности вероятности $p(x, y)$ процессов $x(t)$ и $y(t)$

$$y\frac{\partial p}{\partial x} = \Omega^2 x\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\,[(2\alpha - 2\alpha^2 D_\eta)\,yp] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\,[(4\alpha^2 y^2 D_\eta + \Omega^4 x^2 D_\xi + D_\zeta)\,p] \tag{2}$$

Прямой подстановкой можно показать, что если коэффициенты D_ξ, D_η связаны между собой зависимостью

$$\Omega^2 D_\xi = 4\alpha^2 D_\eta \tag{3}$$

то уравнение (2) имеет следующее решение, справедливое на всей плоскости x, y и затухающее на бесконечности

$$p(x, y) = C\,(\varkappa + x^2 + y^2/\Omega^2)^{-\delta} \tag{4}$$

$$\varkappa = D_\zeta/(D_\xi\Omega^4), \quad \delta = 2\alpha/(D_\xi\Omega^2) + 1/2 \tag{5}$$

Функция $p(x, y)$, определенная выражением (4), будет действительно представлять совместную плотность вероятности координаты и скорости при выполнении условия нормируемости $\delta > 1$. Постоянная нормировки C при этом

$$C = \left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)\,dx\,dy\right]^{-1} = (\pi\Omega)^{-1}(\delta - 1)\,\varkappa^{\delta-1} \tag{6}$$

Указанное условие $\delta > 1$ существования стационарной плотности вероятности $p(x, y)$ должно совпадать с условием устойчивости системы (1) по вероятности. Это достаточно очевидный факт можно строго доказать, по крайней мере для случая малых α, D_ξ, D_η, перейдя с помощью асимптотического метода усреднения к уравнению первого порядка относительно амплитуды процесса $x(t)$ и применив методы анализа устойчивости, описанные в [4].

Кроме того, при $\varkappa = 0$ плотность вероятности (4) имеет (в случае $\delta > 1$) неинтегрируемую особенность в точке $x = 0$, $y = 0$, т. е. $p(x, y)$ вырождается в дельта-функцию $\delta(0, 0)$. Физически это соответствует полному отсутствию колебаний стохастически устойчивой (в случае $\delta > 1$) системы (1) при отсутствии внешнего возбуждения. Отметим также, что в пределе при $D_\xi \to 0$ из (4), (5) получается, как и следовало ожидать, выражение для нормальной плотности вероятности $p(x, y)$.

Перейдя в (4) к новым переменным A, φ, согласно зависимостям $x = A\cos\varphi$, $y = \Omega A \sin\varphi$, можно в соответствии с известными [5] правилами нахождения плотностей вероятностей функций от случайных величин определить совместную плотность вероятности $p(A, \varphi)$. Проинтегрировав последнюю по φ от нуля до 2π, найдем одномерную стационарную плотность вероятности амплитуды

$$(7)\qquad p(A) = \frac{2A(\delta - 1)}{\varkappa(1 + A^2/\varkappa)^\delta}$$

При малых α, D_ξ, D_η, D_ζ такое же распределение амплитуды (7) получается в общем случае (когда равенство (3) не выполнено) при помощи асимптотического метода усреднения; в работе [2] распределение (7) было получено для случая $D_\eta = 0$. Разумеется, в общем случае зависимости параметров $\varkappa$, δ этого распределения от параметров α, Ω, D_ξ, D_η, D_ζ оказываются не такими как согласно (5). При выполнении равенства (3) приближенное распределение $p(A)$, найденное методом усреднения, совпадает с точным.

Проинтегрировав распределение (4) по y, найдем одномерную стационарную плотность вероятности координаты $x(t)$

$$(8)\qquad p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)\, dy = \frac{\varkappa^{\delta-1}\Gamma(\delta - 1/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\delta - 1)}(\varkappa + x^2)^{-(\delta-1/2)}$$

где Γ — гамма-функция. Найдем моменты степенного распределения (8). Все моменты нечетных порядков оказываются равными нулю, а для момента порядка $2k$ получаем

$$(9)\qquad \langle x^{2k}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} p(x)\, dx = \frac{\varkappa^k\Gamma(k + 1/2)\Gamma(\delta - k - 1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\delta - 1)}$$

(угловыми скобками всюду обозначается усреднение). Видно, что момент порядка $2k$ процесса $x(t)$ оказывается конечным лишь при $\delta > k + 1$. Неравенство $\delta > k + 1$ есть условие стохастической устойчивости системы (1) по моментам порядка $2k$. В частности, при $1 < \delta < 2$ процесс $x(t)$ неустойчив в среднем квадратичном, хотя стационарная плотность вероятности этого процесса существует. Отметим, что такие стационарные плотности вероятности наблюдались при численном моделировании на ЭЦВМ системы (1) с $D_\eta = 0$ [2]. В свете изложенного неудивительно, что в случае $1 < \delta < 2$ для наблюдаемого процесса $x(t)$ не удавалось получать состоятельные оценки дисперсии: эти оценки сильно изменялись при переходе от одного отрезка реализации процесса $x(t)$ к другому.

На основании зависимости (4) можно также найти смешанные моменты координаты и скорости. Распределение (4) представляет интересный пример такой ситуации, когда стационарный случайный процесс и его первая производная не являются статистически независимыми. Действительно, хотя $\langle xy\rangle = 0$ (процессы $x(t)$, $y(t)$ не коррелированы), однако смешанный момент четвертого порядка

$$\langle x^2y^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2y^2p(x, y)\, dx\, dy = \frac{\varkappa^2\Omega^2}{4(\delta - 2)(\delta - 3)}$$

совпадает с произведением $\langle x^2\rangle\langle y^2\rangle = (\langle x^2\rangle)^2\Omega^2 = {}^1/_4\varkappa^2\Omega^2(\delta-2)^{-2}$ лишь в предельном случае $\delta\to\infty$, соответствующем асимптотически нормальному распределению.

В заключение найдем, пользуясь известной [5] зависимостью, среднее в единицу времени число пересечений $n(x_0)$ процессом $x(t)$ уровня $x=x_0$ с положительной производной

$$n(x_0)=\int_0^\infty yp(x_0,y)\,dy=(\Omega/2\pi)(1+x_0^2/\varkappa)^{-(\delta-1)} \tag{10}$$

В пределе при $D_\xi\to 0$ из (10) получаем, как и следовало ожидать

$$n(x_0)=(\Omega/2\pi)\exp(-2\alpha\Omega^2x_0^2/D_\xi)$$

Формула (10) наглядно показывает, как по мере приближения к границе $\delta=1$ стохастической устойчивости системы (1) происходит непрерывное возрастание уровня параметрического усиления колебаний, вызванных внешними случайными возмущениями $\xi(t)$.

Поступила 24 XII 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский А. А.* Фазовое пространство и статистическая теория динамических систем. М., «Наука», 1974.
2. *Диментберг М. Ф., Сидоренко А. С.* О взаимодействии между колебаниями, возникающими в линейной системе при действии внешних и параметрических случайных возмущений. Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 3.
3. *Стратонович Р. Л.* Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. М., Изд-во МГУ, 1966.
4. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М., «Наука», 1969.
5. *Свешников А. А.* Прикладные методы теории случайных функций. М., «Наука», 1968.

УДК 624.131 + 539.215

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМЫХ ВЯЗКОСЫПУЧИХ МАТЕРИАЛОВ

Л. П. Горбачев, В. Г. Григорьев, Е. Е. Ловецкий

(Москва)

Рассматривается стационарное движение несжимаемой вязкосыпучей среды. Получены уравнения движения в пограничном слое и исследовано обтекание плоской пластинки. Рассмотрено течение в плоском диффузоре и между вращающимися цилиндрами.

В ряде работ [1–3] предлагалась модель вязкосыпучей сплошной среды. Вязкосыпучий материал по существу вязкопластический, но с пределом текучести, зависящим от давления, т. е. для девиатора тензора напряжений справедливо следующее выражение [3]:

$$\sigma_{ik}=\left(\frac{\sqrt{2}\tau_s}{\sqrt{\varepsilon_{ab}\varepsilon_{ab}}}+2\eta\right)\varepsilon_{ik} \tag{1}$$

$$\tau_s=kp,\quad \varepsilon_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)$$

где k — коэффициент внутреннего, η — коэффициент вязкости, p — давление, которое считается положительным, для того чтобы рассматривать вязкосыпучую среду как сплошную.